
# PROSIDING

## SEMIRATA 2014
## Bidang MIPA BKS-PTN-Barat

"Integrasi sains MIPA untuk mengatasi masalah pangan, energi, kesehatan, reklamasi, dan lingkungan"

IPB International Convention Center dan Kampus IPB Baranangsiang, 9-11 Mei 2014

**BUKU 1**

# MATEMATIKA

Diterbitkan oleh: Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Pertanian Bogor

ISBN 978-602-70491-0-9

2014

Semirata

Bidang MIPA

ISBN : 978-602-70491-0-9

# PROSIDING

## Seminar Nasional dan Rapat Tahunan Bidang MIPA 2014

"Integrasi Sains MIPA untuk Mengatasi Masalah Pangan, Energi, Kesehatan, Lingkungan, dan Reklamasi"

Diterbitkan Oleh :

**Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**
**Institut Pertanian Bogor**

Prosiding Seminar Nasional dan Rapat Tahunan Bidang MIPA 2014, 9-11 Mei 2014
Diterbitkan oleh : FMIPA-IPB, Jalan Meranti Kampus IPB Dramaga, Bogor 16680
Telp/Fax: 0251-8625481/8625708
http://fmipa.ipb.ac.id
Terbit Oktober, 2014
xiii + 662 halaman
ISBN: 978-602-70491-0-9

Editor dan Reviewer

# PROSIDING

## Seminar Nasional dan Rapat Tahunan Bidang MIPA 2014

**Direktor Editor**

- Drs. Ali Kusnanto, MSi.
- Dr. Heru Sukoco
- Dr. Wisnu Ananta Kusuma
- Dr. Imas Sukaesih Sitanggang
- Auzi Asfarian, M.Kom
- Wulandari, S.Komp
- Dean Apriana Ramadhan, S.Komp

**Editor Utama**

- Dr. Rika Raffiudin
- Dr. Ence Darmo Jaya Supena
- Dr. Utut Widyastuti
- Prof. Dr. Purwantiningsih
- Dr. Tony Ibnu Sumaryada
- Dr. Imas Sukaesih Sitanggang
- Dr. Wisnu Ananta Kusuma
- Dr. drh. Sulistyani, MSc.
- Dr. Indahwati
- Dr. Sobri Effendi
- Drs. Ali Kusnanto, MSi.

***Reviewer***

- Drs. Ali Kusnanto, M Si.
- Dr. Berlian Setiawaty, MS
- Dr.Ir. I Gusti Putu Purnaba, DEA
- Dr. Paian Sianturi
- Prof.Dr.Ir. I Wayan Mangku, M.Sc
- Dr. Toni Bakhtiar, M.Sc
- Dr. Jaharuddin, MS
- Dr.Ir. Hadi Sumarno, MS

## KATA PENGANTAR

Kegiatan Seminar dan Rapat Tahunan Bidang MIPA tahun 2014 (Semirata-2014 Bidang MIPA) Badan Kerja Sama Perguruan Tinggi Negeri Wilayah Barat (BKS-PTN Barat) yang diamanahkan kepada FMIPA-IPB sebagai penyelenggara telah dilaksanakan dengan sukses pada tanggal 9-11 Mei 2014 di IPB International Convention Center dan Kampus IPB Baranagsiang, Bogor. Salah satu program utama adalah Seminar Nasional Sains dan Pendidikan MIPA dengan tema: *"Integrasi sains MIPA untuk mengatasi masalah pangan, energi, kesehatan, dan lingkungan".*

Dalam sesi pleno seminar telah disampaikan pemaparan materi oleh satu pembicara utama dan empat pembicara undangan yang berasal dari beragam institusi dan profesi. Dari sesi pleno ini, diharapkan peserta dapat menambah wawasan dan pemahaman tentang pengembangan dan pemanfatan IPTEK, khususnya Bidang MIPA, sehingga sains dan pendidikan MIPA terus berkembang dan dapat berkontribusi nyata untuk kemajuan dan kemakmuran bangsa Indonesia.

