



PROSIDING

SEMIRATA 2014 Bidang MIPA BKS-PTN-Barat

"Integrasi sains MIPA untuk mengatasi masalah pangan,
energi, kesehatan, reklamasi, dan lingkungan"
IPB International Convention Center dan Kampus IPB Baranangsiang, 9-11 Mei 2014

BUKU 1

MATEMATIKA

Diterbitkan oleh: Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Pertanian Bogor



ISBN 978-602-70491-0-9



ISBN : 978-602-70491-0-9

PROSIDING

Seminar Nasional dan Rapat Tahunan Bidang MIPA 2014

“Integrasi Sains MIPA untuk Mengatasi Masalah Pangan, Energi, Kesehatan, Lingkungan, dan Reklamasi”

Diterbitkan Oleh :



**Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Pertanian Bogor**

Copyright© 2014
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Pertanian Bogor
Prosiding Seminar Nasional dan Rapat Tahunan Bidang MIPA 2014, 9-11 Mei 2014
Diterbitkan oleh : FMIPA-IPB, Jalan Meranti Kampus IPB Dramaga, Bogor 16680
Telp/Fax: 0251-8625481/8625708
<http://fmipa.ipb.ac.id>
Terbit Oktober, 2014
xiii + 662 halaman
ISBN: 978-602-70491-0-9

Editor dan Reviewer

PROSIDING

Seminar Nasional dan Rapat Tahunan Bidang MIPA 2014

Direktor Editor

- Drs. Ali Kusnanto, MSi.
- Dr. Heru Sukoco
- Dr. Wisnu Ananta Kusuma
- Dr. Imas Sukaesih Sitanggang
- Auzi Asfarian, M.Kom
- Wulandari, S.Komp
- Dean Apriana Ramadhan, S.Komp

Editor Utama

- Dr. Rika Raffiudin
- Dr. Ence Darmo Jaya Supena
- Dr. Utut Widyastuti
- Prof. Dr. Purwantiningsih
- Dr. Tony Ibnu Sumaryada
- Dr. Imas Sukaesih Sitanggang
- Dr. Wisnu Ananta Kusuma
- Dr. drh. Sulistyani, MSc.
- Dr. Indahwati
- Dr. Sobri Effendi
- Drs. Ali Kusnanto, MSi.

Reviewer

- Drs. Ali Kusnanto, M Si.
- Dr. Berlian Setiawaty, MS
- Dr.Ir. I Gusti Putu Purnaba, DEA
- Dr. Paian Sianturi
- Prof.Dr.Ir. I Wayan Mangku, M.Sc
- Dr. Toni Bakhtiar, M.Sc
- Dr. Jaharuddin, MS
- Dr.Ir. Hadi Sumarno, MS

KATA PENGANTAR

Kegiatan Seminar dan Rapat Tahunan Bidang MIPA tahun 2014 (Semirata-2014 Bidang MIPA) Badan Kerja Sama Perguruan Tinggi Negeri Wilayah Barat (BKS-PTN Barat) yang diamanahkan kepada FMIPA-IPB sebagai penyelenggara telah dilaksanakan dengan sukses pada tanggal 9-11 Mei 2014 di IPB International Convention Center dan Kampus IPB Baranagsiang, Bogor. Salah satu program utama adalah Seminar Nasional Sains dan Pendidikan MIPA dengan tema: *"Integrasi sains MIPA untuk mengatasi masalah pangan, energi, kesehatan, dan lingkungan"*.

Dalam sesi pleno seminar telah disampaikan pemaparan materi oleh satu pembicara utama dan empat pembicara undangan yang berasal dari beragam institusi dan profesi. Dari sesi pleno ini, diharapkan peserta dapat menambah wawasan dan pemahaman tentang pengembangan dan pemanfaatan IPTEK, khususnya Bidang MIPA, sehingga sains dan pendidikan MIPA terus berkembang dan dapat berkontribusi nyata untuk kemajuan dan kemakmuran bangsa Indonesia.

Kegiatan yang tidak kalah pentingnya dalam seminar ini adalah sesi paralel karena telah memberi kesempatan kepada peserta untuk melakukan presentasi dan komunikasi ilmiah secara langsung dengan sesama kolega yang mempunyai minat yang sama dalam mengembangkan Sains dan atau Pendidikan MIPA. Dalam kegiatan sesi paralel ini dipresentasikan secara oral 592 judul makalah hasil penelitian yang disampaikan dalam 37 ruang seminar secara paralel, dan juga dipresentasikan 120 poster ilmiah. Dalam kegiatan komunikasi ilmiah secara langsung ini juga telah dimanfaatkan untuk menjalin jejaring agar lebih bersinergi dalam pengembangan Sains dan Pendidikan MIPA ke depannya. Supaya komunikasi ilmiah yang baik ini dapat juga tersampaikan ke komunitas ilmiah lain yang tidak dapat hadir pada kegiatan seminar, panitia memfasilitasi untuk menerbitkan makalah dalam bentuk **Prosiding**. Panitia juga tetap memberi kesempatan kepada peserta yang akan menerbitkan makalahnya di jurnal ilmiah, sehingga tidak seluruh materi yang disampaikan pada seminar diterbitkan dalam prosiding ini.

Dalam proses penerbitan prosiding ini, panitia telah banyak dibantu oleh Tim Reviewer dan Tim Editor yang dikoordinir oleh Ali Kusnanto yang telah dengan sangat intensif mencurahkan waktu, tenaga dan pikiran. Untuk itu, panitia menyampaikan terima kasih dan penghargaan. Panitia juga menyampaikan terima kasih dan penghargaan kepada seluruh penulis makalah yang telah merespon dengan baik hasil review artikelnya. Namun, panitia juga menyampaikan permohonan ma'af karena dengan sangat banyaknya makalah yang akan diterbitkan dalam prosiding ini, waktu yang dibutuhkan dalam proses penerbitan prosiding ini mencapai lebih dari empat bulan, dan penerbitan prosiding tidak dilakukan dalam satu buku tetapi dalam tujuh buku prosiding. Semoga penerbitan prosiding ini selain bermanfaat bagi para pemakalah dan penulis, juga dapat bermanfaat dalam pengembangan Sains dan Pendidikan MIPA.

