

PROSIDING

SEMINAR NASIONAL FISIKA
UNIVERSITAS ANDALAS
(SNFUA) 2011
Padang, 15 Oktober 2011

ISBN 978-979-25-1953-2

Editor:
Ardian Putra
Meqorry Yusfi



Jurusan Fisika
Universitas Andalas

GEOMETRI BINTANG BEROTASI PADA KEADAAN KRITIS

Iwan Setiawan

*Program Studi Pendidikan Fisika Universitas Bengkulu
Jl. Kandang Limun Kota Bengkulu*

Email : iwanphysics@gmail.com

ABSTRAK

Konfigurasi kesetimbangan mekanis pada bintang-bintang berotasi ditelaah melalui model Roche. Pada kajian ini bintang diperlakukan sebagai benda tegar, sedangkan geometrinya ditentukan berdasarkan persamaan equipotensial. Keadaan kritis suatu bintang ditentukan berdasarkan ketiadaan gaya gravitasi total yang mengimbangi tekanan termodinamis. Dalam hal ini terdapat dua kemungkinan, percepatan gravitasi efektifnya lenyap atau batas Eddington-nya terlampaui. Telah ditentukan penampang membujur bintang-bintang berotasi dari berbagai massa dan kecepatan sudut.

Kata kunci: rotasi bintang, keadaan kritis, kecepatan kritis, luminositas.

PENDAHULUAN

Bintang mengalami rotasi seperti juga Bumi. Diketahui bahwa akibat rotasi, jejari equatorial Bumi 21,4 km lebih panjang dibanding jejari kutubnya (Maeder, 2009). Bintang yang memiliki rotasi tinggi, jejari katulistiwaannya bahkan dapat mencapai 1,5 jejari polar (Ekstrom dkk, 2008). Ini menunjukkan bahwa rotasi cukup berpengaruh pada bintang. Mekanisme kesetimbangan pada bintang yang berotasi sudah dipelajari sejak lama, beberapa model telah dikembangkan. Contohnya adalah model Mclaurin, yang menganggap kerapatan bintang yang tetap dan model Roche, yang beranggapan sebaliknya (kerapatan yang tidak tetap). Terdapat perbedaan yang cukup mencolok antara kedua model ini. Dalam model Mclaurin, perubahan mekanisme kesetimbangan terjadi pada rotasi yang tinggi. Nilai maksimum kecepatan sudut (dianggap rotasi benda tegar) adalah $\Omega_{\max}^2 = 0,4494G\pi\rho$ (Maeder, 2009) kenyataannya akan terjadi ketidakstabilan sebelum mencapai batas kecepatan angular ini. Pada model Roche dengan Ω seragam (bintang dianggap sebagai rotasi benda tegar), perubahan kesetimbangan juga akan terjadi, dan didapatkan bahwa perbandingan antara jejari kutub dan jejari equatorial akan mencapai 2/3 pada kecepatan sudut maksimum yaitu $= 0,7215G\pi\bar{\rho}$, dengan $\bar{\rho}$ adalah kerapatan rata-rata. Pendekatan dengan model Roche biasanya lebih banyak digunakan karena lebih dekat kepada fakta yang ada.

Permukaan bintang adalah daerah ekipotensial, yakni $\Psi = \text{tetapan}$. Andaikan kita tinjau sebuah bintang dengan massa total M dan $R(\theta)$ jejari bintang itu pada kolatitud θ . Karena gaya sentrifugal di daerah kutub bernilai nol, maka potensial pada kutub bintang itu adalah $-GM/R_p$, dengan R_p jejari kutub bintang. Oleh karenanya, nilai potensial di berbagai tempat di permukaan bintang itu adalah

$$\frac{GM}{R_p} = -\frac{GM}{R(\theta)} - \frac{1}{2}\Omega^2 R(\theta)^2 \sin^2 \theta. \quad (1)$$