Kegiatan yang tidak kalah pentingnya dalam seminar ini adalah sesi paralel karena telah memberi kesempatan kepada peserta untuk melakukan presentasi dan komunikasi ilmiah secara langsung dengan sesama kolega yang mempunyai minat yang sama dalam mengembangkan Sains dan atau Pendidikan MIPA. Dalam kegiatan sesi paralel ini dipresentasikan secara oral 592 judul makalah hasil penelitian yang disampaikan dalam 37 ruang seminar secara paralel, dan juga dipresentasikan 120 poster ilmiah. Dalam kegiatan komunikasi ilmiah secara langsung ini juga telah dimanfaatkan untuk menjalin jejaring agar lebih bersinergi dalam pengembangan Sains dan Pendidikan MIPA ke depannya. Supaya komunikasi ilmiah yang baik ini dapat juga tersampaikan ke komunitas ilmiah lain yang tidak dapat hadir pada kegiatan seminar, panitia memfasilitasi untuk menerbitkan makalah dalam bentuk **Prosiding**. Panitia juga tetap memberi kesempatan kepada peserta yang akan menerbitkan makalahnya di jurnal ilmiah, sehingga tidak seluruh materi yang disampaikan pada seminar diterbitkan dalam prosiding ini.

Dalam proses penerbitan prosiding ini, panitia telah banyak dibantu oleh Tim Reviewer dan Tim Editor yang dikoordinir oleh Ali Kusnanto yang telah dengan sangat intensif mencurahkan waktu, tenaga dan pikiran. Untuk itu, panitia menyampaikan terima kasih dan penghargaan. Panitia juga menyampaikan terima kasih dan penghargaan kepada seluruh penulis makalah yang telah merespon dengan baik hasil review artikelnya. Namun, panitia juga menyampaikan permohonan ma'af karena dengan sangat banyaknya makalah yang akan diterbitkan dalam prosiding ini, waktu yang dibutuhkan dalam proses penerbitan prosiding ini mencapai lebih dari empat bulan, dan penerbitan prosiding tidak dilakukan dalam satu buku tetapi dalam tujuh buku prosiding. Semoga penerbitan prosiding ini selain bermanfaat bagi para pemakalah dan penulis, juga dapat bermanfaat dalam pengembangan Sains dan Pendidikan MIPA.

Bogor, September 2014
Semirata-2014 Bidang MIPA BKS-PTN Barat

| | |
|---|---|
| Dr.Ir. Sri Nurdiati, MSc. | Ence Darmo Jaya Supena |
| Dekan FMIPA-IPB | Ketua Panitia Pelaksana |

## Daftar Isi

**Halaman**

## BEBERAPA SIFAT DARI JUMLAH YANG MEMUAT BILANGAN PELL-LUCAS

## SOME PROPERTIES OFTHE SUM INVOLVING PELL-LUCAS NUMBERS

**Baki Swita** [1] **, Zulfia Memimayasari** [2] **, Sadiman Otami** [3]

Jurusan Matematika FMIPA Universitas Bengkulu [1,2,3]
email: bswita@ymail.com

### ABSTRACT

Pell numbers $P_n$ are infinite sequences of integers defined by recurrence relation $P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}; n \geq 2;\ P_0 = 0;\ P_1 = 1$. Companion of this numbers are Pell-Lucas numbers $Q_n$ defined by the same recurrence, with initial condition $Q_0 = Q_1 = 2$. For integers $n \geq 0$, defined the sum involving Pell-Lucas numbers $J_n = \sum_{k=1}^{n} Q_k\ ; n \geq 1;\ J_0 = 0$. This research investigates some properties of $J_n$ and $\sum_{k=0}^{2n} \sum Q_{2k+1}$ respectively for $n$ even and non negative integers. The result shows that that $J_n$ is the multiple of eight. For all integers $n \geq 0$, it also can be proved that $Q_{2n+1} \mid \sum_{k=0}^{2n} Q_{2k+1}$ and $S_{4n+1} \mid \sum_{k=0}^{2n} Q_{2k+1}$, where $S_n$ is the sum of the first $n$ Pell numbers which is not zero.