Bogor, September 2014
Semirata-2014 Bidang MIPA BKS-PTN Barat

Dr.Ir. Sri Nurdiati, MSc.
Dekan FMIPA-IPB

Ence Darmo Jaya Supena
Ketua Panitia Pelaksana

Daftar Isi

	Halaman
Editor dan Reviewer	vii
Daftar Isi	ix
EFISIENSI ANTARWAKTU PERBANKAN SYARIAH DI INDONESIA MENGUNAKAN DATA ENVELOPMENT ANALYSIS DAN INDEKS MALMQUIST	
Andromeda Khoirunnisa, Toni Bakhtiar, Endar H Nugrahani	2
PERBANDINGAN WAKTU PENYELESAIAN MASALAH OPTIMALISASI LINEAR ANTARA METODE SIMPLEKS DAN METODE INTERIOR DENGAN MENGUNAKAN PERANGKAT LUNAK MATHEMATICA	
Bib Paruhum Silalahi, Rochmat Ferry Santo, Prapto Tri Supriyo	10
MOMEN TERTINGGI DARI AKUMULASI SUATU ANUITAS AWAL DENGAN TINGKAT BUNGA ACAK	
Johannes Kho dan Ari Fatmawati	19
PARALELISASI METODE CONJUGATE GRADIENT UNTUK MENYELESAIKAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR DALAM SCILAB MENGGUNAKAN GRAPHICS CARDS	
M. Ilyas, Putranto H., F. Ayatullah, M.T. Julianto, A.D. Garnadi dan S.Nurdiati	24
SOLUSI PROBLEM LINTASAN TERPENDEK PADA JARINGAN TRANSPORTASI MULTIMODA DENGAN DIJKSTRA-LIKE ALGORITHM STUDI KASUS PADA JARINGAN ANGKUTAN KOTA DI KOTA BENGKULU	
Novika Rachmianty Gartiwi, Fanani Haryo Widodo, Yulian Fauzi	33
MODEL MATEMATIKA DAN SIMULASI KOMPUTER DEMAM BERDARAH DENGUE	
Paian Sianturi	41
METODE ITERASI FORWARD MODEL DALAM MASALAH INVERSI RESISTIVITAS 3D, PERBANDINGAN UNIFORM VS OPTIMAL GRID	
Putranto Hadi Utomo, Agah D. Garnadi, H. Grandis, Sri Nurdiati	51
INVESTIGASI NUMERIK PROFIL KECEPATAN ALIRAN FLUIDA PADA SALURAN MIKRO PERSEGI-PANJANG	
Suharsono S	56
APLIKASI PETRI NET PADA PEMBELIAN DAN PEMBAYARAN TIKET PESAWAT	
Ulfasari Rafflesia	60
PEMODELAN TINGKAT RISIKO TSUNAMI KOTA BENGKULU MELALUI ANALISIS KRIGING	
Yulian Fauzi, Suwarsono, Jose Rizal, Zulfia Memi Mayasari	68
SIMULASI METODE WEBSTER DALAM PENGATURAN LAMPU LALU LINTAS	
Elis Khatizah, Delis Anisa	74

METODE NON-PARAMETRIK ANALISIS SURVIVAL DALAM MEMODELKAN SELANG KELAHIRAN ANAK PERTAMA DI INDONESIA Rahmat Hidayat, Hadi Sumarno, Endar H. Nugrahani	80
PROFIL SOFT SKILLS MAHASISWA PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN UNIVERSITAS RIAU Atma Murni, Nahor Murani Hutapea.....	90
PROBLEM POSING UNTUK MENINGKATKAN KEMAMPUAN PENALARAN DAN KOMUNIKASI MATEMATIS SISWA BERKEMAMPUAN AWAL RENDAH Dekson.....	98
PEMAHAMAN SISWA SMP LEVEL RELASIONAL DAN LEVEL ABSTRAK TENTANG BILANGAN RASIONAL Dewi Herawaty.....	106
MENINGKATKAN PEMAHAMAN KONSEP MATEMATIKA SISWA MELALUI PENERAPAN MODEL PEMBELAJARAN KOOPERATIF TIPE <i>THINK TALK WRITE</i> Dewi Murni, Dia Prima Juwita.....	112
PENGARUH MODEL PEMBELAJARAN GEOMETRI BERBASIS PENDIDIKAN MATEMATIKA REALISTIK TERHADAP RESPON DAN HASIL BELAJAR GEOMETRI SISWA KELAS VII SMPN KOTA PADANG Edwin Musdi	121
PENGARUH PENDEKATAN PENDIDIKAN MATEMATIKA REALISTIK INDONESIA (PMRI) TERHADAP PERKEMBANGAN KEMAMPUAN PENALARAN MATEMATIKA SISWA KELAS II SD KARTIKA 1.10 Effie Efrida Muchlis	132
PENERAPAN MODEL PEMBELAJARAN KOOPERATIF TIPE <i>TWO STAY TWO STRAY</i> UNTUK MENINGKATKAN HASIL BELAJAR MATEMATIKA PESERTA DIDIK KELAS VIII SMP NEGERI 18 PEKANBARU Elfis Suanto, Rini Dian Anggraini, Bisri Mustofa	141
MENINGKATKAN KEMAMPUAN MAHASISWA DALAM PEMECAHAN MASALAH PADA STATISTIKA ELEMENTER MELALUI LEMBAR KERJA Fitrani Dwina, Syafrandi.....	152
PENERAPAN PENDEKATAN SOMATIS, AUDITORI, VISUAL, DAN INTELEKTUAL PADA PEMBELAJARAN MATEMATIKA SISWA KELAS VIII SMP NEGERI 4 PAYAKUMBUH H. Yarman dan Putri Monika Sari	160
PENINGKATAN KEMAMPUAN KOMUNIKASI MATEMATIKA MELALUI PEMBERIAN TUGAS MERANCANG PETA KONSEP Hendra Syarifuddin	169
PENERAPAN STRATEGI PEMBELAJARAN BERBASIS INKUIRI DALAM PELAKSANAAN MATA KULIAH SISTEMATIKA TUMBUHAN TINGKAT RENDAH PADA MAHASISWA PROGRAM STUDI PENDIDIKAN BIOLOGI UNIVERSITAS RIAU	