Jika e_r dan e_θ merupakan vektor satuan dalam arah radial dan arah bujur, maka vektor percepatan gravitasi efektif pada permukaan bintang dapat dituliskan sebagai

$$\mathbf{g}_{ef} = \left[-\frac{GM}{R(\theta)^2} + \Omega^2 R(\theta) \sin^2 \theta \right] \mathbf{e}_r + \left[\Omega^2 R(\theta) \sin \theta \cos \theta \right] \mathbf{e}_\theta. \quad (2)$$

Teorema von Zeipel menyatakan hubungan antara fluks radiasi pada kolatitud θ di permukaan bintang yang berotasi dengan percepatan gravitasi efektif lokal (Maeder dan Meynet, 2000). Jika kita tinjau bintang yang berotasi seperti rotasi benda tegar, fluks radiasi dapat dituliskan sebagai

$$\mathbf{F}(\Omega, \theta) = -\chi \nabla T(\Omega, \theta), \quad (3)$$

dengan

$$\chi = \frac{4acT^3}{3\kappa\rho}. \quad (4)$$

Karena bintang berada dalam keadaan barotropik, maka

$$\mathbf{F}(\Omega, \theta) = -\frac{dT}{dP} \nabla P(\Omega, \theta) = -\rho\chi \frac{dT}{dP} \mathbf{g}_{ef}. \quad (5)$$

Dengan demikian, dari hubungan antara luminositas bintang dan fluks radiasi, didapatkan

$$\mathbf{F}(\Omega, \theta) = -\frac{L}{4\pi GM_*} \mathbf{g}_{ef}(\Omega, \theta), \quad (6)$$

dengan

$$M_* = M \left(1 - \frac{\Omega^2}{2\pi G \rho_m} \right), \quad (7)$$

dan ρ_m rapat massa rata-rata bahan pada permukaan bintang itu.

Pada bintang yang berotasi, percepatan gravitasi total bintang merupakan penjumlahan beberapa percepatan : percepatan gravitasi murni, percepatan sentrifugal, dan percepatan oleh tekanan radiasi (Maeder dan Meynet, 2000). Hal ini dinyatakan dalam persamaan berikut

$$\mathbf{g}_{tot} = \mathbf{g}_{ef} + \mathbf{g}_{rad} = \mathbf{g}_{gr} + \mathbf{g}_{rot} + \mathbf{g}_{rad}, \quad (8)$$

dengan \mathbf{g}_{rad} diberikan oleh

$$\mathbf{g}_{rad} = \frac{1}{\rho} \nabla P_{rad} = \frac{\kappa(\theta)\mathbf{F}}{c}. \quad (9)$$

Faktor $\kappa(\theta)$ adalah kededapan bahan pada kolatitud θ . Dengan memanfaatkan persamaan (6) dan (8) didapatkan persamaan berikut

$$\mathbf{g}_{tot} = \mathbf{g}_{ef} \left[1 - \frac{\kappa(\theta)L(P)}{4\pi c GM_*} \right]. \quad (10)$$

Pada persamaan ini efek rotasi muncul pada \mathbf{g}_{ef} dan pada ungkapan di dalam kurung. Jika kita tinjau batas fluks secara lokal, yaitu keadaan dengan $\mathbf{g}_{tot} = 0$ [Maeder dan Meynet, 2000], maka $\mathbf{g}_{rad} = -\mathbf{g}_{ef}$. Batas fluks, oleh karena itu, diberikan oleh

$$\mathbf{F}_{lim}(\theta) = -\frac{c}{\kappa(\theta)}\mathbf{g}_{ef}(\theta). \quad (11)$$

Dari persamaan ini, jika faktor Edington lokal $\Gamma_{\Omega}(\theta)$ didefinisikan sebagai nisbah (rasio) antara besarnya fluks sebenarnya dengan besarnya fluks batas lokal, maka didapatkan

$$\Gamma_{\Omega}(\theta) = \frac{\kappa(\theta)L(P)}{4\pi cGM(1 - \frac{\Omega^2}{2\pi G\rho_m})}. \quad (12)$$

Jika bintang tidak mengalami rotasi (yakni jika Ω bernilai 0), maka $\Gamma_{\Omega}(\theta)$ akan sama dengan faktor Edington Global Γ . Persamaan (10), selanjutnya, dapat ditulis sebagai

$$\mathbf{g}_{tot} = \mathbf{g}_{ef} [1 - \Gamma_{\Omega}(\theta)]. \quad (13)$$

Persamaan ini mengungkapkan bahwa pada bintang yang berotasi, percepatan gravitasi total dipengaruhi oleh percepatan gravitasi efektif \mathbf{g}_{ef} (yang melibatkan ungkapan tentang kecepatan rotasi bintang) dan oleh luminositas bintang.

