PROSIDING

SEMIRATA 2017 BIDANG MIPA

BKS-PTN WILAYAH BARAT

Jambi, Ratu Convention Center 12 - 14 Mei 2017

"Peran Sains, Teknologi dan Pendidikan MIPA dalam Menopang Sains Park, Teknopark, Serta Geopark Berbasis Argoindustri dan Lingkungan"

Penerbit: Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan (FKIP) bekerja sama dengan Fakultas Sains dan Teknologi (FST) Universitas Jambi

BUKU 1

MATEMATIKA

PROSIDING SEMIRATA 2017 BIDANG MIPA BKS-PTN WILAYAH BARAT

Editor:
Maison
Feri Tiona Pasaribu
Ahmad Syarkowi
Evtita
Novferma
Rosi Widia Asiani
Aulia Ul Millah
Martina Asti Rahayu

Reviewer:
Maison
Evita Anggereini
Haris Effendi

Desain Sampul:
Taufan Dyusanda Putra

ISBN: 978-602-50593-0-8
Penerbit:
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan (FKIP)
bekerjasama dengan Fakultas Sains dan Teknologi (FST) Universitas Jambi
Redaksi:

Kampus Unja Mendalo
Jl. Raya Jambi – Ma. Bulian Km. 15, Mendalo Indah
Jambi
Telp./Fax: 0741 - 583453

ISBN 978-602-50593-0-8

9 786025 059308

KATA PENGANTAR

Assalamualaikum Wr. Wb.

Alhamdulillah, segala puji bagi Allah SWT, Tuhan Yang Maha Esa, atas karunia yang telah dilimpahkan sehingga kegiatan Seminar dan Rapat Tahunan (SEMIRATA)-BKS PTN Bidang MIPA Wilayah Barat tahun 2017 dapat dilaksanakan secara baik.

Kegiatan SEMIRATA-BKS PTN Bidang MIPA Wilayah Barat tahun 2017 yang diamanahkan kepada Universitas Jambi sebagai penyelenggara dilaksanakan secara gabungan oleh Fakultas Sains dan Teknologi (FST) dan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan (FKIP). Kegiatan telah dilaksanakan dengan sukses pada tanggal 12-14 Mei 2017 di Ratu Conference Hotel dan Swiss Bellin Hotel Jambi. Salah satu program utama adalah Seminar Nasional Sains dan Pendidikan MIPA dengan tema: “Peran Sains Teknologi dan Pendidikan MIPA dalam Menopang Sainspark, Teknopark serta Geopark berbasis Agroindustri dan Lingkungan”.

Sesi pleno seminar di Ratu Conference Center dipaparkan materi oleh dua pembicara utama yaitu akademisi Dr. Ir Yunus Kusumahbrata, M.Sc (Staf Ahli Kementerian ESDM) dan praktisi/birokrat Dr. H. Syahrial, M.P., (Bupati Tajung Jabung Barat Prov. Jambi). Materi yang disajikan berisi topik Pengembangan Geopark, Teknopark dan Sainspark di Indonesia. Selain daripada itu, sesi paralel telah dipresentasikan secara oral lebih dari 600 judul makalah hasil penelitian yang disampaikan dalam 40 ruang seminar secara paralel. Dalam kegiatan komunikasi ilmiah secara langsung ini juga telah dimanfaatkan untuk menjalin jejaring agar lebih bersinergi dalam pengembangan Sains dan Pendidikan MIPA ke masa mendatang.

Supaya komunikasi ilmiah yang baik ini dapat juga tersampaikan ke komunitas ilmiah lain yang tidak dapat hadir pada kegiatan seminar, panitia memfasilitasi untuk menerbitkan makalah dalam bentuk Prosiding. Panitia juga tetap memberi kesempatan kepada peserta yang akan menerbitkan makalahnya di jurnal ilmiah, sehingga tidak seluruh materi yang disampaikan pada seminar diterbitkan dalam prosiding ini. Dalam proses penerbitan prosiding ini, panitia telah banyak dibantu oleh Tim Reviewer dan Tim Editor yang dikoordinir oleh Drs. Maison, M.Si., Ph.D, yang telah dengan sangat intensif mencurahkan waktu, tenaga dan pikiran untuk melakukan proses *plagiarism check*, review, dan editing. Untuk itu, panitia menyampaikan terima kasih dan penghargaan. Namun, panitia juga menyampaikan permohonan ma’af karena dengan sangat banyaknya makalah yang akan diterbitkan dalam prosiding ini, waktu yang dibutuhkan dalam proses penerbitan prosiding ini cukup lama, dan penerbitan prosiding tidak dilakukan dalam satu buku tetapi dalam empat buku prosiding. Semoga penerbitan prosiding ini selain SEMIRATA-BKS PTN Bidang MIPA Wilayah Barat tahun 2017 bermanfaat bagi para pemakalah dan penulis, juga dapat bermanfaat dalam pengembangan Sains dan Pendidikan MIPA di Indonesia.