Irda Sayuti.....	178
PENGUNAAN NOMOR BARIS BALOK DALAM PEMBELAJARAN KOOPERATIF MATEMATIKA PADA HASIL BELAJAR SISWA SDNDI PEKANBARU	
Jalinus, Jesi Alexander Alim.....	185
PENERAPAN PEMBELAJARAN INKUIRI MODEL ALBERTA UNTUK MENINGKATKAN KEMAMPUAN REPRESENTASI MATEMATIS MAHASISWA PADA MATA KULIAH KALKULUS I	
Kartini, Titi Solfitri.....	193
OPTIMALISASI PERKULIAHAN ALJABAR LINEAR I MENGGUNAKAN LEMBAR KERJA MAHASISWA (LKM) DAN PENILAIAN BERBASIS KOMPETENSI	
Mailizar.....	202
PENGEMBANGAN BAHAN AJAR BERORIENTASI PEMODELAN MATEMATIKA BERBASIS RME DI SMAN KOTA PADANG	
Media Rosha, Yerizon	211
PENERAPAN PENDEKATAN PEMBELAJARAN PENDIDIKAN MATEMATIKA REALISTIK TERHADAP KEMAMPUAN PEMECAHAN MASALAH MATEMATIS SISWA	
Minora Longgom Nasution, Mukhni, Nidaul Khairi.....	220
PENINGKATAN KEMAMPUAN PEMECAHAN MASALAH MAHASISWA PADA MATAKULIAH GEOMETRI BIDANG DAN RUANG DENGAN PENERAPAN STRATEGI STATEMENT AND REASON	
Mirna	227
STUDI KEMAMPUAN PENALARAN MATEMATIS SISWA KELAS XI IPA SMAN 2 PAINAN MELALUI PENERAPAN PEMBELAJARAN <i>THINK PAIR SQUARE</i>	
Mukhni, Jazwinarti, dan Nita Putri Utami.....	235
PENGARUH PEMBELAJARAN PENDEKATAN REALISTIK MATEMATIKA (RME) TERHADAP PENGETAHUAN KONSEP DAN PROSEDURAL DALAM PEMECAHAN MASALAH MATEMATIKA PADA TOPIK ARITMETIKA SOSIAL	
Putri Yuanita, Effandi Zakaria.....	243
PENERAPAN STRATEGI <i>CREATIVE PROBLEM SOLVING</i> PADA PELAKSANAAN PEMBELAJARAN <i>LESSON STUDY</i> UNTUK MENINGKATKAN KEMAMPUAN PEMECAHAN MASALAH DAN KOMUNIKASI MATEMATIKA MAHASISWA PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA UNIVERSITAS RIAU	
Rini Dian Anggraini , Putri Yuanita	252
UPAYA MENINGKATKAN KEMAMPUAN BERPIKIR KRITIS PESERTA DIDIK KELAS VIIIIF SMPN 18 PEKANBARU PADA PELAJARAN MATEMATIKA <i>TAHUN 2013/2014 MELALUI PENERAPAN MODEL PEMBELAJARAN KOOPERATIF PENDEKATAN STRUKTURAL TPS</i>	
Sakur; Suhermi,	261
PENGEMBANGAN RPP DAN HANDOUT BERBASIS METODE SQ3R PADA MATERI SISTEM PERSAMAAN LINIER DUA VARIABEL	

Sefna Rismen, Zulvikianis	271
EFEKTIFITAS PENERAPAN MODEL KOOPERATIF DENGAN MENGGUNAKAN ALAT PERAGA DALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKA DI SEKOLAH DASAR	
Sofnidar dan Sri Winarni.....	279
PENGEMBANGAN PERANGKAT PEMBELAJARAN MATEMATIKA SMP YANG BERBASIS GAYA BELAJAR <i>MASTERY, INTERPERSONAL, UNDERSTANDING, DAN SELF-EXPRESSIVE</i> PADA KELAS KECERDASAN MAJEMUK LOGIKA MATEMATIKA	
Suherman, Atus Amadi Putra, Muhammad Subhan	288
PENERAPAN MODEL PEMBELAJARAN KOOPERATIF TIPE <i>ROTATING TRIO EXCHANGE</i> (RTE) UNTUK MENINGKATKAN HASIL BELAJAR MATEMATIKA PADA SISWA KELAS XI IPA 2 SMA NEGERI 2 TAMBANG	
Susda Heleni, Japet Ginting, Miftakhul Jannah	295
KETERAMPILAN SOSIAL SISWA KELAS VIII-9 SMPN 8 PEKANBARU DALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKA MELALUI PENERAPAN MODEL KOOPERATIF PENDEKATAN STRUKTURAL <i>PAIR CHECK</i>	
Syarifah Nur Siregar, Kartini.....	304
PENGEMBANGAN MEDIA PEMBELAJARAN BERBASIS KOMPUTER MODEL TUTORIAL INTERAKTIF PADA POKOK BAHASAN BANGUN RUANG SISI LENGKUNG	
Titi Solfitri, Yenita Roza, Haninda Rachmawati.....	310
PEMAHAMAN MAHASISWA PENDIDIKAN MATEMATIKA TENTANG KONSEP FUNGSI DITINJAU BERDASARKAN DEKOMPOSISI GENETIKNYA	
Wahyu Widada	317
PENGEMBANGAN MEDIA PEMBELAJARAN BERBASIS KOMPUTER UNTUK MENGAJAR RELASI DAN FUNGSI DI SMP	
Yenita Roza, Yudi Jepri Dianta	329
PENGEMBANGAN CD (<i>COMPACT DISC</i>) INTERAKTIF DENGAN MACROMEDIA FLASH PADA PERKULIAHAN BAHASA INGGRIS UNTUK MATEMATIKA DI STKIP PGRI SUMATERA BARAT	
Anny Sovia, Rahima, Yulyanti Harisman	336
PENGARUH MODEL FIGURA DAN KEMAMPUAN AWAL TERHADAP HASIL BELAJAR GEOMETRI TRANSFORMASI MAHASISWA PENDIDIKAN MATEMATIKA FKIP UNIB	
Zamzaili.....	345
MENINGKATKAN KEMANDIRIAN BELAJAR MAHASISWA MELALUI PEMBELAJARAN GENERATIF PADA MATAKULIAH ALJABAR LINIER	
Zuhri, D	352
KEMAMPUAN GURU MENSTRUKTUR PEMBELAJARAN MATEMATIKA YANG DIAWALI DENGAN PEMBERIAN SOAL CERITA (PENELITIAN TINDAKAN DI SDN 004 RUMBAI PEKANBARU)	
Zulkarnain	363