Melalui ungkapan persamaan (13), keadaan ambang (*critical state*) dapat diperkirakan. Pada keadaan kritis ini percepatan gravitasi total lenyap sehingga tidak ada lagi percepatan atau gaya yang mengimbangi tekanan termal dari dalam bintang. Akibatnya, bahan-bahan bintang akan lari (buyar). Hal ini tentu saja mengakibatkan persamaan (13) akan mempunyai dua akar, yaitu $\mathbf{g}_{ef} = 0$ atau $\Gamma_{\Omega}(\theta) = 1$. Keadaan ini mengakibatkan adanya batas (limit) tertentu pada kecepatan rotasi bintang, selain bergantung pada beberapa parameter lain seperti massa bintang dan jejari bintang. Keadaan $\mathbf{g}_{tot} = 0$ juga akan memberikan adanya batas pada luminositas bintang sebagaimana dijelaskan di atas, yang disebut sebagai Batas Eddington (Meynet, 2008). Keadaan ambang $\mathbf{g}_{ef} = 0$ akan dinamakan keadaan ambang pertama, sedangkan keadaan pada $\Gamma_{\Omega}(\theta) = 1$, disebut keadaan ambang kedua.

Keadaan ambang $\mathbf{g}_{tot} = 0$ menurut persamaan (2) diperoleh hanya pada wilayah katulistiwa ($\theta = \pi/2$). Keadaan ini memberikan ungkapan

$$\Omega_{krit}^2 = \frac{GM}{R_{e,krit}^3}, \quad (14)$$

dengan $R_{e,krit}$ jeari-jeari bintang di ekuator ketika keadaan kritis itu. Keadaan bintang yang berotasi dengan berbagai kecepatan sudut inilah yang akan dibahas lebih lanjut.

HASIL DAN DISKUSI

Kita tinjau kembali persamaan permukaan bintang sebagai daerah equipotensial, yakni persamaan (1). Persamaan tersebut dapat dituliskan sebagai

$$R(\theta)^3 - \frac{2GM}{\Omega^2 R_p \sin^2 \theta} R(\theta) + \frac{2GM}{\Omega^2 \sin^2 \theta} = 0. \quad (15)$$

Persamaan ini memperlihatkan bahwa jejari bintang yang berotasi, sebagai fungsi sudut kolatitud, memenuhi persamaan polinom pangkat tiga yang bergantung kepada berbagai parameter : tetapan gravitasi (G), massa bintang (M), jejari polar (R_p), serta parameter kecepatan rotasi bintang itu sendiri (Ω). Jika jejari bintang ($R(\theta)$) dievaluasi pada semua sudut kolatitud maka akan didapatkan bentuk penampang bintang yang berotasi.

Memfaatkan beberapa data yang menyebutkan tentang parameter-parameter di atas, penampang membujur sebuah bintang dengan kecepatan rotasi tertentu akan dapat digambarkan dengan terlebih dahulu menyelesaikan persamaan pangkat tiga untuk jejari bintang, persamaan (15). Persamaan (15) dapat ditulis dalam bentuk

$$R(\theta)^3 - AR(\theta) + B = 0, \quad (16)$$

dengan

$$A = -\frac{2GM}{\Omega^2 R_p \sin^2 \theta} \quad \text{dan} \quad B = \frac{2GM}{\Omega^2 \sin^2 \theta}.$$