Ucapan terima kasih disampaikan kepada Rektor Universitas Jambi, Dekan FST dan FKIP Universitas Jambi, Ketua Forum Rektor BKS wilayah Barat, Ketua BKS-MIPA Wilayah Barat, panitia dan semua pihak yang ikut menyukseskan acara semirata.

Jambi, 2 Oktober 2017
Ketua Panitia

Dr. Kamid, M.Si

DAFTAR ISI

DIVISIBILITY PROPERTIES OF THE SUM INVOLVING PELL-LUCAS NUMBERS

Baki Swita
Faculty of Mathematics and Natural Sciences, University of Bengkulu
email: b.swita@yahoo.com

ABSTRACT

Pell-Lucas numbers Q_n are infinite sequences of integers defined by recurrence relation $Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2}; n \geq 2; Q_0 = Q_1 = 2$. The divisibililty properties of the sum involving Pell-Lucas numbers $\sum Q_i$ for i odd and even have been investigated. Some results have been found. This research investigates additional properties and proves that $Q_n \mid \sum_{k=0}^{2n-1} Q_{2k+1}$ for n odd, $Q_{n+1} \mid \sum_{k=0}^{n} Q_{2k+1}$ for n even, and $Q_n \mid \sum_{k=0}^{n} Q_{2k}$ for n even.

Keywords: Pell-Lucas numbers, the sum involving Pell-Lucas Numbers, divisibility properties

PENDAHULUAN

Sifat-sifat pembagian dari bilangan bulat seperti Bilangan Pell dan Pell-Lucas salah satu topik kajian yang menarik perhatian peneliti. Bilangan Pell P_n merupakan barisan takhingga dari bilangan bulat yang didefi nisikan dengan relasi rekursi

$P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}; n \geq 2, P_0 = 0, P_1 = 1.$ Bilangan Pell-Lucas Q_n didefinisikan dengan relasi rekursi yang sama, dengan *initial condition* $Q_0 = Q_1 = 2.$

Pada tahun 2006, Santana dan Barero [1] telah menunjukkan dua sifat pembagian dari jumlah yang memuat Bilangan Pell $\sum_{k=0}^{2n} P_{2k+1}$ dan $\sum_{k=1}^{2n} P_{2k-1}$. Penyelidikan sifat-sifat pembagian dari jumlah yang memuat Bilangan Pell dilanjutkan oleh Bradie pada tahun 2010 [2]. Beberapa sifat-sifat tambahan untuk $\sum P_{2k+1}$ dan $\sum P_{2k}$ telah ditemukan. Termotivasi dari Santana dan Barero, suatu investigasi dilakukan terhadap sifat-sifat dari jumlah yang memuat Bilangan Pell-Lucas $\sum_{k=0}^{2n} Q_{2k+1}, \sum_{k=1}^{n} Q_k$ dan $\sum_{k=0}^{2n} Q_{2k}$ [3,4]. Beberapa sifat pembagian telah diperoleh.

Hasil eksplorasi berbantuan Maple mem berikan indikasi beberapa sifat pembagian yang ditunjukkan oleh Bradie untuk jumlah yang memuat Bilangan Pell juga relevan untuk jumlah yang memuat Bilangan Pell-Lucas. Beberapa hasil eksplorasi tersebut dapat dilihat pada [5]. Hasil eksplorasi memberikan indikasi: $(i) Q_n \mid \sum_{k=0}^{2n-1} Q_{2k+1}, \forall n \in N$; (ii) $Q_{n+1} \mid \sum_{k=0}^{n} Q_{2k+1}$, n genap; $(iii) (Q_{n+1} + Q_n) \mid \sum_{k=0}^{n} Q_{2k+1}$ untuk n ganjil; $(iv) Q_n \mid \sum_{k=0}^{n} Q_{2k}$; untuk n genap.