KEMAMPUAN REPRESENTASI MATEMATIS MAHASISWA PADA MATA KULIAH KALKULUS PEUBAH BANYAK Yerizon.....	371
ANALISIS PENGETAHUAN METAKOGNITIF SISWA TIPE KEPERIBADIAN PHLEGMATIS DALAM MENYELESAIKAN SOAL MATERI LIMIT FUNGSI ALJABAR DI KELAS XI IPA SMA ISLAM ALFALAH KOTA JAMBI Dewi Iriani, Marni Zulyanty	377
ANALISIS KEMAMPUAN PEMECAHAN MASALAH MATEMATIS SISWA TIPE EKSTROVERT PADA MATERI FAKTORISASI SUKU ALJABAR DI KELAS VIII SMP Nizlel Huda, Lily Wahyuni Novika.....	384
ANALISIS MISKONSEPSI SISWA TIPE KOLERIS DALAM PEMECAHAN MASALAH MATEMATIKA PADA MATERI ALJABAR SISWA KELAS VIII SMP Yunidar, Roseli Theis	392
KONTRIBUSI KEGIATAN LESSON STUDY MATEMATIKA DALAM IMPLEMENTASI KURIKULUM 2013 DAN PENDIDIKAN BERBASIS KARAKTER Armia.....	400
PERANCANGAN PROTOTIPE AWAL BUKU KERJA KALKULUS BERBASIS PENEMUAN TERBIMBING Zulfaneti, Rina Febriana	408
PENGEMBANGAN TUGAS MATEMATIKA SEBAGAI ALAT UKUR PENALARAN DAN PEMAHAMAN KONSEP SISWA SEKOLAH MENENGAH ATAS Mukhtar, Muliawan Firdaus	416
MODEL REGRESI POISSON TERGENERALISASI DENGAN STUDI KASUS KECELAKAAN KENDARAAN BERMOTOR DI LALU LINTAS Irwan, Devni Prima Sari.....	423
KORELASI BEBERAPA ASPEK PROGRAM KELUARGA BERENCANA DI PUSAT KESEHATAN MASYARAKAT KELURAHAN SUKAMERINDU KOTA BENGKULU Syahrul Akbar	434
PENGARUH PEMBELAJARAN <i>CONNECTING, ORGANIZING, REFLECTING, EXTENDING</i> (CORE) TERHADAP KEMAMPUAN KOMUNIKASI MATEMATIS SISWA KELAS X SMAN 9 PADANG TAHUN PEMBELAJARAN 2013/2014 Jazwinarti, Suherman, Fadhilah Al Humaira	437
ESTIMASI TINGKAT KEMATIAN BAYI DAN HARAPAN HIDUP BAYI PROVINSI JAWA BARAT 2010 DENGAN MENGGUNAKAN METODE BRASS Ahmad Iqbal Baqi	446
PERANCANGAN MODEL ZONA TARIF BRT TRANS MUSI ZONE TARIFF DESIGN MODEL OF BRT TRANS MUSI A qilah Zainab, Sisca Octarina dan Putra BJ Bangun	452
SOLUSI POLINOMIAL PERSAMAAN DIFERENSIAL HERMIT YANG DIPERUMUM	

Aziskhan, Asmara Karma, Suriyaamsah	461
BEBERAPA SIFAT DARI JUMLAH YANG MEMUAT BILANGAN PELL-LUCAS	
Baki Swita, Zulfia Memimayasari, Sadiman Otami	467
PENJADWALAN OPTIMAL KAPAL PENYEBERANGAN: STUDI KASUS DI PELABUHAN MERAK DAN BAKAUHENI	
David Hendrayan, Prapto Tri Supriyo, Muhammad Ilyas.....	474
MODEL OPTIMASI PERSEDIAAN BIOSOLAR	
Defri Ahmad.....	485
APLIKASI ALGORITMA <i>CUTTING PLANE</i> DALAM PEWARNAAN GRAF	
Eddy Roflin, Sisca Octarina.....	492
UJI KESTABILAN SISTEM MANGSA-PEMANGSA	
Efendi.....	497
NILAI TUNAI ASURANSI JIWA DWIGUNA DENGAN METODE <i>NONFORFEITURE BENEFIT</i>	
Nurhasanah, Endang Sri Kresnawati, Des Alwine Zayanti.....	504
PENENTUAN LOKASI GUDANG DAN RUTE PENDISTRIBUSIAN MENGGUNAKAN <i>INTEGER PROGRAMMING</i>	
Ermi Rodita Hayati, Farida Hanum, Toni Bakhtiar	514
RING REGULER STABLE RANGE ONE PADA \mathbb{Z}_n	
Evi Yuliza	523
PEMODELAN MASALAH PENJADWALAN PERAWAT MENGGUNAKAN NONPREEMPTIVE GOAL PROGRAMMING: STUDI KASUS DI RUMAH SAKIT PERMATA BEKASI	
Ihsan Caisario, Farida Hanum, Toni Bakhtiar	528
MODEL OPTIMASI SKEMA PEMBIAYAAN INTERNET BERDASARKAN FUNGSI UTILITAS <i>PERFECT SUBSTITUTE</i>	
Indrawati, Irmeilyana, Fitri Maya Puspita and Clara Alverina Gozali.....	537
PENYELESAIAN MASALAH PENGOPTIMUMAN KUADRATIK YANG MEMUAT FAKTOR DISKON TERKENDALA SISTEM DESKRIPTOR LINEAR	
Muhafzan	546
BIFURKASI HOPF PADA MODEL MANGSA-PEMANGSA HOLLING-TANNER TIPE II	
Muhammad Buchari Gaib, Ali Kusnanto, Paian Sianturi.....	550
HIPERGRAF INTEGRAL HASIL OPERASI KALI KARTESIUS BIDANG FANO DAN HIPERGRAF 3-SERAGAM LENGKAP BERORDE 4	
Mulia Astuti	558
PENGARUH PROGRAM REHABILITASI TERHADAP DINAMIKA JUMLAH PEMAKAI NARKOBA DENGAN LAJU TRANSMISI NONLINIER	
Riry Sriningsih.....	565
PERBANDINGAN METODE BINOMIAL DENGAN <i>BLACK-SCHOLES</i> PADA PENENTUAN HARGA OPSI	