Persamaan ini merupakan persamaan polinom pangkat tiga dengan parameter yang lebih sederhana, yang jika diselesaikan dengan metode Newton-Raphson dan dengan menggunakan data pada Tabel 1, akan didapatkan jejari bintang $R(\theta)$ pada kolatitud θ . Perhitungan dengan cara itu menghasilkan Tabel 2, dengan

$$G = 3,8 \times 10^{-7} \frac{R_\odot^3}{M_\odot s^2}$$

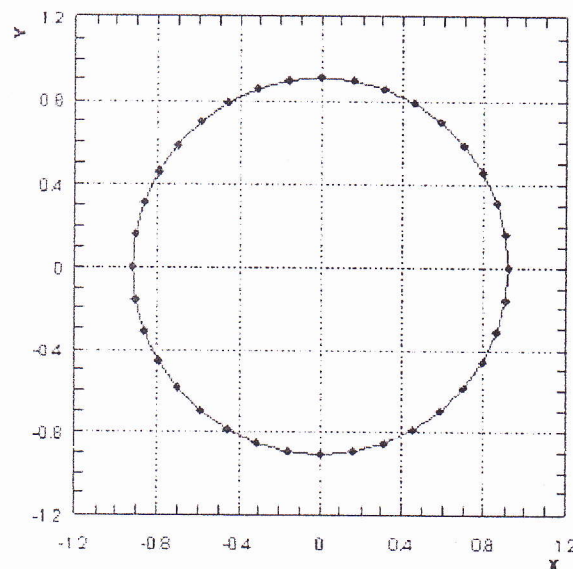
Tabel 1. Parameter-parameter Bintang Berotasi dengan Massa $1 M_\odot$ [Roxburg, 2004]

$10^4 \Omega$	0	1.0	3.0	4.0	4.6	4.6254
α	0.000	0.020	0.205	0.451	0.903	1.0018
R_e/R_p	1.000	1.010	1.108	1.237	1.470	1.5198
V_e k/s	0	64	201	288	381	395
L/L_\odot	0.712	0.705	0.650	0.599	0.561	0.5595
R_e/R_\odot	0.914	0.919	0.964	1.035	1.189	1.2261
R_p/R_\odot	0.914	0.909	0.871	0.837	0.809	0.8067

Tabel 2. Jejeri Bintang $1 M_{\odot}$ dengan $\Omega = 10^{-4}$ rad/s.

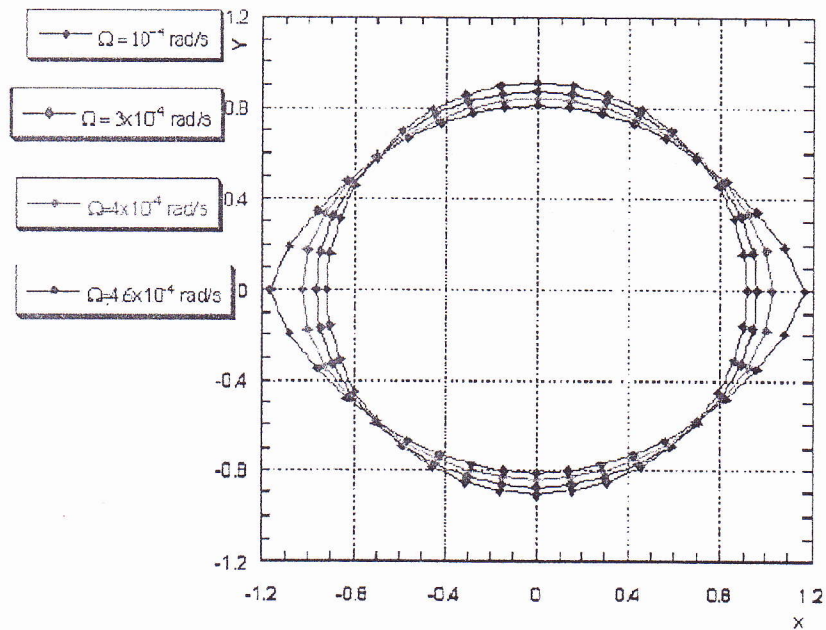
Ω^2	R_p	θ	$\sin^2 \theta$	A	B	R	X	Y
1,00E-08	0,909	10	0,03014	2774,2798	2521,8204	0,9092	0,1578	0,8954
1,00E-08	0,909	20	0,11696	714,8213	649,7726	0,91	0,3112	0,8551
1,00E-08	0,909	30	0,25	334,4334	304,0000	0,9112	0,4556	0,7891
1,00E-08	0,909	40	0,41317	202,3602	183,9454	0,9127	0,5867	0,6991
1,00E-08	0,909	50	0,58676	142,4926	129,5257	0,9143	0,7004	0,5870
1,00E-08	0,909	60	0,74996	111,4844	101,3393	0,9158	0,7931	0,4579
1,00E-08	0,909	70	0,88302	94,6844	86,0682	0,9171	0,8618	0,3136
1,00E-08	0,909	80	0,96983	86,2092	78,3642	0,9179	0,9039	0,1593
1,00E-08	0,909	90	1	83,6084	76,0000	0,9182	0,9182	0,0000