*Key Words: Pell-Lucas numbers, The Sum Involving Pell-Lucas numbers*

### ABSTRAK

Bilangan Pell $P_n$ merupakan barisan *infinite* dari bilangan bulat yang didefinisikan dengan relasi rekursi $P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}; n \geq 2;\ P_0 = 0;\ P_1 = 1$. Bilangan Pell-lucas $Q_n$ merupa kan *companion* dari bilangan Pell yang didefinisikan dengan relasi rekursi yang sama, dengan syarat awal $Q_0 = Q_1 = 2$. Untuk bilangan bulat $n \geq 0$, didefinisikan jumlah yang memuat bilangan Pell-Lucas $J_n = \sum_{k=1}^{n} Q_k\ ; n \geq 1;\ J_0 = 0$. Penelitian ini menyelidiki sifat-sifat dari $J_n$ dan $\sum_{k=0}^{2n} \sum Q_{2k+1}$ berturut-turut untuk $n$ genap dan bilangan bulat tidak negatif. Hasil penelitian menunjukkan $J_n$ kelipatan delapan. Hasil penelitian juga menunjukkan $\forall n \geq 0$, $Q_{2n+1} \mid \sum_{k=0}^{2n} Q_{2k+1}$ dan $S_{4n+1} \mid \sum_{k=0}^{2n} Q_{2k+1}$ , di mana $S_n$ adalah jumlah $n$ bilangan Pell yang pertama yang tidak nol.

*Kata kunci: Bilangan Pell-Lucas, Jumlah yang Memuat Bilangan Pell-Lucas*

### PENDAHULUAN

Penyelidikan sifat-sifat berbagai jenis bilangan bulat terus dilakukan oleh para peneliti, diantaranya adalah sifat-sifat Bilangan Fibonacci, Bilangan Pell, dan Bilangan Pell-Lucas. Bilangan Pell $P_n$ merupakan barisan *infinite* dari bilangan bulat yang didefinisikan dengan relasi rekursi $P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}; n \geq 2, P_0 = 0, P_1 = 1$. Bilangan Pell-Lucas $Q_n$ adalah *companion* dari bilangan Pell yang didefinisikan dengan relasi rekursi $Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2}; n \geq 2;\ \ Q_0 = Q_1 = 2$ [1]. Rumus eksplisit untuk $Q_n$ dan $P_n$ (yang dikenal dengan rumus Binet) diberikan oleh [2].

$$Q_n = \alpha^n + \beta^n; \qquad \alpha = 1 + \sqrt{2}, \qquad \beta = 1 - \sqrt{2} \tag{1}$$

$P_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$; nilai $\alpha$ dan $\beta$ seperti pada Persamaan (1).

Santana dan Barero [3] menyatakan jumlah dari *n* bilangan Pell pertama yang tidak nol dengan $S_n = P_1 + P_2 + P_3 + \ldots + P_n$. Beberapa sifat dari $S_n$ dan $\sum P_n$ dapat dite mukan pada [3], diantaranya adalah

(*) $S_n = \dfrac{\alpha^{n+1} + \beta^{n+1} - 2}{4}$; $\alpha = 1 + \sqrt{2}$; $\beta = 1 - \sqrt{2}$ (2)

(**) $\forall$ bilangan bulat tidak negatif $n \geq 0, P_{2n+1} \mid \sum_{k=0}^{2n} P_{2k+1}$ dan $P_{2n} \mid \sum_{k=0}^{2n} P_{2k-1}$

Termotivasi dari [3], didefinisikan jumlah yang memuat Bilangan Pell-Lucas $J_n$ sebagai berikut.

