Jurnal Gradien Vol. 11 No. 2 Juli 2015 : 1112-1116

ISSN 0216-2393

Teorema-Teorema Utama Isomorphisma pada Near-Ring

Zulfia Memi Mayasari, Yulian Fauzi, Ulfasari Rafflesia

Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Bengkulu, Indonesia

Diterima 3 April; Disetujui 15 Juni 2015

Abstrak – Near-ring merupakan pengembangan dari teori ring. Suatu himpunan tak kosong N yang dilengkapi dengan duaoperasi biner $'+'$ dan $'\bullet'$ dan ditulis sebagai $(\mathrm{N},+,\bullet)$ dikatakan near-ring jika memenuhi (i). $(\mathrm{N},+)$ grup (ii). $(\mathrm{N},\bullet)$ semigrup dan (iii). N terhadap kedua operasi tersebut bersifat distributif kiri atau distributif kanan. Jika $(\mathrm{N}_1,+,\bullet)$ dan $(\mathrm{N}_2,+',\bullet')$ near-ring dan terdapat fungsi bijektif f dari N_1 ke N_2 yang memenuhi (i). $\mathrm{f}(\mathrm{a}+\mathrm{b})=\mathrm{f}(\mathrm{a})+'\mathrm{f}(\mathrm{b})$ dan $\mathrm{f}(\mathrm{a}\bullet\mathrm{b})=\mathrm{f}(\mathrm{a})\bullet'\mathrm{f}(\mathrm{b})$ $(\forall \mathrm{a},\mathrm{b}\in \mathrm{N}_1)$ maka f dikatakan isomorphisma near-ring. Tulisan ini membahas teorema-teorema utama isomorphisma ring yang berlaku pada near-ring. Metode yang digunakan dalam pembuktian adalah metode pembuktian langsung. Hasil penelitian menunjukkan teorema utama isomorphisma ring juga berlaku pada near-ring.

Kata Kunci: ***near-ring, ring, homomorphisma, bijektif***

1. Pendahuluan

Seiring dengan perkembangan zaman, teori-teori dalam struktur aljabar juga mengalami perkembangan yang cukup berarti. Pengembangan teori ini dapat dilakukan dengan berbagai cara misalnya dengan menambahkan aksioma-aksioma tertentu atau pun menghilangkan aksioma-aksioma yang sudah ada sehingga terbentuk struktur yang baru. Salah satu pengembangan yang terdapat dalam struktur aljabar adalah teori mengenai near-ring. Near-ring merupakan pengembangan dari teori ring dengan mengurangi beberapa aksioma yang ada pada ring. Suatu himpunan $N \neq \emptyset$ dengan dua operasi biner $'+'$ dan $'\bullet'$ yang masing-masing disebut sebagai operasi pertama dan operasi kedua dikatakan near-ring jika memenuhi $(N,+)$ grup, $(N,\bullet)$ Semigrup dan $(N,+,\bullet)$ berlaku salah satu sifat distributif kanan atau distributif kiri. Himpunan N yang membentuk near-ring terhadap dua operasi $'+'$ dan $'\bullet'$ dinotasikan sebagai $(N,+,\bullet)$.

Dalam teori ring dikenal istilah isomorphisma ring yaitu homomorphisma ring yang bijektif. Sama halnya dalam teori ring, dalam near-ring juga dikenal istilah isomorphisma near-ring. Isomorphisma near-ring merupakan suatu pemetaan dari suatu near-ring N_1 ke near-ring N_2 yang bersifat mengawetkan kedua operasi biner dari near-ring tersebut dan bersifat bijektif. Terdapat tiga Teorema Utama Isomorphisma dalam teori ring yaitu Teorema Utama Isomorphisma I, Teorema Utama Isomorphisma II dan Teorema Utama Isomorphisma III.