Sugandi Yahdin, Erwin, Syafriyanti	573
BILANGAN RAMSEY MULTIPARTIT UNTUK GRAF BINTANG DAN GRAF LINTASAN	
Syafrizal Sy	579
KLASIFIKASI DENGAN ANALISIS KOMPONEN UTAMA KERNEL	
Wirdania Ustaza, Siswadi, Toni Bakhtiar	582
PEMODELAN MATEMATIKA UNTUK OPTIMASI PROSES EVAKUASI DENGAN MODEL MAKROSKOPIK	
Zulfia Memi Mayasari	591
INDUKSI MATEMATIKA PADA FORMULA BINET (GENERALISASI BARISAN FIBONACCI)	
Syofni	597
BEBERAPA METODE ITERASI DENGAN TURUNAN KETIGA UNTUK MENYELESAIKAN PERSAMAAN NONLINEAR BESERTA DINAMIKNYA	
Zulkarnain, M. Imran	604
PENGENDALIAN TINGKAT PEMESANAN DAN PERSEDIAAN PADA MODEL INVENTORY	
Endang Lily, Harison, Dan M. Natsir	610
KARAKTERISASI SEBARAN <i>HALF-CAUCHY</i> DENGAN MENGGUNAKAN FUNGSI KARAKTERISTIK	
Dodi Devianto	614
PERSAMAAN GELOMBANG ELEKTROMAGNETIK DALAM BENTUK MEDAN LISTRIK SOLUSI MENGANDUNG FUNGSI BESSEL	
Leli Deswita	619
PENYELESAIAN VEHICLE ROUTING PROBLEM WITH SIMULTANEOUS PICK-UP AND DELIVERY SERVICE MENGGUNAKAN ALGORITME TABU SEARCH	
Syukrio Idaman, Farida Hanum, Prapto Tri Supriyo	626
EKSISTENSI DAN REPRESENTASI DARI INVERS GRUP UNTUK MATRIKS BLOK	
Musraini M, Asli Sirait, Rustam Efendi	635
PELABELAN TOTAL SISI AJAIB SUPER PADA GRAF <i>CORONA-LIKE UNICYCLIC</i>	
Rolan Pane, Asli Sirait, Kurniawan,	641
OPTIMASI PENJADWALAN ARMADA PESAWAT TERBANG: STUDI KASUS DI PT CITILINK INDONESIA	
Suzi Sehati, Amril Aman, Farida Hanum	647
KAJIAN MODEL MIKROSKOPIK PADA SISTEM LALU-LINTAS: SIMULASI DAN APLIKASINYA DI BOGOR	
Endar H. Nugrahani, Hadi Sumarno, Ali Kusnanto	655

BEBERAPA SIFAT DARI JUMLAH YANG MEMUAT BILANGAN PELL-LUCAS

SOME PROPERTIES OF THE SUM INVOLVING PELL-LUCAS NUMBERS

Baki Swita¹, Zulfia Memimayasari², Sadiman Otami³

Jurusan Matematika FMIPA Universitas Bengkulu^{1,2,3}
email: bswita@gmail.com

ABSTRACT

Pell numbers P_n are infinite sequences of integers defined by recurrence relation $P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}; n \geq 2; P_0 = 0; P_1 = 1$. Companion of this numbers are Pell-Lucas numbers Q_n defined by the same recurrence, with initial condition $Q_0 = Q_1 = 2$. For integers $n \geq 0$, defined the sum involving Pell-Lucas numbers $J_n = \sum_{k=1}^n Q_k; n \geq 1; J_0 = 0$. This research investigates some properties of J_n and $\sum_{k=0}^{2n} \sum Q_{2k+1}$ respectively for n even and non negative integers. The result shows that that J_n is the multiple of eight. For all integers $n \geq 0$, it also can be proved that $Q_{2n+1} \mid \sum_{k=0}^{2n} Q_{2k+1}$ and $S_{4n+1} \mid \sum_{k=0}^{2n} Q_{2k+1}$, where S_n is the sum of the first n Pell numbers which is not zero.

Key Words: Pell-Lucas numbers, The Sum Involving Pell-Lucas numbers

ABSTRAK

Bilangan Pell P_n merupakan barisan *infinite* dari bilangan bulat yang didefinisikan dengan relasi rekursi $P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}; n \geq 2; P_0 = 0; P_1 = 1$. Bilangan Pell-lucas Q_n merupakan *companion* dari bilangan Pell yang didefinisikan dengan relasi rekursi yang sama, dengan syarat awal $Q_0 = Q_1 = 2$. Untuk bilangan bulat $n \geq 0$, didefinisikan jumlah yang memuat bilangan Pell-Lucas $J_n = \sum_{k=1}^n Q_k; n \geq 1; J_0 = 0$. Penelitian ini menyelidiki sifat-sifat dari J_n dan $\sum_{k=0}^{2n} \sum Q_{2k+1}$ berturut-turut untuk n genap dan bilangan bulat tidak negatif. Hasil penelitian menunjukkan J_n kelipatan delapan. Hasil penelitian juga menunjukkan $\forall n \geq 0, Q_{2n+1} \mid \sum_{k=0}^{2n} Q_{2k+1}$ dan $S_{4n+1} \mid \sum_{k=0}^{2n} Q_{2k+1}$, di mana S_n adalah jumlah n bilangan Pell yang pertama yang tidak nol.

Kata kunci: Bilangan Pell-Lucas, Jumlah yang Memuat Bilangan Pell-Lucas

PENDAHULUAN

Penyelidikan sifat-sifat berbagai jenis bilangan bulat terus dilakukan oleh para peneliti, diantaranya adalah sifat-sifat Bilangan Fibonacci, Bilangan Pell, dan Bilangan Pell-Lucas. Bilangan Pell P_n merupakan barisan *infinite* dari bilangan bulat yang didefinisikan dengan relasi rekursi $P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}; n \geq 2, P_0 = 0, P_1 = 1$. Bilangan Pell-Lucas Q_n adalah *companion* dari bilangan Pell yang didefinisikan dengan relasi rekursi $Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2}; n \geq 2; Q_0 = Q_1 = 2$ [1]. Rumus eksplisit untuk Q_n dan P_n (yang dikenal dengan rumus Binet) diberikan oleh [2].

$$Q_n = \alpha^n + \beta^n; \quad \alpha = 1 + \sqrt{2}, \quad \beta = 1 - \sqrt{2} \quad (1)$$

$$P_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}; \text{ nilai } \alpha \text{ dan } \beta \text{ seperti pada Persamaan (1).}$$

Santana dan Barero [3] menyatakan jumlah dari n bilangan Pell pertama yang tidak nol dengan $S_n = P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n$. Beberapa sifat dari S_n dan $\sum P_n$ dapat ditemukan pada [3], diantaranya adalah

$$(*) S_n = \frac{\alpha^{n+1} + \beta^{n+1} - 2}{4}; \alpha = 1 + \sqrt{2}; \beta = 1 - \sqrt{2} \quad (2)$$

$$(**) \forall \text{ bilangan bulat tidak negatif } n \geq 0, P_{2n+1} \mid \sum_{k=0}^{2n} P_{2k+1} \text{ dan } P_{2n} \mid \sum_{k=0}^{2n} P_{2k-1}$$

Termotivasi dari [3], didefinisikan jumlah yang memuat Bilangan Pell-Lucas J_n sebagai berikut.