**Definisi 1.** Untuk bilangan bulat $\mathrm{n} \geq 0$, $\mathrm{J}_0 = 0, \mathrm{J}_\mathrm{n} = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{Q}_\mathrm{k}$ ; $\mathrm{n} \geq 1$.

Jumlah yang memuat Bilangan Pell-Lucas dengan indeks ganjil dinyatakan dengan $\sum Q_{2k+1}; k$ bilangan bulat tidak negatif. Jumlah yang memuat bilangan Pell-Lucas berhubungan dengan Deret Geometri $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$. Jumlah parsial ke $n$ dari Deret Geometri dinyatakan dengan $S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$. Bila $r \neq 1$ diperoleh [4]

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \tag{3}$$

Penentuan bilangan Pell-Lucas dengan menggunakan Persamaan (1) melibatkan pemangkatan jumlah dua bilangan. Bila pangkat $n$ cukup besar proses perhitungan akan lebih mudah menggunakan Teorema Binomial berikut [5].

**Teorema Binomial.** Untuk bilangan bulat positif $n \geq 1$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Untuk sembarang bilangan bulat $k$ yang memenuhi $0 \leq k \leq n$,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Salah satu sifat dari bilangan yang sering diteliti adalah sifat keterbagian. Pengertian keterbagian dari suat bilangan bulat dinyatakan pada definisi berikut [5].

**Definisi 2.** Sebuah bilangan bulat $b$ dikatakan terbagi atau habis dibagi oleh bilangan bulat $\mathrm{a} \neq 0$ jika terdapat bilangan bulat $c$ sedemikian sehingga $b = ac$, ditulis $\mathrm{a|b}$.

Misalkan *n* merupakan bilangan bulat positif tertentu, jika $n$ membagi $a - b; a, b$ bilangan bulat, maka $a$ dan $b$ dikatakan kongruen modulo *n*, dinotasikan dengan $a \equiv \mathrm{b} (\mathrm{mod\ n})$. Termotivasi dari hasi-hasill pada [3], tujuan dari penelitian ini adalah untuk menyelidiki sifat-sifat dari $J_n$ dan sifat pembagian dari $\sum_{k=0}^{2n} Q_{2k+1}$ .

## 2. METODE PENELITIAN

Langkah pertama yang dilakukan pada penelitian ini adalah menentukan beberapa nilai dari $J_n, Q_n$, dan $S_n$ dengan bantuan komputer. Berdasarkan nilai-nilai tersebut dipelajari sifat-sifat yang ingin diteliti. Sifat-sifat yang diperoleh dibuktikan dengan metode pembuktian langsung (*direct proof*).

## HASIL PENELITIAN

### 3.1 Hasil Utama

**Proposisi 1.** Untuk bilangan bulat positif $n \geq 1, J_n = \frac{1}{2}\sqrt{2}\left(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1} - 2\sqrt{2}\right)$

**Bukti.** Dengan menggunakan Definisi (1) untuk $n \geq 1$, Persamaan (1) dan Persamaan (3) diperoleh

$$
\begin{aligned}
J_n &= Q_1 + Q_2 + Q_3 + \cdots + Q_n \\
&= (\alpha^1 + \beta^1) + (\alpha^2 + \beta^2) + (\alpha^3 + \beta^3) + \cdots + (\alpha^n + \beta^n) \\
&= \left(\frac{\alpha(1-\alpha^n)}{1-\alpha}\right) + \left(\frac{\beta(1-\beta^n)}{1-\beta}\right) = \frac{\alpha - \alpha^{n+1}}{1-\alpha} + \frac{\beta - \beta^{n+1}}{1-\beta}
\end{aligned}
$$

Berdasarkan Persamaan (1), $1 - \alpha = -\sqrt{2}, 1 - \beta = \sqrt{2}$ dan $\beta - \alpha = -2\sqrt{2}$ sehingga

$$J_n = \frac{-\alpha^{n+1} + \alpha}{-\sqrt{2}} + \frac{\beta - \beta^{n+1}}{\sqrt{2}} = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1} + (\beta - \alpha)}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2}\left(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1} - 2\sqrt{2}\right); n \geq 1 \blacksquare$$

Beberapa nilai dari $Q_n, J_n$ dan $S_n$ yang dihitung dengan bantuan komputer dapat dilihat pada Tabel 1 berikut.