Terdapat banyak kasus telah dibahas secara mendalam pada teori ring namun belum dibahas dalam near-ring, sehingga near-ring masih menarik perhatian peneliti. Beberapa peneliti telah melakukan penelitian mengenai near-ring diantaranya [1] yang meneliti tentang hubungan antara ideal near-ring dan ideal prima fuzzy near-ring, [7] yang meneliti tentang unit pada near-ring, [6] yang meneliti tentang sifat-sifat ideal dan homomorphisma pada ring yang berlaku pada near-ring, [8] yang meneliti tentang TL-Ideal near ring. Tulisan ini membahas mengenai Teorema Utama Isomorphisma II dan Teorema Utama Isomorphisma III pada teori ring yang juga berlaku pada near-ring.

2. Landasan Teori

Definisi 2.1. [2],[3],[4]
Diberikan himpunan $G \neq \emptyset$. Pada G diberikan operasi biner $'+'$. G terhadap operasi $'+'$ dikatakan grup dan ditulis $(G,+)$ jika memenuhi:
i. Tertutup yaitu $(\forall\, a,b \in G)\ a+b \in G$
ii. Assosiatif yaitu $(\forall\, a,b,c \in G)\ (a+b)+c = a+(b+c)$
iii. Mempunyai elemen identitas yaitu $(\exists\, e \in G)(\forall a \in G)\ a+e=e+a=a$
iv. Setiap elemen G mempunyai invers yaitu $(\forall a \in G)(\exists\, x \in G)\ a+x=x+a=a$
x dikatakan invers dari a dan ditulis $x=a^{-1}$

Jika $(G,+)$ bersifat komutatif yaitu $(\forall\, a,b\ \in G)\ a+b = b+a$ maka G disebut grup abelian.

Definisi 2.2. [2],[3],[4]
Diberikan himpunan $S \neq \emptyset$. Pada S diberikan operasi biner $'+'$. S terhadap operasi $'+'$ dikatakan semigrup jika memenuhi sifat assosiatif yaitu $(\forall\, a,b,c\ \in S)\ (a+b)+c = a+(b+c)$

Definisi 2.3. [2],[3],[4]
Misalkan G grup. $H \neq \emptyset \subseteq G$ dikatakan subgrup G jika H terhadap operasi yang sama dengan G juga merupakan grup dan dinotasikan dengan $H \leq G$.

Definisi 2.4. [2],[3],[4]
Misalkan H subgrup G. H dikatakan subgrup normal G jika $ghg^{-1} \in H$ $(\forall g \in G\ dan\ h \in H$

Definisi 2.5. [2],[3],[4]
Diberikan himpunan $R \neq \emptyset$. Pada R diberikan dua operasi yaitu $'+'$ dan $'\bullet'$ yang masing-masing disebut sebagai operasi pertama dan operasi kedua. R terhadap dua operasi ini dikatakan ring jika memenuhi:

I. $(R,+)$ grup abelian
II. $(R,\bullet)$ Semigrup
III. $(R,+,\bullet)$ distributif
  i. Distributif kanan yaitu $(\forall\, a,b,c\ \in R)\ (a+b)\bullet c = (a\bullet c)+(b\bullet c)$
  ii. Distributif kiri yaitu $(\forall\, a,b,c\ \in R)\ a\bullet(b+c) = (a\bullet b)+(a\bullet c)$

Himpunan R yang membentuk ring terhadap dua operasi $'+'$ dan $'\bullet'$ dinotasikan sebagai $(R,+,\bullet)$.

Definisi 2.6. [2],[3],[4]
Misalkan R ring. $S \neq \emptyset \subseteq R$ dikatakan subring R jika S terhadap operasi yang sama dengan R juga merupakan ring.

Definisi 2.7. [2],[3],[4]
Misalkan R ring. $I \neq \emptyset \subseteq R$ dikatakan ideal pada R jika memenuhi:

i. $a-b \in I\ (\forall a,b \in I)$
ii. $ar \in I\ dan\ ra \in I$ $(\forall a \in I\ dan\ r \in R)$

Definisi 2.8.[6]
Diberikan himpunan $N \neq \emptyset$. Pada N diberikan dua operasi yaitu $'+'$ dan $'\bullet'$ yang masing-masing disebut sebagai operasi pertama dan operasi kedua. N terhadap dua operasi ini dikatakan near-ring jika memenuhi:

I. $(N,+)$ grup
II. $(N,\bullet)$ Semigrup
III. $(N,+,\bullet)$ berlaku salah satu sifat distributif kanan atau distributif kiri yaitu
  i. Distributif kanan yaitu $(\forall\, a,b,c\ N)\ (a+\ \ b)\bullet c = (a\bullet c)+(b\bullet c)$ atau
  ii. Distributif kiri yaitu $(\forall\, a,b,c\ \in N)\ a\bullet(b+c) = (a\bullet b)+(a\bullet c)$

Himpunan N yang membentuk near-ring terhadap dua operasi $'+'$ dan $'\bullet'$ dinotasikan sebagai $(N,+,\bullet)$.

Definisi 2.9. [6]
Misalkan N near-ring. $S \neq \emptyset \subseteq N$ dikatakan subnear-ring N jika S terhadap operasi yang sama dengan N juga merupakan near-ring.

Definisi 2.10. (Lihat [1], [5], [7])
Misalkan N near-ring. $I \neq \emptyset \subseteq N$ dikatakan ideal N jika memenuhi:

i. $(I,+)$ subgrup normal $(N,+)$
ii. $NI \subseteq I$
iii. $(n+i)m - nm \in I, (\forall i \in I\ dan\ m,n \in N)$

Sifat 2.11. [6]
Misalkan I ideal pada near-ring N dan $N/_I = \{I+n | n \in N\}$ maka $N/_I$ merupakan near-ring (dinamakan near-ring faktor)

Definisi 2.12 (Lihat [1], [5], [6])
Diberikan dua near-ring $(N_1,+,\bullet)$ dan $(N_2,+',\bullet')$. Pemetaan $f: N_1 \longrightarrow N_2$ dikatakan homomorphisma near-ring jika memenuhi $(\forall\, a,b\ \in N_1)$:

i. $f(a+b) = f(a)+'f(b)$
ii. $f(a\bullet b)\ =\ f(a)\bullet' f(b)$

Definisi 2.13. (Lihat [1], [5])
Suatu homomorphisma f dari near-ring N_1 ke ring N_2 disebut:

i. Monomorphisma jika f merupakan pemetaan injektif
ii. Epimorphisma jika f merupakan pemetaan
iii. Isomorphisma jika f merupakan pemetaan bijektif

Dua Near-ring N_1 dan N_2 dikatakan isomorfis, dinotasikan dengan $N_1 \cong N_2$ jika terdapat suatu isomorphisma dari N_1 ke N_2.

Definisi 2.14. (Lihat [1], [6])
Diberikan homomorphisma Near-ring $f: N_1 \longrightarrow N_2$. Kernel dari f dinotasikan sebagai $\ker(f)$ dan didefinisikan sebagai himpunan semua elemen N_1 yang dipetakan oleh f ke elemen nol (elemen identitas) N_2 yaitu $\ker(f) = \{x \in N_1 | f(x) =\ 0_{N_2}\}$

Sifat 2.15. [6]
Jika $f: N_1 \longrightarrow N_2$ homomorphisma near-ring maka $\ker(f)$ merupakan ideal di N_1.

Sifat 2.16. [6]
Jika I_1, I_2 ideal-ideal pada Near-ring N maka:

i. $I_1 \cap I_2$ ideal N
ii. $I_1 + I_2$ ideal N

Sifat 2.17. [5]

Jika N_1 near-ring dan I ideal N_1 maka $f: N_1 \longrightarrow {}^{N_1}/_{I}$ dengan definisi $f(n) = I + n\ (\forall n \in N_1)$ merupakan epimorphisma near-ring.