Artikel ini membuktikan sifat (i), (ii), dan (iv), khususnya:

(1)Membuktikan $Q_n \mid \sum_{k=0}^{2n-1} Q_{2k+1}, n$ ganjil

(2)Membuktikan $Q_{n+1} \mid \sum_{k=0}^{n} Q_{2k+1}, n$ genap

(3)Membuktikan $Q_n \mid \sum_{k=0}^{n} Q_{2k}, n$ genap.

KAJIAN LITERATUR

Suatu bilangan bulat b dikatakan habis dibagi oleh bilangan bulat $a \neq 0$ jika terdapat bilangan bulat c sedemikian sehingga $b = ac$, ditulis $a \mid b$ (lihat [6]).

Untuk memahami sifat-sifat pembagian dari jumlah yang memuat Bilangan Pell-Lucas $\sum Q_i$ diperlukan sifat-sifat dari Bilangan Pell-Lucas. Beberapa sifat dari Bilangan Pell-Lucas Q_n ditunjukkan pada [7] dengan menggunakan pendekatan matrik, diantaranya adalah sebagai berikut.

$$Q_{n+1}Q_{n-1} - Q_n^{\ 2} = 8(-1)^{n+1} \qquad (1)$$

$$Q_{n+1}Q_{n-1} + Q_n^{\ 2} = 2(Q_{2n} + 2(-1)^{n+1}) \qquad (2)$$

Disamping menggunakan matrik, pembuk tian sifat-sifat yang berhubungan dengan Bilangan Pell-Lucas juga dapat dilakukan dengan "Rumus Binet" untuk Q_n, seperti pada Persamaan (3) berikut (lihat [7]).

$$Q_n = \alpha^n + \beta^n ; \alpha = 1 + \sqrt{2} ; \beta = 1 - \sqrt{2} \quad (3)$$

Analog dengan P_n, perluasan Rumus Q_n untuk indeks negatif dapat dibuktikan dengan induksi matematika, diberikan oleh [8].

$$Q_{-n} = (-1)^{n+1} Q_n \qquad (4)$$

Beberapa sifat pembagian dari $\sum Q_{2k+1}$ dan $\sum Q_{2k}$ yang telah diperoleh sebelumnya adalah sebagai berikut [3,4]:

(i) $Q_{2n+1} \mid \sum_{k=0}^{2n} Q_{2k+1} ; \forall n \in N$

(ii) $S_{4n+1} \mid \sum_{k=0}^{2n} Q_{2k+1} ; \forall n \in N$

(iii) $Q_{2n} \mid \sum_{i=0}^{2n} Q_{2i} ; \forall n \in N$

(iv) $8 \mid \sum_{k=1}^{n} Q_k$; untuk n genap

(v) $S_{4n} + 1 \mid \sum_{i=0}^{2n} Q_{2i} ; \forall n \in N$

(vi) $3 \mid \sum_{k=1}^{8n} Q_k ; \forall n \in N$

di mana S_n adalah jumlah n bilangan Pell-Lucas yang pertama yang tidak sama dengan nol.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan penelitian dasar yaitu mengembangkan teori tentang sifat pembagian dari jumlah yang memuat Bilangan Pell-Lucas. Metode yang digunakan adalah eksplorasi berbantuan Maple. Sifat-sifat yang diperoleh dibuktikan secara analitik.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Hasil eksplorasi berbantuan Program Maple memberikan indikasi bahwa Q_{n+1} membagi habis $\sum_{k=0}^{2n-1} Q_{2k+1}$ untuk bilangan bulat positif n. Hasil eksplorasi tersebut dapat dilihat pada Tabel 1. Hasil eksplorasi ini akan dibuktikan benar untuk semua n ganjil pada Proposisi 1 berikut.