**Tabel 1. Beberapa Nilai dari $Q_n, J_n$, dan $S_n$**

| $n$ | $Q_n$ | $J_n$ | $S_n$ | $n$ | $Q_n$ | $J_n$ | $S_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 | 1 | 16 | 1331714 | 2273376 | 803760 |
| 2 | 6 | 8 | 3 | 17 | 3215042 | 5488418 | 1940449 |
| 3 | 14 | 22 | 8 | 18 | 7761798 | 13250216 | 4684659 |
| 4 | 34 | 56 | 20 | 19 | 18738638 | 31988854 | 11309768 |
| 5 | 82 | 138 | 49 | 20 | 45239074 | 77227928 | 27304196 |
| 6 | 198 | 336 | 119 | 21 | 109216786 | 186444714 | 65918161 |
| 7 | 478 | 814 | 288 | 22 | 263672646 | 450117360 | 159140519 |
| 8 | 1154 | 1968 | 696 | 23 | 636562078 | 1086679438 | 384199200 |
| 9 | 2786 | 4754 | 1681 | 24 | 1536796802 | 2623476240 | 927538920 |
| 10 | 6726 | 11480 | 4059 | 25 | 3710155682 | 6333631922 | 2239277041 |
| 11 | 16238 | 27718 | 9800 | 26 | 8957108166 | 15290740088 | 5406093003 |
| 12 | 39202 | 66920 | 23660 | 27 | 21624372014 | 36915112102 | 13051463048 |
| 13 | 94642 | 161562 | 57121 | 28 | 52205852194 | 89120964296 | 31509019100 |
| 14 | 228486 | 390048 | 137903 | 29 | 126036076402 | 215157040698 | 76069501249 |
| 15 | 551614 | 941662 | 332928 | 30 | 304278004998 | 519435045696 | 183648021599 |

Tabel 1 menunjukkan bahwa untuk $n$ genap dan $2 \leq n \leq 30$, $J_n$ kelipatan delapan, seperti contoh berikut.

$J_2 = 8$ $\quad$ $J_6 = 336 = (42).\ (8)$ $\quad$ $J_{10} = 11480 = (1435).(8)$

$J_4 = 56 = (7).\ (8)$ $\quad$ $J_8 = 1968 = (246).(8)$ $\quad$ $J_{12} = 66920 = (8365).(8)$

Sifat ini akan dibuktikan benar untuk semua $n \geq 0$ dan genap pada Proposisi 2 berikut.

**Proposisi 2**. $J_n$ kelipatan delapan bila $n$ genap.

**Bukti.** Berdasarkan Proposisi 1, $J_n = \frac{1}{2}\sqrt{2}\left(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1} - 2\sqrt{2}\right);\ n \geq 1$. Dengan mengguna kan Persamaan (1) dan Teorema Binomial diperoleh

$$\propto^{n+1} = (1+\sqrt{2})^{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (\sqrt{2})^k$$

$$= \binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} (\sqrt{2}) + \binom{n+1}{2} (\sqrt{2})^2 + \binom{n+1}{3} (\sqrt{2})^3 + \dots + \binom{n+1}{n+1} (\sqrt{2})^{n+1}$$

$$\beta^{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{k} (-\sqrt{2})^k$$

$$= \binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} (-\sqrt{2}) + \binom{n+1}{2} (-\sqrt{2})^2 + \dots + \binom{n+1}{n+1} (-\sqrt{2})^{n+1}$$