Teorema 2.18. (Teorema Utama Isomorphisma Ring I) [2], [3]
Jika $f: R_1 \longrightarrow R_2$ homomorphisma ring maka ${}^{R_1}/_{Ker\,(f)} \cong Im\,(f)$

Teorema 2.19. (Teorema Utama Isomorphisma Ring II) [2], [3]
Jika R ring, S subring R dan I ideal R maka $S + I$ subring R, I ideal $S + I$, $S \cap I$ ideal S dan $(S + I)/I \cong S/(S \cap I)$

Teorema 2.20. (Teorema Utama Isomorphisma Ring III) [2], [3]
Jika R ring, I, J ideal R dan $I \subseteq J$ maka J/I ideal R/I dan

$${}^{R}/_{J} \cong {}^{{}^{R}/_{I}}\Big/_{{}^{J}/_{I}}$$

Sifat 2.21. [5]
Jika $f: N_1 \longrightarrow N_2$ homomorphisma near-ring maka ${}^{N_1}/_{Ker\,(f)} \cong Im\,(f)$

3. Hasil dan Pembahasan

Pada bagian ini diberikan hasil dan pembahasan mengenai Teorema Utama Isomorphisma II dan Teorema Utama Isomorphisma III dalam teori Ring yang juga berlaku dalam Near-ring.

Hasil 1.
Jika N near-ring, S, I ideal N maka $S + I$ subnear-ring N, I ideal $S + I$, $S \cap I$ ideal S dan $(S + I)/I \cong S/(S \cap I)$

Bukti:
1. Akan dibuktikan $S + I$ subnear-ring N
Ambil sebarang $s_1, s_2 \in S$ dan $i_1, i_2 \in I$ maka $(s_1 + i_1)(s_2 + i_2) = s_1 s_2 + (i_1 s_2 + s_1 i_2 + i_1 i_2) \in S + I$.
Jadi terbukti bahwa $S + I$ subnear-ring N ... ...(3.1)
2. Akan dibuktikan I ideal $S + I$.
Karena I ideal N, $S + I$ ideal N dan $I \subseteq S + I$ jelas bahwa I ideal $S + I$.
Jadi terbukti bahwa I ideal $S + I$ .... (3.2)
3. Akan dibuktikan $S \cap I$ ideal S.
Berdasarkan Sifat 2.16 dan karena $S \subseteq N$ maka $S \cap I$ ideal S.
Jadi terbukti bahwa $S \cap I$ ideal S .... (3.3)
4. Selanjutnya untuk menunjukkan $(S + I)/I \cong S/(S \cap I)$ berdasarkan Sifat 2.21 cukup dengan membuktikan terdapat epimorphisma $f : S \longrightarrow {}^{N}/_{I}$ dengan $\ker(f) = S \cap I$. Jadi berdasarkan Sifat 2.21 ${}^{S}/_{S\,\cap\,I} = {}^{S}/_{\ker(f)} \cong im(f)$. Karena $im(f)$ merupakan himpunan semua koset I dalam S sehingga $im(f) = (S + I)/I$. Terbukti bahwa:
$(S + I)/I \cong S/(S \cap I)$ .... (3.4)
Dari (3.1)-(3.4) terbukti bahwa Jika N near-ring, S, I ideal N maka $S + I$ subnear-ring N, I ideal $S + I$, $S \cap I$ ideal S dan $(S + I)/I \cong S/(S \cap I)$. ■

Hasil 2.
Jika N near-ring, I, J ideal N dan $I \subseteq J$ maka J/I ideal N/I dan