Proposisi 1. Jika n ganjil, maka $$Q_n \mid \sum_{k=0}^{2n-1} Q_{2k+1}.$$

Bukti.
Dengan menggunakan Rumus Binet pada Persamaan (3) diperoleh

$$\sum_{k=0}^{2n-1} Q_{2k+1} = Q_1 + Q_3 + Q_5 + \ldots + Q_{4n-1}$$

$$= (\alpha+\beta) + (\alpha^3+\beta^3) + (\alpha^5+\beta^5) + \ldots + (\alpha^{4n-1}+\beta^{4n-1})$$

$$= (\alpha+\alpha^3+\alpha^5+\alpha^7+\alpha^9+\ldots+\alpha^{4n-1}) + (\beta+\beta^3+\beta^5+\beta^7+\beta^9+\ldots+\beta^{4n-1})$$

$$= \frac{\alpha((\alpha^2)^{2n}-1)}{\alpha^2-1} + \frac{\beta((\beta^2)^{2n}}{\beta^2-1} = \frac{1}{2}\left(\alpha^{4n}+\beta^{4n}-2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(\alpha^{2n}+\beta^{2n}\right)^2-4\right)$$

$$= \frac{1}{2}Q_{2n}{}^2-2$$

Dengan menggunakan Persamaan (1) dan (2) untuk n ganjil diperoleh

$Q_{2n} = \frac{1}{2}(4+2Q_n{}^2) = Q_n{}^2 + 2$. Sehingga

$$\sum_{k=0}^{2n-1} Q_{2k+1} = \frac{1}{2}\left(Q_n{}^2+2\right)^2-2$$

$$= \frac{1}{2}Q_n\left(Q_n{}^3+4Q_n\right) \blacksquare$$

Hasil eksplorasi pada Tabel 1 membe rikan indikasi bahwa Q_n juga membagi habis $\sum_{k=0}^{2n-1} Q_{2k+1}$ untuk n genap. Tetapi pembuk tian secara analitik belum dapat diberikan. Oleh karena masih diperlukan penyelidikan lebih lanjut.

Tabel 1. Hasil Eksplorasi Sifat Pembagian dari $\sum_{k=0}^{2n-1} Q_{2k+1}$

n	Q_n	$\sum_{k=0}^{2n-1} Q_{2k+1}$	$\frac{\sum_{k=0}^{2n-1} Q_{2k+1}}{Q_n}$
1	2	16	8
2	6	576	96
3	14	19600	1400
4	34	665856	19584
5	82	22619536	275848
6	198	768398400	3880800
7	478	26102926096	54608632
8	1154	886731088896	768397824
9	2786	30122754096400	10812187400
10	6726	1023286908188736	152138999136
11	16238	34761632124320656	2140758229112
12	39202	1180872205318713600	30122754076800
13	94642	40114893348711941776	423859315617928
14	228486	1362725501650887306816	5964153171970656

15	551614	46292552162781456490000	839220037250350000
16	1331714	1572584048032918633353216	1180872205318047744
17	3215042	53421565080956452077519376	16616132878188357128
18	7761798	181476062870448645200230560 0	233806732499929327200
19	18738638	616484398108715829160008710 56	3289910387877261032312
20	45239074	2094232192940929332 69 2027310336	46292552162781433870464
⋮			
25	3710155682	94741125149636 933 4178730799 20900017936	2553561986880445234585 5248648
26	8957108166	321840933675706717 20263761 19771675835456	3593134387 91966819263526142816
n	Q_n	$\sum_{k=0}^{2n-1} Q_{2k+1}$	$\dfrac{\sum_{k=0}^{2n-1} Q_{2k+1}}{Q_n}$
27	21624372014	109331176324590 6 469 15478914 992316078387600	5055923762956339922106 878113400
28	52205852194	371404158569932492 7954 256 73 3618974989342976	7114224612 0180725728586824754304
29	126036076402	12616808273 745245 69 0352925002 8052833559273616	1001047369 44548650012274007149120 8
30	304278004998	428600077148768420 9792040 24 4220177366025960000	1408580541 83569917274459395370200 00
⋮			
41	494086626389 6162	297976764206018805693714935 737288356560393442733134000 759210256	60308607497310947430861 42958525827965734785408 8
42	119283063441 69798	101224383660487390458608542 325893599163502386489105155 00799041600	84860650573384094824185 20544377955423518765592 00
43	287974789522 35758	343864927681451108753575328 972300948799347720620224393 026408204176	11940799687771084222816 79019171449129903437304 1272
44	695232642486 41314	116812851028032889585757003 308256428992614722624387188 47397079900416	16801980213452902006767 69147384404433490014 81250944
45	167844007449 518386	396819828567630373482820235 919099557626090709202296216 418474308410000	23642180295711773651702 9359652988125437116909 9685000
⋮			
55	112891876915 0954098718	812121070965910275504978328 266832039962001161968326359 479764058998682116657066456 336	71937954541822041811602 32961585765111290231840 63121700227298552