Definisi 1. Untuk bilangan bulat $n \geq 0, J_0 = 0, J_n = \sum_{k=1}^n Q_k; n \geq 1$.

Jumlah yang memuat Bilangan Pell-Lucas dengan indeks ganjil dinyatakan dengan $\sum Q_{2k+1}; k$ bilangan bulat tidak negatif. Jumlah yang memuat bilangan Pell-Lucas berhubungan dengan Deret

Geometri $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$. Jumlah parsial ke n dari Deret Geometri dinyatakan dengan $S_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1}$. Bila $r \neq 1$ diperoleh [4]

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \quad (3)$$

Penentuan bilangan Pell-Lucas dengan menggunakan Persamaan (1) melibatkan pemangkatan jumlah dua bilangan. Bila pangkat n cukup besar proses perhitungan akan lebih mudah menggunakan Teorema Binomial berikut [5].

Teorema Binomial. Untuk bilangan bulat positif $n \geq 1$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Untuk sembarang bilangan bulat k yang memenuhi $0 \leq k \leq n$,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Salah satu sifat dari bilangan yang sering diteliti adalah sifat keterbagian. Pengertian keterbagian dari suatu bilangan bulat dinyatakan pada definisi berikut [5].

Definisi 2. Sebuah bilangan bulat b dikatakan terbagi atau habis dibagi oleh bilangan bulat $a \neq 0$ jika terdapat bilangan bulat c sedemikian sehingga $b = ac$, ditulis $a|b$.

Misalkan n merupakan bilangan bulat positif tertentu, jika n membagi $a - b; a, b$ bilangan bulat, maka a dan b dikatakan kongruen modulo n , dinotasikan dengan $a \equiv b \pmod{n}$. Termotivasi dari hasil-hasil pada [3], tujuan dari penelitian ini adalah untuk menyelidiki sifat-sifat dari J_n dan sifat pembagian dari $\sum_{k=0}^{2n} Q_{2k+1}$.

2. METODE PENELITIAN

Langkah pertama yang dilakukan pada penelitian ini adalah menentukan beberapa nilai dari J_n, Q_n , dan S_n dengan bantuan komputer. Berdasarkan nilai-nilai tersebut dipelajari sifat-sifat yang ingin diteliti. Sifat-sifat yang diperoleh dibuktikan dengan metode pembuktian langsung (*direct proof*).

HASIL PENELITIAN

3.1 Hasil Utama

Proposisi 1. Untuk bilangan bulat positif $n \geq 1$, $J_n = \frac{1}{2}\sqrt{2}(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1} - 2\sqrt{2})$

Bukti. Dengan menggunakan Definisi (1) untuk $n \geq 1$, Persamaan (1) dan Persamaan (3) diperoleh

$$\begin{aligned} J_n &= Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots + Q_n \\ &= (\alpha^1 + \beta^1) + (\alpha^2 + \beta^2) + (\alpha^3 + \beta^3) + \dots + (\alpha^n + \beta^n) \\ &= \left(\frac{\alpha(1 - \alpha^n)}{1 - \alpha}\right) + \left(\frac{\beta(1 - \beta^n)}{1 - \beta}\right) = \frac{\alpha - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha} + \frac{\beta - \beta^{n+1}}{1 - \beta} \end{aligned}$$

Berdasarkan Persamaan (1), $1 - \alpha = -\sqrt{2}$, $1 - \beta = \sqrt{2}$ dan $\beta - \alpha = -2\sqrt{2}$ sehingga

$$\begin{aligned} J_n &= \frac{-\alpha^{n+1} + \alpha}{-\sqrt{2}} + \frac{\beta - \beta^{n+1}}{\sqrt{2}} = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1} + (\beta - \alpha)}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{2}(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1} - 2\sqrt{2}); n \geq 1 \blacksquare \end{aligned}$$

Beberapa nilai dari Q_n, J_n dan S_n yang dihitung dengan bantuan komputer dapat dilihat pada Tabel 1 berikut.

Tabel 1. Beberapa Nilai dari Q_n, J_n , dan S_n

n	Q_n	J_n	S_n	n	Q_n	J_n	S_n
1	2	2	1	16	1331714	2273376	803760
2	6	8	3	17	3215042	5488418	1940449
3	14	22	8	18	7761798	13250216	4684659
4	34	56	20	19	18738638	31988854	11309768
5	82	138	49	20	45239074	77227928	27304196
6	198	336	119	21	109216786	186444714	65918161
7	478	814	288	22	263672646	450117360	159140519
8	1154	1968	696	23	636562078	1086679438	384199200
9	2786	4754	1681	24	1536796802	2623476240	927538920
10	6726	11480	4059	25	3710155682	6333631922	2239277041
11	16238	27718	9800	26	8957108166	15290740088	5406093003
12	39202	66920	23660	27	21624372014	36915112102	13051463048
13	94642	161562	57121	28	52205852194	89120964296	31509019100
14	228486	390048	137903	29	126036076402	215157040698	76069501249
15	551614	941662	332928	30	304278004998	519435045696	183648021599

Tabel 1 menunjukkan bahwa untuk n genap dan $2 \leq n \leq 30$, J_n kelipatan delapan, seperti contoh berikut.

$$\begin{aligned} J_2 &= 8 & J_6 &= 336 = (42) \cdot (8) & J_{10} &= 11480 = (1435) \cdot (8) \\ J_4 &= 56 = (7) \cdot (8) & J_8 &= 1968 = (246) \cdot (8) & J_{12} &= 66920 = (8365) \cdot (8) \end{aligned}$$

Sifat ini akan dibuktikan benar untuk semua $n \geq 0$ dan genap pada Proposisi 2 berikut.

Proposisi 2. J_n kelipatan delapan bila n genap.