$${}^{N}/_{J} \cong {}^{{}^{N}/_{I}}\Big/_{{}^{J}/_{I}}$$

Bukti:
1. Akan dibuktikan ${}^{J}/_{I}$ ideal ${}^{N}/_{I}$

I, J ideal N berdasarkan Sifat 2.11 maka ${}^{N}/_{I}$ dan ${}^{N}/_{J}$ near-ring. Karena I, J ideal N dan $I \subseteq J$ maka berdasarkan Sifat 2.11 jelas ${}^{J}/_{I}$ near-ring. Untuk menunjukkan ${}^{J}/_{I}$ subgrup normal ${}^{N}/_{I}$ cukup ditunjukkan ${}^{J}/_{I} \subseteq {}^{N}/_{I}$ dan $\left(\forall n \in {}^{N}/_{I}\right)\left(\forall i \in {}^{J}/_{I}\right)\ nin^{-1} \in {}^{J}/_{I}$.
Ambil sebarang $x \in {}^{J}/_{I}$ misalkan $x = Ij_1,\ j_1 \in J$. Karena $J \leq N$ maka $j_1 \in N$ sehingga $x = Ij_1 \in {}^{N}/_{I}$.
Jadi ${}^{J}/_{I} \subseteq {}^{N}/_{I}$ .... (3.5)
Selanjutnya ambil sebarang $n \in {}^{N}/_{I}$ dan $i \in {}^{J}/_{I}$. Akan ditunjukkan $nin^{-1} \in {}^{J}/_{I}$.
$n \in {}^{N}/_{I}$ misalkan $n = In_1,\ n_1 \in N$
$i \in {}^{J}/_{I}$ misalkan $i = Ij_1,\ j_1 \in J$
Maka $nin^{-1} = In_1\, Ij_1 (In_1)^{-1} = In_1 j_1 n_1^{-1}$. Karena $n_1 \in N, j_1 \in J$ dan J subgrup normal N maka $n_1 j_1 n_1^{-1} \in J$ sehingga $In_1 j_1 n_1^{-1} \in {}^{J}/_{I}$.
Jadi $nin^{-1} \in {}^{J}/_{I}$. .... (3.6)
Dari (3.5) dan (3.6) terbukti bahwa:
${}^{J}/_{I}$ subgrup normal ${}^{N}/_{I}$ .... (3.7)
Selanjutnya akan ditunjukkan:
$\left({}^{N}/_{I}\right)\left({}^{J}/_{I}\right) \subseteq {}^{J}/_{I}$.
Ambil sebarang $x \in \left({}^{N}/_{I}\right)\left({}^{J}/_{I}\right)$ misalkan $x = (In_1)(Ij_1),\ n_1 \in N$ dan $j_1 \in J$
$x = In_1 j_1$. Karena $n_1 \in N, j_1 \in J$ dan J subgrup normal N maka $n_1 j_1 \in J$. Jadi $x \in {}^{J}/_{I}$
Terbukti bahwa $\left({}^{N}/_{I}\right)\left({}^{J}/_{I}\right) \subseteq {}^{J}/_{I}$ .... (3.8)
Selanjutnya akan ditunjukkan:

$$(n + i)m - nm \in {}^{J}/_{I}\ \ (\forall n, m \in {}^{N}/_{I}, i \in {}^{J}/_{I})$$

Ambil sebarang $n, m \in N/_I$ dan $i \in J/_I$. Misalkan $n = In_1,\ m = In_2,\ n_1, n_2 \in N$ dan $i = Ij_1$.

$$(n+i)m - nm = (In_1 + Ij_1)In_2 - In_1In_2$$
$$= I(n_1 + j_1)In_2 - In_1n_2$$
$$= I(n_1n_2 + j_1n_2) - In_1n_2$$
$$= Ij_1n_2 \text{ dengan } j_1n_2 \in J$$

Terbukti bahwa $(n+i)m - nm \in J/_I$ ……………… (3.9)

Dari (3.7), (3,8) dan (3.9) terbukti bahwa:

$J/_I$ ideal $N/_I$ .... (3.10)

2. Akan dibuktikan $N/_J \cong \dfrac{N/_I}{J/_I}$.

Karena telah terbukti bahwa $J/_I$ ideal $N/_I$ berdasarkan Sifat 2.11 maka terbentuk near-ring $\dfrac{N/_I}{J/_I}$.

Selanjutnya untuk menunjukkan $N/_J \cong \dfrac{N/_I}{J/_I}$ berdasarkan Sifat 2.21 cukup dengan membuktikan terdapat epimorphisma $f : N/_I \rightarrow N/_J$ dengan $\ker(f) = J/_I$.

Didefinisikan $f(In) = Jn\ (\forall n \in N)$

i. Akan dibuktikan f fungsi yaitu $(\forall a, b \in N/_I)$ dengan $a = b$ maka $f(a) = f(b)$

Ambil sebarang $a, b \in N/_I$ dengan $a = b$.