56	272545100330 1774613634	275882098006079119063750646 554250153641095979710569034 572735322689208409814442784 45056	101224383660487390458 60 854232589359916350237 28 6185013849911734784
57	657982077575 4503325986	937187012149703094541247219 956183690339764329853966391 187820333084309911252448400 675600	142433516670100567060 16 798255240961534003236 69 942613420131884946 00
58	158850925548 10781265606	318367702032892973024960304 138548204561878776170638003 969286177925976161416018013 44525376	200419167174745667788 82 126099663239746768033 22 567277595998524051296
59	383500058853 76065857198	108151299989968640519032378 685110771182004807465031524 710438518461523463890320879 7313187216	282011169211344940574 95 144522080945260815279 01 0016888124478775337592
60	925851043255 62912980002	367396052263860484791685127 225238073814254466604936546 011521676591253801065674973 07303840000	396819828567630373482 82 023591909955762609070 91 5600366425569285192 0000
⁞			

n	Q_n	$\sum_{k=0}^{2n-1} Q_{2k+1}$	$\dfrac{\sum_{k=0}^{2n-1} Q_{2k+1}}{Q_n}$
77	297664998981 095236352003 825842	392537442330006018755990884 781700335960725561365165761 891090520171652636530294742 770603394991467965411162233 0762194576	131872220003580652848 28 242070776493215883301 97 962208629945475455165 81 38114014555862075528
78	718626877583 933638536009 393798	133347178157981963284792732 024184553532467912133102709 284259246622672683493662333 429661021841784558720368251 484821249600	185558295017162617082 13 663621082708871270599 20 445631745835519410878 66 58387398249843825520 0
79	173491875414 896251342402 2613438	452987868294808669149539297 997445781674430175691184045 804590347996915471241921638 918076870867076031683840892 8153160291856	261100335224063470443 47 411490223557351937671 90 603506530469187678796 81 098381887782207279871 2
80	418846438588 185866538405 4620674	153882528042076965547558568 587107381215773791822869472 864276459072328587538759694 898716475072964066213785535 305722628673536	367396052263860484791 685127225238073814254 466604936546011521655 648931871656381646152 7652 9664
⁞			
98	325100144934 084991997272 258199415974	558519906672550721253859703 351964355557092796946833595 434245932003881352989708528	171799341026375817408 51 848834000337466892691 08 253872524414700824524 75

	46	688535853138487161527628123 739704627221736410385749163 347405384325696	617891753082654468650054 72388458264345441376
99	78486117902 93268381800 9467010929 219214	189732355358934806809172147 215472950284253424776337688 120533295054124831081748787 335198015676898633022182316 468866625895978394440739423 82959661952864400	24174001776159365429211 10368018744381253106772 39402753991333193461992 34451098213100158269568 1118586959960614324600
100	189482250299 273866835746 159841800035 874	644531488313705792429931440 829256066610904551442601306 014378957252020544324956 168410984717448316865113892 24787040682341910480468812 829185728110101306393 6	340154018276494874183 040636406024247122124217 2434177281122811716713 1403849422972533443 81143070588530161625 512232064

Hasil eksplorasi pada Tabel 2 berikut menunjukkan bahwa hasil bagi $\sum_{k=0}^{n} Q_{2k+1}$ oleh Q_{n+1} merupakan bilangan bulat untuk n genap. Berarti ada indikasi bahwa Q_{n+1} membagi habis $\sum_{k=0}^{n} Q_{2k+1}$ untuk n genap. Sifat ini akan dibuktikan benar untuk semua bilangan bulat positif genap sebagaimana dinyatakan pada Proposisi 2.