Karena $n$ genap maka,

$$\alpha^{n+1} - \beta^{n+1} = (n+1)2\sqrt{2} + 2\binom{n+1}{3} 2\sqrt{2} + 2\binom{n+1}{5} 2^2\sqrt{2} + \dots + 2\binom{n+1}{n+1} 2^{n/2}\sqrt{2}$$

sehingga diperoleh

$$J_n = \frac{\sqrt{2}}{2}\left((n+1)2\sqrt{2} + 2\binom{n+1}{3} 2\sqrt{2} + 2\binom{n+1}{5} 2^2\sqrt{2} + \dots + 2\binom{n+1}{n+1} 2^{n/2}\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\right)$$

$$= 2n + \binom{n+1}{3} 4 + \binom{n+1}{5} 8 + \binom{n+1}{7} 16 + \dots + \binom{n+1}{n+1} 2^{\frac{n+2}{2}}$$

Untuk $n = 2$, maka diperoleh $J_n = 4 + \binom{3}{3} 4 = 8$

Untuk $n > 2$ dan genap, maka diperoleh

$$J_n = 2n + \binom{n+1}{3} 4 + 8t = 2n + \frac{4(n+1)(n)(n-1)}{3!} + 8t;\ t \text{ bilangan bulat positf}$$

$$= \frac{8n + 4n^3}{6} + 8t = \frac{8(2k) + 4(2k)^3}{6} + 8t = 8\left(\frac{2k + k^3}{6}\right) + 8t\ ;\ k \text{ bilangan bulat positif}$$

$$= 8s + 8t = 8j;\ \text{di mana } s = \frac{2k + k^3}{6} \text{ dan } j = s + t \text{ adalah bilangan bulat positif } \blacksquare$$

Dengan menggunakan nilai yang terdapat pada Tabel 1, diperoleh

$Q_3 = 14$ membagi $Q_1 + Q_3 + Q_5 = 98$

$Q_5 = 82$ membagi $Q_1 + Q_3 + Q_5 + Q_7 + Q_9 = 3362$

$Q_7 = 478$ membagi $Q_1 + Q_3 + Q_5 + Q_7 + Q_9 + Q_{11} + Q_{13} = 114242$

$Q_9 = 2786$ membagi $Q_1 + Q_3 + Q_5 + Q_7 + Q_9 + Q_{11} + Q_{13} + Q_{15} + Q_{17} = 3880898$

Data ini memberikan indikasi bahwa $Q_{2n+1}$ membagi $\sum_{k=0}^{2n} Q_{2k+1}$. Proposisi 3 berikut menunjukkan bahwa sifat ini benar untuk semua bilangan bulat tidak negatif.

**Proposisi 3.** ∀ bilangan bulat $n \geq 0$, berlaku

$$Q_{2n+1} \left| \sum_{k=0}^{2n} Q_{2k+1} \right.$$

**Bukti.** Dengan menggunakan Persamaan (1) dan (3) diperoleh

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{2n} Q_{2k+1} &= Q_1 + Q_3 + Q_5 + \cdots + Q_{4n+1} \\
&= (\alpha^1 + \beta^1) + (\alpha^3 + \beta^3) + (\alpha^5 + \beta^5) + \cdots + (\alpha^{4n+1} + \beta^{4n+1}) \\
&= (\alpha^1 + \alpha^3 + \alpha^5 + \cdots + \alpha^{4n+1}) + (\beta^1 + \beta^3 + \beta^5 + \cdots + \beta^{4n+1}) \\
&= \frac{\alpha((\alpha^2)^{2n+1} - 1)}{\alpha^2 - 1} + \frac{\beta((\beta^2)^{2n+1} - 1)}{\beta^2 - 1} \\
&= \frac{\alpha(\alpha^{4n+2} - 1)}{\alpha^2 - 1} + \frac{\beta(\beta^{4n+2} - 1)}{\beta^2 - 1} = \frac{\alpha^{4n+3} - \alpha}{2\alpha} + \frac{\beta^{4n+3} - \beta}{2\beta}
\end{aligned}$$