Dari Tabel 2 diperoleh tampang bujur bintang tersebut, sebagaimana diperlihatkan pada Gambar 1



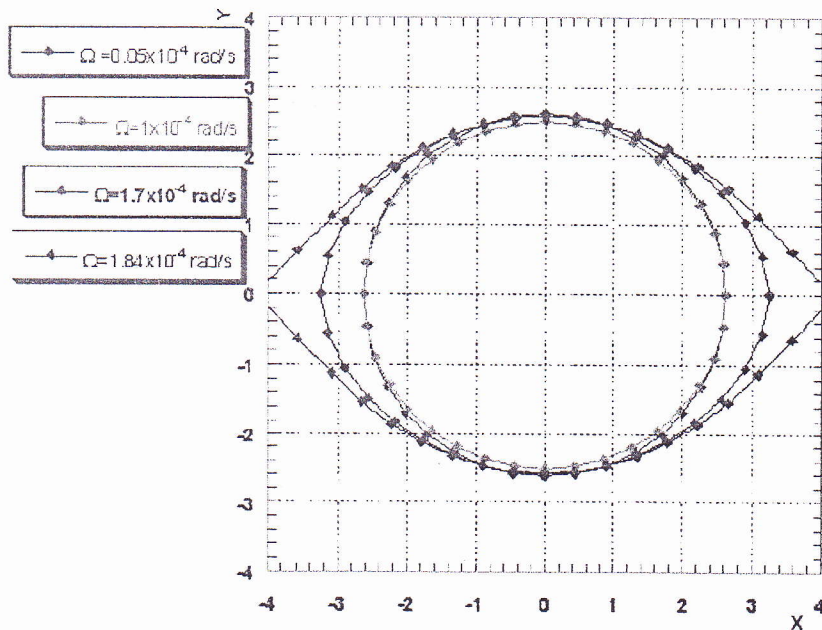
Gambar 1. Tampang bujur Bintang berotasi $1 M_{\odot}$ dengan $\Omega = 10^{-4}$ rad/s.

Hasil perhitungan untuk bintang bermassa $1 M_{\odot}$ dalam berbagai kecepatan sudut rotasi diberikan oleh Gambar 2. Untuk Bintang $1 M_{\odot}$ dengan kecepatan sudut rotasi $\Omega = 4,6 \times 10^{-4}$ rad/s didapatkan bentuk penampang bujur yang melancip sepanjang lingkaran katulistiwa, kecepatan rotasi ini merupakan kecepatan yang mendekati kecepatan sudut kritis. Terlihat bahwa peningkatan kecepatan sudut rotasi akan menyebabkan terjadinya perubahan penampang bintang, sebagaimana diperlihatkan pada Gambar 2.