Tabel 2. Hasil Eksplorasi Sifat Pembagian $\sum_{k=0}^{n} Q_{2k+1}$

n	Q_{n+1}	$\sum\limits_{k=0}^{n} Q_{2k+1}$	$\dfrac{\sum\limits_{k=0}^{n} Q_{2k+1}}{Q_{n+1}}$
1	6	16	2,666666667
2	14	98	7
3	34	576	16,94117647
4	82	3362	41
5	98	19600	98,98989899
6	478	114242	239
7	1154	665856	576,9982669
8	2786	3880898	1393
9	6726	22619536	336,999703
10	16238	131836322	8119
11	39202	768398400	19600,99995
12	94642	4478554082	47321
13	228486	26102926096	114243,0000
14	551614	152139002498	275807
15	133174	886731088896	665857,0000
16	3715042	5168247530882	$0,1607521 . 10^{7}$
17	7761798	30122754096400	$0,3880899000 . 10^{7}$
18	18738638	175568277047522	$0,9369319 . 10^{7}$
19	45239074	1023286908188736	$0,2261953700 . 10^{8}$
20	10921678	5964153172084898	$0,54608393 . 10^{8}$
21	263672646	34761632124320656	$0,1318363230 . 10^{9}$

22	636562078	202605639573839042	$0,318281039 \cdot 10^{9}$
23	1536796802	1180872205318713600	$0,7683984010 \cdot 10^{9}$
24	3710155682	6882627592338442562	$0,1855077841 \cdot 10^{10}$
25	8957108166	40114893348711941776	$0,4478554083 \cdot 10^{10}$
26	21624372014	233806732499933208098	$0,1081218601 \cdot 10^{11}$
27	52205852194	1362725501650887306816	$0,2610292610 \cdot 10^{11}$
28	126036076402	7942546277405390632802	$0,6301803820 \cdot 10^{11}$
29	304278004998	46292552161781456490000	$0,1521390025 \cdot 10^{12}$
30	734592086398	269812766699283348307200	$0,3672960432 \cdot 10^{12}$

Proposisi 2. Jika n genap, maka $Q_{n+1} \mid \sum_{k=0}^{n} Q_{2k+1}$.

Bukti. Menggunakan teknik yang sama dengan pembuktian pada Proposisi 1, diperoleh

$$\sum_{k=0}^{n} Q_{2k+1} = Q_1 + Q_3 + Q_5 + \ldots + Q_{2n+1}$$

$$= (\alpha+\beta) + (\alpha^3+\beta^3) + (\alpha^5+\beta^5) + \ldots + (\alpha^{2n+1}+\beta^{2n+1})$$

$$= (\alpha+\alpha^3+\alpha^5+\alpha^7+\alpha^9+\ldots+\alpha^{2n+1}) + (\beta+\beta^3+\beta^5+\beta^7+\beta^9+\ldots+\beta^{2n+1})$$

$$= \frac{\alpha((\alpha^2)^{n+1}-1)}{\alpha^2-1} + \frac{\beta((\beta^2)^{n+1}-1)}{\beta^2-1}$$

$$= \frac{1}{2}(\alpha^{2n+2}+\beta^{2n+2}-2)$$

Karena n genap dan $\alpha\beta=-1$, maka $\sum_{k=0}^{n} Q_{2k+1} = \frac{1}{2}\left(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}\right)^2$

$$= \frac{1}{2}(Q_{n+1})(Q_{n+1}) \ \blacksquare$$

Hasil perhitungan Maple pada Tabel 3 menunjukkan hasil bagi $\sum_{k=0}^{n} Q_{2k}$ oleh Q_n adalah bernilai bulat untuk n genap.

Tabel 3. Hasil Eksplorasi Sifat Pembagian dari $\sum_{k=0}^{n} Q_{2k}$

n	Q_n	$\sum_{k=0}^{n} Q_{2k}$	$\frac{\sum_{k=0}^{n} Q_{2k}}{Q_n}$
1	2	8	4
2	6	42	7
3	14	240	17.14285714
4	34	1394	41
5	82	8120	99.02439024
6	198	47322	239
7	478	275808	577.0041841
8	1154	1607522	1393
9	2786	9369320	3363.000718
10	6726	54608394	8119