Karena $\alpha^2 - 1 = 2\alpha, \beta^2 - 1 = 2\beta$ dan $\alpha\beta = -1$ diperoleh

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{2n} Q_{2k+1} &= \frac{\alpha^{4n+2} - 1}{2} + \frac{\beta^{4n+2} - 1}{2} = \frac{1}{2}(\alpha^{4n+2} + \beta^{4n+2} - 2) \\
&= \frac{1}{2}(\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1})^2 = \frac{1}{2}(\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1})Q_{2n+1}
\end{aligned}$$

Karena $\frac{1}{2}(\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1})$ bilangan bulat, maka menurut Definisi 2, $Q_{2n+1} | \sum_{k=0}^{2n} Q_{2k+1}$ ■

Berdasarkan nilai-nilai pada Tabel 1 juga dapat diperoleh informasi berikut.

$Q_1 + Q_3 + Q_5 = 2 + 14 + 82 = 98 = 2\,(49) = 2\,(S_5)$

$Q_1 + Q_3 + Q_5 + Q_7 + Q_9 = 2 + 14 + 82 + 478 + 2786 = 3362 = 2\,(1681) = 2\,(S_9)$

$Q_1 + Q_3 + Q_5 + Q_7 + Q_9 + Q_{11} + Q_{13} = 114242 = 2\,(57121) = 2\,(S_{13})$

$Q_1 + Q_3 + Q_5 + Q_7 + Q_9 + Q_{11} + Q_{13} + Q_{15} + Q_{17} = 3880898 = 2\,(1940449) = 2\,(S_{17})$

Sifat ini menunjukkan $S_{4n+1} \mid \sum_{k=0}^{2n} Q_{2k+1}$ yang akan dibuktikan benar untuk semua bilangan bulat tidak negative pada Proposisi 4 berikut.

**Proposisi 4.** ∀ bilangan bulat $n \geq 0$, berlaku

$$S_{4n+1} \left| \sum_{k=0}^{2n} Q_{2k+1} \right. .$$

**Bukti**: Dengan menggunakan Persamaan (1), (2), (3),dan $\alpha^2 - 1 = 2\alpha$ dan $\beta^2 - 1 = 2\beta$ diperoleh:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{2n} Q_{2k+1} &= Q_1 + Q_3 + Q_5 + \cdots + Q_{4n+1} \\
&= (\alpha^1 + \beta^1) + (\alpha^3 + \beta^3) + (\alpha^5 + \beta^5) + \cdots + (\alpha^{4n+1} + \beta^{4n+1}) \\
&= (\alpha^1 + \alpha^3 + \alpha^5 + \cdots + \alpha^{4n+1}) + (\beta^1 + \beta^3 + \beta^5 + \cdots + \beta^{4n+1}) \\
&= \frac{\alpha((\alpha^2)^{2n+1} - 1)}{\alpha^2 - 1} + \frac{\beta((\beta^2)^{2n+1} - 1)}{\beta^2 - 1}
\end{aligned}$$

$$= \frac{\alpha(\alpha^{4n+2}-1)}{\alpha^2-1} + \frac{\beta(\beta^{4n+2}-1)}{\beta^2-1}$$

$$= \left(\frac{\alpha^{4n+3}-\alpha}{2\alpha} + \frac{\beta^{4n+3}-\beta}{2\beta}\right)$$

$$= \left(\frac{\alpha^{4n+2}-1}{2} + \frac{\beta^{4n+2}-1}{2}\right)$$

$= \left(\frac{\alpha^{4n+2}+\beta^{4n+2}-2}{2}\right) = 2\left(\frac{\alpha^{4n+2}+\beta^{4n+2}-2}{4}\right) = 2.S_{4n+1}$. Berdasarkan Definisi 2,

berarti $S_{4n+1} \mid \sum_{k=0}^{2n} Q_{2k+1}$ ■

Bila $n \equiv 1 \pmod 4$, pada Tabel 1 dapat dilihat bahwa $J_{2n+3}$ adalah kelipatan 3, sebagai contoh $J_5 = 138 = (46).(3)$, $J_{13} = 161562 = (53854).(3)$, $J_{21} = 186444714 = (62148238).(3)$, $J_{29} = 215157040698 = (71719013566).(3)$. Namun sifat ini belum dapat dibuktikan secara analitik. Berikut adalah hasil penyelidikan yang relevan.