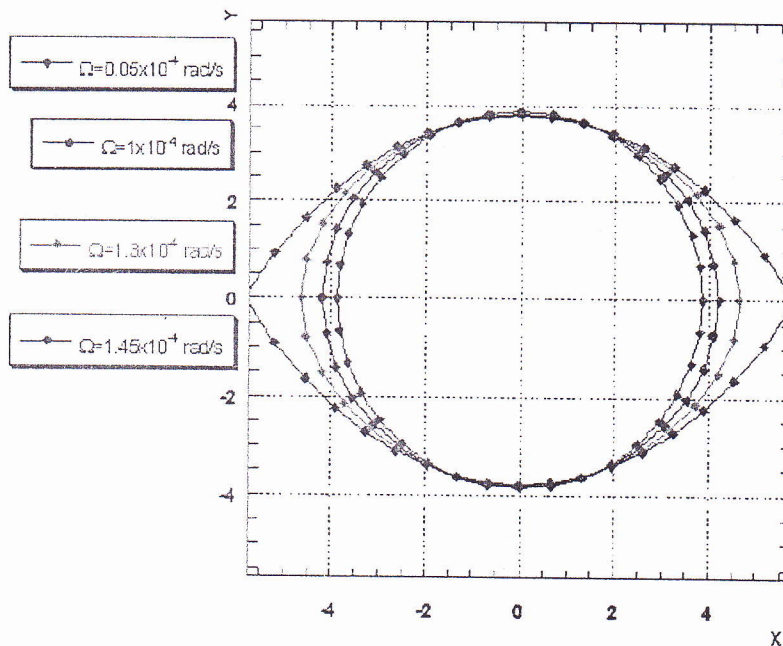


Gambar 2. Penampang Bintang $1 M_{\odot}$ dengan variasi nilai Ω

Untuk bintang berotasi dengan massa yang yang lain didapatkan bentuk tarapang bujur sebagaimana pada gambar 3 dan gambar 4.5



Gambar 3. Penampang bintang $5 M_{\odot}$ untuk beberapa Ω



Gambar 4. Penampang bintang $10 M_{\odot}$ untuk beberapa nilai Ω

Dari beberapa gambar diatas terlihat bahwa, meningkatnya kecepatan rotasi akan merubah kesetimbangan bintang, yang ditandai dengan penurunan jejari polar dan meningkatnya jejari katulistiwa. Pada Gambar (3) dan (4), didapatkan bentuk penampang bujur bintang yang semakin melancip di katulistiwa karena seiring peningkatan kecepatan sudut rotasi. Penampang bintang yang paling melancip pada ujung-ujungnya ini merupakan penampang bintang dengan kecepatan rotasi yang sudah mencapai kecepatan kritis, ini dapat dibuktikan dengan nilai perbandingan antara jejari equatorial dan jejari polar yang telah mencapai $3/2$.

Geometri Bintang Pada Kecepatan Sudut Ambang

Meningkatnya kecepatan rotasi akan memengaruhi kesetimbangan bintang. Jika kecepatan rotasi mencapai nilai ambang, maka jejari bintang dikatakan juga pada keadaan ambang. Persamaan jejari bintang pada kecepatan ambang dapat dituliskan menjadi

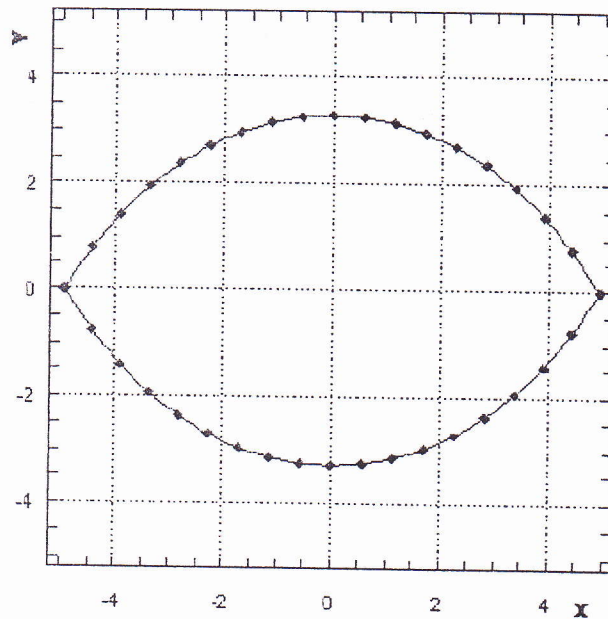
$$R_k(\theta)^3 - \frac{2GM}{\Omega_k^2 R_{p,k} \sin^2 \theta} R_k(\theta) + \frac{2GM}{\Omega_k^2 \sin^2 \theta} = 0, \quad (17)$$

dengan $R_k(\theta)$ jejari bintang pada keadaan kritis, Ω_k kecepatan sudut bintang pada keadaan ambang, serta $R_{p,k}$ jejari polar pada keadaan ambang. Jika kita gunakan ungkapan pada persamaan (14), maka persamaan (17), dapat dituliskan menjadi