11	16238	318281040	19601.00012
12	39202	1855077842	47321
13	94642	10812186008	114243.0000
14	228486	63018038202	275807
15	551614	367296043200	665857.0000
16	1331714	2140758220994	1607521
17	3215042	12477253282760	$3.880899000 \,.\, 10^{6}$
18	7761798	72722761475562	9369319
19	18738638	423859315570608	$2.261953700 \,.\, 10^{7}$
20	45239074	2470433131948082	54608393
21	109216786	14398739476117880	$1.318363230 \,.\, 10^{8}$
22	263672646	83922003724759194	318281039
23	636562078	489133282872437280	$7.683984010 \,.\, 10^{8}$
24	1536796802	2850877693509864482	1855077841
25	3710155682	16616132878186749608	$4.478554083 \,.\, 10^{9}$
26	8957108166	96845919575610633162	10812186007
27	21624372014	564459384575477049360	$2.610292610 \,.\, 10^{10}$
28	52205852194	3289910387877251662994	63018038201
29	126036076402	19175002942688032928600	$1.521390025 \,.\, 10^{11}$
30	304278004998	111760107268250945908602	367296043199

Berarti juga ada indikasi bahwa Q_n membagi habis $\sum_{k=0}^{n} Q_{2k}$ untuk n genap. Berikut akan dibuktikan bahwa sifat ini benar untuk semua n genap sebagaimana dinyatakan pada Proposisi 3.

Proposisi 3. Jika n genap, maka $Q_n \mid \sum_{k=0}^{n} Q_{2k}$

Bukti. Karena **b**erdasarkan Persamaan 4, $Q_{-n} = (-1)^n Q_n$, maka dengan menggunakan Persamaan rekursi dari Q_n diperoleh

$$\sum_{k=0}^{n} Q_{2k} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(Q_{2k+1} - Q_{2k-1})$$

$$= \frac{1}{2}((Q_1 + Q_{-1}) + (Q_3 - Q_1) + (Q_5 - Q_3) + \ldots$$

$$+ (Q_{2n-1} + Q_{2n-3}) + (Q_{2n+1} - Q_{2n-1}))$$

$$= \frac{1}{2}(Q_{2n+1} + 2) = \frac{1}{2}(\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1} + 2)$$

$$= \frac{1}{2}(\alpha^n + \beta^n)(\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}) + (-\alpha^{n+1}\beta^n$$

$$-\alpha^n \beta^{n+1} + 2$$

Karena n genap , maka $-\alpha^{n+1}\beta^n - \alpha^n\beta^{n+1} + 2 = 0.$ Sehingga diperoleh

$$\sum_{k=0}^{n} Q_{2k} = \frac{1}{2}(Q_n)(Q_{n+1}) \blacksquare$$

KESIMPULAN

Penelitian ini telah menunjukkan tiga sifat pembagian dari jumlah yang memuat Bilangan Pell-Lucas seperti pada Proposisis 1, 2, dan 3.

Penelitan ini belum dapat membuktikan $Q_n | \sum_{k=0}^{2n-1} Q_{2k+1}$ untuk n genap dan $(Q_{n+1} + Q_n) | \sum_{k=0}^{n} Q_{2k+1}$ untuk n ganjil.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Santana SF, Barrero. 2006. Some Proper ties of Sum Involving Pell Numbers. *Missouri Journal of Mathematical Sciences*, 18(1). The Fourth Articles.

[2] Bradie. 2010. Extensions and Refine ments Some Properties of Sums Invol ving Pell Numbers. *Missouri Journal of Mathematical Sciences* 1(22): 37-43.

[3] Swita, B., Memimayasari, Z., Otami, S. 2014. Beberapa Sifat dari Jumlah yang Memuat Bilangan Pell-Lucas. *Prosiding Semirata BKS Barat*.

[4] Swita, B, Harianto, F. 2014. The Sequen ces Involving the Sum of Pell-Lucas Numbers. *Prosiding Semnas MIPA Universitas Sriwijaya*. 61-66.

[5] Estiawan, D. 2016. Pengembangan Sifat-sifat dari Jumlah Yang Memuat Bilangan Pell-Lucas. Skripsi, Universitas Bengkulu.

[6] Burton DM. 2002. *Elementary Number Theory*. University of New Hampshire. Mc Graw Hill.

[7] Dasdemir, A. 2011. On the Pell, Pell-Lucas and Modified Pell Numbers By Matrix Method. *Applied Mathematical Sciences* 64(5): 3173-3181.

[8] Horadam, AF. 1971. Pell Identities. *The Fibonacci Quarterly* 9(3): 245-252.