Misalkan $a = In_1$ dan $b = In_2$, $n_1, n_2 \in N$

$a = b \Leftrightarrow In_1 = In_2 \Leftrightarrow n_1(n_2)^{-1} \in I$. Karena $I \subseteq J$ maka $n_1(n_2)^{-1} \in J$

$$n_1(n_2)^{-1} \in J \Leftrightarrow Jn_1 = Jn_2$$
$$\Leftrightarrow f(In_1) = f(In_2)$$
$$\Leftrightarrow f(a) = f(b)$$

Jadi $a = b \Rightarrow f(a) = f(b)$.

Terbukti bahwa f fungsi .... (3.11)

ii. Akan dibuktikan f homomorphisma yaitu $(\forall a, b \in N/_I)$ $f(a+b) = f(a) + f(b)$ dan $f(a.b) = f(a).f(b)$.

$$f(a+b) = f(In_1 + In_2) = f(I(n_1 + n_2))$$
$$= J(n_1 + n_2) = (Jn_1 + Jn_2)$$
$$= f(In_1) + f(In_2)$$
$$= f(a) + f(b)$$

Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan $f(a.b) = f(a).f(b)$.

Terbukti bahwa f homomorphisma .... (3.12)

iii. Akan dibuktikan f surjektif yaitu $\left(\forall y \in N/_J\right)\left(\exists x \in N/_I\right)$ sehingga $f(x) = y$.

Ambil sebarang $y \in N/_J$ misalkan $y = Jn_1, n_1 \in N$. $y = Jn_1 \Leftrightarrow y = f(In_1)$ dengan $In_1 \in N/_I$. Jadi $\left(\forall y \in N/_J\right)\left(\exists x = In_1 \in N/_I\right)$ sehingga $f(x) = y$.

Terbukti bahwa f surjektif .... (3.13)

iv. Akan dibuktikan $\ker(f) = J/_I$

Ambil sebarang $Ij_1 \in J/_I$, $j_1 \in J$ maka $Jj_1 = J \Leftrightarrow f(Ij_1) = J$. Karena J elemen identitas di $N/_J$ maka $Ij_1 \in \ker(f) \Leftrightarrow Ij_1 \in J/_I$.

Terbukti bahwa $\ker(f) = J/_I$ .... (3.14)

Dari (3.11)-(3.14) terbukti bahwa:

$N/_J \cong \dfrac{N/_I}{J/_I}$ .... (3.15)

Berdasarkan (3.10) dan (3.15) Terbukti bahwa Jika N near-ring, I, J ideal N dan $I \subseteq J$ maka J/I ideal N/I dan $N/_J \cong \dfrac{N/_I}{J/_I}$ ∎

4. Kesimpulan

Dari hasil pembahasan dapat disimpulkan bahwa Teorema Utama Isomorphisma II dan Teorema Utama Isomorphisma III dalam teori Ring yang juga berlaku dalam Near-ring sebagaimana dinyatakan dalam Hasil 1 dan Hasil 2.

Daftar Pustaka

[1] Abdurrahman, S. Thresye dan Hijriati, N. 2013. Ideal Prima Fuzzy Near-Ring. *Jurnal Matematika Murni dan Terapan Epsilon* Vol. 7 No.01. Hal.21-32.

[2] Adkinds, W.A dan Weintraub, S.H. 1992. *Algebra: An Approach via Module Theory*. Springer –Verlag. New York.

[3] Dummit, D.S. and Foote, R.M. 1999. *Abstract Algebra*. Second Edition. John Wiley and Sons Inc. New York

[4] Fraleigh, J.B. 1999. *A First Course in Abstract Algebra*. Addison Wesley Publishing Company Inc.

[5] Pilz, G. 1983. *Near-rings*. North-Holland. New York.

[6] Sahputri, J.A. 2016. Sifat-Sifat Ideal dan Homomorphisma pada Ring yang Berlaku pada Near-Ring. Skripsi. Jurusan Matematika FMIPA Unib. Bengkulu.

[7] Tomasouw, B.P dan Persulessy, E.R. 2010. *Unit pada Near-ring*. Proseding. ISBN: 978-602-97522-0-5. Hal.101-110.

[8] Yadav, J.D dan Pawar,Y.S. 2012. TL-Ideals of Near-rings. *International Journal of Fuzzy Logle System (IJFLS)* 2. No.04. Hal.11-30.