Bukti. Berdasarkan Proposisi 1, $J_n = \frac{1}{2}\sqrt{2}(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1} - 2\sqrt{2})$; $n \geq 1$. Dengan menggunakan

Persamaan (1) dan Teorema Binomial diperoleh

$$\begin{aligned}\alpha^{n+1} &= (1 + \sqrt{2})^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (\sqrt{2})^k \\ &= \binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} (\sqrt{2}) + \binom{n+1}{2} (\sqrt{2})^2 + \binom{n+1}{3} (\sqrt{2})^3 + \dots + \binom{n+1}{n+1} (\sqrt{2})^{n+1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta^{n+1} &= \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} (-\sqrt{2})^k \\ &= \binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} (-\sqrt{2}) + \binom{n+1}{2} (-\sqrt{2})^2 + \dots + \binom{n+1}{n+1} (-\sqrt{2})^{n+1}\end{aligned}$$

Karena n genap maka,

$$\alpha^{n+1} - \beta^{n+1} = (n+1)2\sqrt{2} + 2\binom{n+1}{3}2\sqrt{2} + 2\binom{n+1}{5}2^2\sqrt{2} + \dots + 2\binom{n+1}{n+1}2^{n/2}\sqrt{2}$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}J_n &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left((n+1)2\sqrt{2} + 2\binom{n+1}{3}2\sqrt{2} + 2\binom{n+1}{5}2^2\sqrt{2} + \dots + 2\binom{n+1}{n+1}2^{n/2}\sqrt{2} - 2\sqrt{2} \right) \\ &= 2n + \binom{n+1}{3}4 + \binom{n+1}{5}8 + \binom{n+1}{7}16 + \dots + \binom{n+1}{n+1}2^{\frac{n+2}{2}}\end{aligned}$$

Untuk $n = 2$, maka diperoleh $J_n = 4 + \binom{3}{3}4 = 8$

Untuk $n > 2$ dan genap, maka diperoleh

$$\begin{aligned}J_n &= 2n + \binom{n+1}{3}4 + 8t = 2n + \frac{4(n+1)(n)(n-1)}{3!} + 8t; t \text{ bilangan bulat positif} \\ &= \frac{8n+4n^3}{6} + 8t = \frac{8(2k)+4(2k)^3}{6} + 8t = 8\left(\frac{2k+k^3}{6}\right) + 8t; k \text{ bilangan bulat positif} \\ &= 8s + 8t = 8j; \text{ di mana } s = \frac{2k+k^3}{6} \text{ dan } j = s + t \text{ adalah bilangan bulat positif} \blacksquare\end{aligned}$$

Dengan menggunakan nilai yang terdapat pada Tabel 1, diperoleh

$$Q_3 = 14 \text{ membagi } Q_1 + Q_3 + Q_5 = 98$$

$$Q_5 = 82 \text{ membagi } Q_1 + Q_3 + Q_5 + Q_7 + Q_9 = 3362$$

$$Q_7 = 478 \text{ membagi } Q_1 + Q_3 + Q_5 + Q_7 + Q_9 + Q_{11} + Q_{13} = 114242$$

$$Q_9 = 2786 \text{ membagi } Q_1 + Q_3 + Q_5 + Q_7 + Q_9 + Q_{11} + Q_{13} + Q_{15} + Q_{17} = 3880898$$

Data ini memberikan indikasi bahwa Q_{2n+1} membagi $\sum_{k=0}^{2n} Q_{2k+1}$. Proposisi 3 berikut menunjukkan bahwa sifat ini benar untuk semua bilangan bulat tidak negatif.

Proposisi 3. \forall bilangan bulat $n \geq 0$, berlaku

$$Q_{2n+1} \mid \sum_{k=0}^{2n} Q_{2k+1}$$

Bukti. Dengan menggunakan Persamaan (1) dan (3) diperoleh

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2n} Q_{2k+1} &= Q_1 + Q_3 + Q_5 + \dots + Q_{4n+1} \\ &= (\alpha^1 + \beta^1) + (\alpha^3 + \beta^3) + (\alpha^5 + \beta^5) + \dots + (\alpha^{4n+1} + \beta^{4n+1}) \\ &= (\alpha^1 + \alpha^3 + \alpha^5 + \dots + \alpha^{4n+1}) + (\beta^1 + \beta^3 + \beta^5 + \dots + \beta^{4n+1}) \\ &= \frac{\alpha((\alpha^2)^{2n+1} - 1)}{\alpha^2 - 1} + \frac{\beta((\beta^2)^{2n+1} - 1)}{\beta^2 - 1} \\ &= \frac{\alpha(\alpha^{4n+2} - 1)}{\alpha^2 - 1} + \frac{\beta(\beta^{4n+2} - 1)}{\beta^2 - 1} = \frac{\alpha^{4n+3} - \alpha}{2\alpha} + \frac{\beta^{4n+3} - \beta}{2\beta} \end{aligned}$$

Karena $\alpha^2 - 1 = 2\alpha$, $\beta^2 - 1 = 2\beta$ dan $\alpha\beta = -1$ diperoleh

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2n} Q_{2k+1} &= \frac{\alpha^{4n+2} - 1}{2} + \frac{\beta^{4n+2} - 1}{2} = \frac{1}{2}(\alpha^{4n+2} + \beta^{4n+2} - 2) \\ &= \frac{1}{2}(\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1})^2 = \frac{1}{2}(\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1})Q_{2n+1} \end{aligned}$$

Karena $\frac{1}{2}(\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1})$ bilangan bulat, maka menurut Definisi 2, $Q_{2n+1} \mid \sum_{k=0}^{2n} Q_{2k+1}$ ■

Berdasarkan nilai-nilai pada Tabel 1 juga dapat diperoleh informasi berikut.

$$Q_1 + Q_3 + Q_5 = 2 + 14 + 82 = 98 = 2(49) = 2(S_5)$$

$$Q_1 + Q_3 + Q_5 + Q_7 + Q_9 = 2 + 14 + 82 + 478 + 2786 = 3362 = 2(1681) = 2(S_9)$$

$$Q_1 + Q_3 + Q_5 + Q_7 + Q_9 + Q_{11} + Q_{13} = 114242 = 2(57121) = 2(S_{13})$$

$$Q_1 + Q_3 + Q_5 + Q_7 + Q_9 + Q_{11} + Q_{13} + Q_{15} + Q_{17} = 3880898 = 2(1940449) = 2(S_{17})$$

Sifat ini menunjukkan $S_{4n+1} \mid \sum_{k=0}^{2n} Q_{2k+1}$ yang akan dibuktikan benar untuk semua bilangan bulat tidak negative pada Proposisi 4 berikut.