**3.2 Hasil yang Relevan**

Jika $n \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4)$, maka $J_{2n+3} = J_{8s+5} = 10 + 16s + \sum_{j=0}^{4s+1} \binom{8s+6}{2j+3} 2^{j+2}; s \geq 0$

**Bukti.**

Berdasarkan Proposisi 1 $J_{2n+3} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\left(\alpha^{2n+4} - \beta^{2n+4} - 2\sqrt{2}\right); n \geq 1$. Dengan menggunakan Persamaan (1) dan Teorema Binomial diperoleh

$$\alpha^{2n+4} = \binom{2n+4}{0} + \binom{2n+4}{1}\sqrt{2} + \binom{2n+4}{2}(\sqrt{2})^2 + \cdots + \binom{2n+4}{2n+4}(\sqrt{2})^{2n+4}$$

$$\beta^{2n+4} = \binom{2n+4}{0} + \binom{2n+4}{1}(-\sqrt{2}) + \binom{2n+4}{2}(-\sqrt{2})^2 + \cdots + \binom{2n+4}{2n+4}(-\sqrt{2})^{2n+4}$$

$$\alpha^{2n+4} - \beta^{2n+4} = \binom{2n+4}{1}2\sqrt{2} + \binom{2n+4}{3}2^2\sqrt{2} + \binom{2n+4}{5}2^3\sqrt{2} + \cdots + \binom{2n+4}{2n+3}2^{\frac{2n+4}{2}}\sqrt{2}$$

sehingga

$$J_{2n+3} = 4n + 6 + \binom{2n+4}{3}2^2 + \binom{2n+4}{5}2^3 + \cdots + \binom{2n+4}{2n+3}2^{n+2}$$

Ambil $n \equiv 1 \pmod 4$, maka $n = 4s + 1; s \geq 0$, sehingga

$$J_{2n+3} = J_{8s+5} = 4(4s+1) + 6 + \binom{8s+6}{3}2^2 + \binom{8s+6}{5}2^3 + \cdots + \binom{8s+6}{8s+5}2^{4s+3}$$

$$= 10 + 16s + \sum_{j=0}^{4s+1}\binom{8s+6}{2j+3}2^{j+2}; s \geq 0.$$

**KESIMPULAN**

Berdasarkan hasil penelitian yang telah diakukan diperoleh tiga sifat jumlah yang memuat bilangan Pell-Lucas seperti yang telah dibuktikan pada Proposisi 2, 3, dan 4. Sifat $J_n$, khususnya apakah $J_{2n+3}$ merupakan kelipatan 3 bila $n \equiv 1 \pmod 4$ masih terbuka untuk diteliti.

**PUSTAKA**


[1] Cerin Z, Gianella, GM. 2006. On Sums of Square of Pell-Lucas Numbers. *Electronic Journal of Combinatorial Number Theory 6.* Diakses tanggal 23 Desember 2012.

[2] Dasdemir, A. 2011. On the Pell, Pell-Lucas and Modified Pell Numbers By Matrix Method. *Applied Mathematical Sciences* 64(5): 3173-3181. Diakses tanggal 22 Desember 2012.

[3] Santana SF, Barrero. 2006. Some Properties of Sum Involving Pell Numbers. *Missouri Journal of Mathematical Sciences Articles*, 18(1). The Fourth Articles.

[4] Purcell EJ, Vanberg D. and Rigdon S.E. 2003. *Calculus*. Prentice Hall.

[5] Burton DM. 2002. *Elementary Number Theory*. University of New Hampshire. Mc Graw Hill.