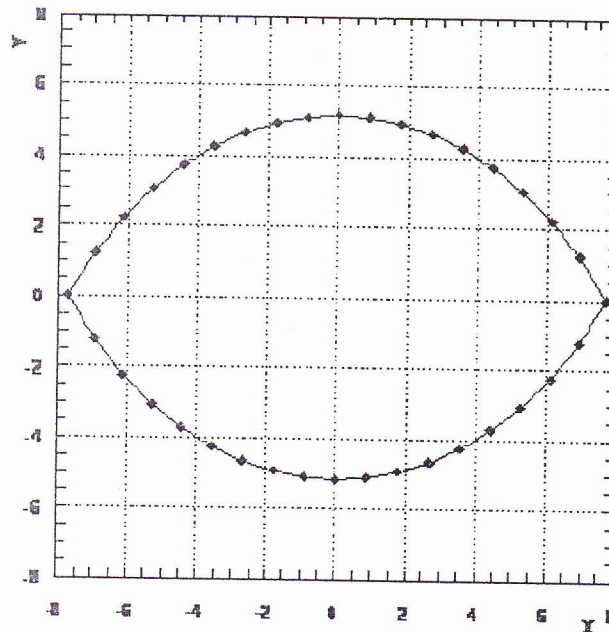
$$R_k(\theta)^3 - \frac{27R_{p,k}^2}{4 \sin^2 \theta} R_k(\theta) + \frac{27R_{p,k}^3}{4 \sin^2 \theta} = 0. \quad (18)$$

Persamaan ini diselesaikan dengan metode yang sama dengan yang sebelumnya, dengan terlebih dahulu menentukan nilai $R_{p,k}$. Ungkapan untuk $R_{p,k}$ didapatkan dari persamaan (14)

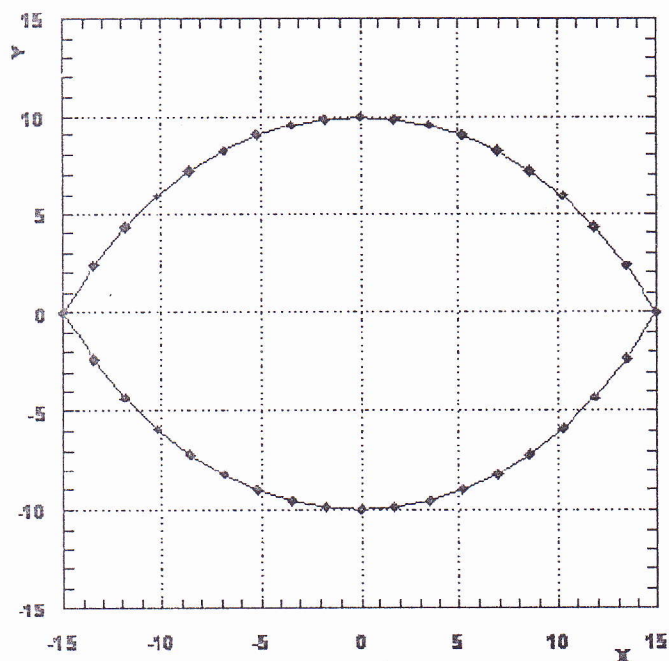
dan bantuan data-data yang diperoleh dari (Meynet and Maeder, 1996). Hasil-hasil perhitungan untuk beberapa variasi massa bintang diperlihatkan pada Gambar 5, 6, dan 7.