Proposisi 4. \forall bilangan bulat $n \geq 0$, berlaku

$$S_{4n+1} \mid \sum_{k=0}^{2n} Q_{2k+1} \cdot$$

Bukti: Dengan menggunakan Persamaan (1), (2), (3), dan $\alpha^2 - 1 = 2\alpha$ dan $\beta^2 - 1 = 2\beta$ diperoleh:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2n} Q_{2k+1} &= Q_1 + Q_3 + Q_5 + \dots + Q_{4n+1} \\ &= (\alpha^1 + \beta^1) + (\alpha^3 + \beta^3) + (\alpha^5 + \beta^5) + \dots + (\alpha^{4n+1} + \beta^{4n+1}) \\ &= (\alpha^1 + \alpha^3 + \alpha^5 + \dots + \alpha^{4n+1}) + (\beta^1 + \beta^3 + \beta^5 + \dots + \beta^{4n+1}) \\ &= \frac{\alpha((\alpha^2)^{2n+1} - 1)}{\alpha^2 - 1} + \frac{\beta((\beta^2)^{2n+1} - 1)}{\beta^2 - 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\alpha(\alpha^{4n+2} - 1)}{\alpha^2 - 1} + \frac{\beta(\beta^{4n+2} - 1)}{\beta^2 - 1} \\
&= \left(\frac{\alpha^{4n+3} - \alpha}{2\alpha} + \frac{\beta^{4n+3} - \beta}{2\beta} \right) \\
&= \left(\frac{\alpha^{4n+2} - 1}{2} + \frac{\beta^{4n+2} - 1}{2} \right) \\
&= \left(\frac{\alpha^{4n+2} + \beta^{4n+2} - 2}{2} \right) = 2 \left(\frac{\alpha^{4n+2} + \beta^{4n+2} - 2}{4} \right) = 2 \cdot S_{4n+1}.
\end{aligned}$$

berarti $S_{4n+1} \mid \sum_{k=0}^{2n} Q_{2k+1}$ ■

Bila $n \equiv 1 \pmod{4}$, pada Tabel 1 dapat dilihat bahwa J_{2n+3} adalah kelipatan 3, sebagai contoh $J_5 = 138 = (46) \cdot (3)$, $J_{13} = 161562 = (53854) \cdot (3)$, $J_{21} = 186444714 = (62148238) \cdot (3)$, $J_{29} = 215157040698 = (71719013566) \cdot (3)$. Namun sifat ini belum dapat dibuktikan secara analitik. Berikut adalah hasil penyelidikan yang relevan.

3.2 Hasil yang Relevan

Jika $n \equiv 1 \pmod{4}$, maka $J_{2n+3} = J_{8s+5} = 10 + 16s + \sum_{j=0}^{4s+1} \binom{8s+6}{2j+3} 2^{j+2}; s \geq 0$

Bukti.

Berdasarkan Proposisi 1 $J_{2n+3} = \frac{1}{2} \sqrt{2} (\alpha^{2n+4} - \beta^{2n+4} - 2\sqrt{2}); n \geq 1$. Dengan

menggunakan Persamaan (1) dan Teorema Binomial diperoleh

$$\begin{aligned}
\alpha^{2n+4} &= \binom{2n+4}{0} + \binom{2n+4}{1} \sqrt{2} + \binom{2n+4}{2} (\sqrt{2})^2 + \dots + \binom{2n+4}{2n+4} (\sqrt{2})^{2n+4} \\
\beta^{2n+4} &= \binom{2n+4}{0} + \binom{2n+4}{1} (-\sqrt{2}) + \binom{2n+4}{2} (-\sqrt{2})^2 + \dots + \binom{2n+4}{2n+4} (-\sqrt{2})^{2n+4} \\
\alpha^{2n+4} - \beta^{2n+4} &= \binom{2n+4}{1} 2\sqrt{2} + \binom{2n+4}{3} 2^2 \sqrt{2} + \binom{2n+4}{5} 2^3 \sqrt{2} + \dots + \binom{2n+4}{2n+3} 2^{\frac{2n+4}{2}} \sqrt{2}
\end{aligned}$$

sehingga

$$J_{2n+3} = 4n + 6 + \binom{2n+4}{3} 2^2 + \binom{2n+4}{5} 2^3 + \dots + \binom{2n+4}{2n+3} 2^{n+2}$$

Ambil $n \equiv 1 \pmod{4}$, maka $n = 4s + 1; s \geq 0$, sehingga

$$\begin{aligned}
J_{2n+3} &= J_{8s+5} = 4(4s+1) + 6 + \binom{8s+6}{3} 2^2 + \binom{8s+6}{5} 2^3 + \dots + \binom{8s+6}{8s+5} 2^{4s+3} \\
&= 10 + 16s + \sum_{j=0}^{4s+1} \binom{8s+6}{2j+3} 2^{j+2}; s \geq 0.
\end{aligned}$$

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil penelitian yang telah dilakukan diperoleh tiga sifat jumlah yang memuat bilangan Pell-Lucas seperti yang telah dibuktikan pada Proposisi 2, 3, dan 4. Sifat J_n , khususnya apakah J_{2n+3} merupakan kelipatan 3 bila $n \equiv 1 \pmod{4}$ masih terbuka untuk diteliti.

PUSTAKA

- [1] Cerin Z, Gianella, GM. 2006. On Sums of Square of Pell-Lucas Numbers. *Electronic Journal of Combinatorial Number Theory* 6. Diakses tanggal 23 Desember 2012.
- [2] Dasedmir, A. 2011. On the Pell, Pell-Lucas and Modified Pell Numbers By Matrix Method. *Applied Mathematical Sciences* 64(5): 3173-3181. Diakses tanggal 22 Desember 2012.
- [3] Santana SF, Barrero. 2006. Some Properties of Sum Involving Pell Numbers. *Missouri Journal of Mathematical Sciences Articles*, 18(1). The Fourth Articles.
- [4] Purcell EJ, Vanberg D. and Rigdon S.E. 2003. *Calculus*. Prentice Hall.
- [5] Burton DM. 2002. *Elementary Number Theory*. University of New Hampshire. Mc Graw Hill.