Gambar 5. Penampang bintang $9 M_{\odot}$ dengan $\Omega_k = 1,684 \times 10^{-4}$ rad/s



Gambar 6. Penampang bintang $20 M_{\odot}$ dengan $\Omega_k = 1,28 \times 10^{-4}$ rad/s



Gambar 7. Penampang bintang $60 M_{\odot}$ dengan $\Omega_k = 8,26 \times 10^{-5}$ rad/s

Dari beberapa gambar terlihat bahwa pada keadaan kritis, dengan kecepatan rotasi bintang yang juga berada pada kecepatan ambang, bentuk penampang bintang akan memipih, dengan ujung-ujung pada daerah khatulistiwa berbentuk lancip. Keadaan seperti ini disebabkan karena pada keadaan kritis. Di daerah katulistiwa gravitasi efektif yang bernilai nol, sehingga material dalam bintang yang sebelumnya berada dalam kesetimbangan hidrostatis (tekanan hidrostatis diimbangi oleh gravitasi), akan menuju keluar, karena tidak ada lagi gaya gravitasi yang menahannya.

Keadaan Ambang Kedua

Keadaan Ambang kedua didapatkan ketika nisbah Eddington local, $\Gamma_{\Omega(\theta)}$, pada persamaan (13) bernilai 1. Sehingga persamaan (12) dapat dituliskan menjadi

$$\frac{\kappa(\theta)L(P)}{4\pi cGM} = 1 - \frac{\Omega^2}{2\pi G\rho_m} \quad (19)$$

Melalui persamaan ini, dapat ditunjukkan bahwa luminositas pada bintang yang berotasi bergantung pada suku kedua ruas kanan persamaan (19), sehingga kecepatan rotasi bintang memenuhi

$$\frac{\Omega^2}{2\pi G\rho_m} < 1, \quad (20)$$

Dengan menggunakan ungkapan $\rho_m = M/V$, dapat ditunjukkan bahwa

$$\Omega^2 < \frac{2\pi GM}{V} . \quad (21)$$

Persamaan (21) menunjukkan bahwa, untuk menjamin keberlangsungan luminositas pada bintang yang berotasi, maka kecepatan rotasi bintang tersebut harus lebih kecil dari hasil kali antara besaran 2π dengan tetapan gravitasi umum G dan kerapatan rata-rata permukaan bintang yang ditinjau. Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa kecepatan rotasi bintang juga memengaruhi luminositas atau kecerlangan bintang, nilai kecepatan rotasi ini dibatasi oleh suku kedua ruas kanan persamaan (21). Inilah yang disebut sebagai keadaan kritis kedua.

KESIMPULAN

Kecepatan sudut rotasi bintang berpengaruh besar pada bentuk tampang bujur bintang itu. Terdapat dua macam ambang bagi kecepatan sudut rotasi bintang. Tampang bujur bintang pada kecepatan ambang pertama sangat khas. Jika kecepatan sudut rotasi bintang melampaui kecepatan ambang pertama, maka kesetimbangan hidrostatik pada bintang akan dilanggar, yakni tidak ada lagi kesetimbangan hidrostatik. Keadaan ambang kedua dicapai pada saat kecepatan rotasi bintang sebanding dengan $2\pi GM/V$. Jika kecepatan kritis pada keadaan kritis kedua dilampaui, maka bintang akan "padam", yakni luminositasnya nol.

DAFTAR PUSTAKA

- Ekstrom, S, Meynet G, Maeder, A, Barblan F. 2008. Evolution Towards the Critical Limit and the Origin of Be Stars. *arXiv:0711.1735v1*.
- Maeder, A. 2009. Physics, *Formation and Evolution of Rotating Stars*. Springer. Verlag Berlin Heidelberg, Germany. Pp. 22-80.
- Maeder, A, Meynet, G. 2000. The Eddington and Ω -Limits, the rotational mass loss for OB and LBV stars. *Astronomy & Astrophysics*, 361 159-166 (2000).
- Meynet, G, Maeder, A. 1996. The Computational Method and Inhibiting Effect of the μ -Gradient. *Astronomy & Astrophysics*. 321, 465-476 (1997).
- Meynet, G. 2008. Physics of Rotation in Stellar Models. *arXiv:0801.2944v1*.
- Roxburgh, I.W. 2004. 2-Dimensional Models of Rapidly Rotating Stars, Uniformly Rotating Zero Age Main Sequence Stars. *Astronomy & Astrophysics*, 428, 171-179 (2004).