SKRIPSI

SOLUSI PERSAMAAN DIFERENSIAL LINEAR NONHOMOGEN ORDE DUA DENGAN METODE VARIASI PARAMETER PADA SISTEM GERAK PAKSA PADA PEGAS

BELLA GRACE SARA BR LUBIS
F1A016024

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS BENGKULU

2020

SKRIPSI

SOLUSI PERSAMAAN DIFERENSIAL LINEAR NONHOMOGEN ORDE DUA DENGAN METODE VARIASI PARAMETER PADA SISTEM GERAK PAKSA PADA PEGAS

Diajukan untuk memenuhi Salah Satu Syarat

Memperoleh Gelar Sarjana Matematika

BELLA GRACE SARA BR LUBIS

F1A016024

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS BENGKULU

2020

HALAMAN PENGESAHAN

SKRIPSI

SOLUSI PERSAMAAN DIFERENSIAL LINEAR NONHOMOGEN ORDE DUA DENGAN METODE VARIASI PARAMETER PADA SISTEM GERAK PAKSA PADA PEGAS

Oleh :

BELLA GRACE SARA BR LUBIS

F1A016024

Telah dipertahankan di depan tim penguji
Pada tanggal 08 Juli 2020

Pembimbing Pendamping	Pembimbing Utama
Zulfia Memi Mayasari, S.Si, M.Si	Ulfasari Rafflesia, S.Si, M.Si
NIP. 197312021998022001	NIP. 198111182005012002

Penguji II	Penguji I
Siska Yosmar, S.Si, M.Sc	Dr. Mulia Astuti, S.Si, M.Si
NIP. 198202182014042001	NIP. 197804222002122003

Mengetahui Ketua Jurusan	Mengesahkan Dekan
Dr. Mulia Astuti, S.Si, M.Si	Prof. Dr. Irfan Gustian, S.Si., M.Si
NIP. 197804222002122003	NIP. 197208041998021002

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa dalam skripsi ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk skripsi maupun untuk memperoleh gelar sarjana di suatu Perguruan Tinggi dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang penah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan dalam daftar pustaka.

Bengkulu, Juli 2020

Bella Grace Sara Br Lubis

MOTTO DAN PERSEMBAHAN

MOTTO

"Doakanlah apa yang akan dikerjakan dan kerjakanlah apa yang telah didoakan"

PERSEMBAHAN

Puji syukur Atas Kehadirat Tuhan Yang Maha Esa atas berkat karunia-Nya lah saya dapat menyelesaikan penulisan Skripsi ini dengan baik.

Kupersembahkan karya sederhana ini kepada orang-orang yang sangat kusayangi dan kubanggakan :

- Kedua orang tuaku tercinta Ayahanda Maringan Lubis dan Ibunda Hotmaida Situmorang, S. Pd yang selalu memberikan kasih sayang, doa dan perhatian selama hidupku. Serta memberikan support, motivasi dan dukungan kepada saya agar saya dapat menyelesaikan skripsi dengan baik.
- Untuk Abang ku (Bona Kuasa Lubis, S.P dan Bri Anugrah Putra Lubis, A.Md)) dan Adekku (Benoni Hizkia Lubis dan Belovid Eva Lubis) terimakasih kepada kalian karena kalian memberikan dukungan dan support untukku.
- Sahabat-sahabatku (Gladis, Septyana, Nurul, Santa, Kikin, Widya, Dian), teman-teman satu Coolku Angella, Kak Sinta, Friska, Atikoh, Indri, Triuli, Frans, Rahmad, Lusi. Terimakasih telah memberikan banyak cerita, tempat bertukar pikiran dan pengalaman selama ini.
- Rekan seperjuangan Leryman Octavianus Hutapea yang telah membersamai dari awal hingga akhir dalam menyelesaiakan skripsi ini

KATA PENGANTAR

Segala puji syukur kehadirat Tuhan Yang Maha Esa, yang telah memberikan karunia-Nya sehingga peneliti dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul **"Solusi Persamaan Diferensial Linear Nonhomogen Orde Dua dengan Metode Variasi Parameter pada Sistem Gerak Paksa pada Pegas"**

Selama penyusunan skripsi ini, penulis telah banyak menerima bimbingan, arahan, dan bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, dengan segala kerendahan hati pada kesempatan ini peneliti mengucapkan terima kasih kepada:

1. Ibu **Ulfasari Rafflesia, S.Si., M.Si** selaku Dosen Pembimbing Utama yang telah banyak meluangkan waktu dalam penulisan skripsi ini.
2. Ibu **Zulfia Memi Mayasari, S.Si., M.Si** selaku Dosen Pembimbing Pendamping yang telah banyak membantu, memberikan bimbingan, arahan, motivasi, masukan dalam penulisan skripsi ini.
3. Ibu **Mulia Astuti, S.Si., M.Si** selaku Dosen Pembimbing Akademik dan Dosen Penguji I yang telah meluangkan waktu dalam memberikan bimbingan, arahan, dan motivasi selama penulisan skripsi ini.
4. Ibu **Siska Yosmar, S.Si., M.Sc** selaku Dosen Penguji II yang telah banyak memberikan bimbingan, arahan, dan motivasi selama penulisan skripsi ini.
5. **Bapak dan Ibu Dosen Jurusan Matematika** yang telah memberikan ilmu pengetahuan kepada peneliti.

Bengkulu, Juli 2020

Penulis

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

SOLUSI PERSAMAAN DIFERENSIAL LINEAR NONHOMOGEN ORDE DUA DENGAN METODE VARIASI PARAMETER PADA SISTEM GERAK PAKSA PADA PEGAS

Oleh

BELLA GRACE SARA LUBIS

F1A016024

Persamaan diferensial merupakan suatu persamaan yang menyangkut satu atau lebih fungsi (peubah tak bebas) beserta turunannya terhadap satu atau lebih variabel bebas yang terlibat. Terdapat dua persamaan diferensial yaitu persamaan diferensial biasa (PDB) dan persamaan diferensial parsial (PDP). Jenis persamaan diferensial dapat dilihat dari bentuk, orde, koefisien dan kelinearannya, sehingga banyak cara untuk menyelesaikannya. Tujuan dari penelitian ini yaitu untuk mendapatkan solusi persamaan diferensial linear nonhomogen orde dua dengan metode variasi parameter pada sistem gerak paksa pada pegas. Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa metode variasi parameter dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial linear nonhomogen orde dua pada sistem gerak paksa pada pegas

Kata Kunci : *Variasi Parameter, Persamaan Diferensial Linear, Sistem Gerak Paksa Pada Pegas.*

ABSTRACT

SOLUTION OF NONHOMOGENEOUS SECOND ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS BY VARIATION PARAMETER IN THE FORCED MOTION SYSTEM IN THE SPRING

By

BELLA GRACE SARA LUBIS

F1A016024

Differential equation are equation involving one or more function (independent variables) and their derivatives with one or more independent variables involved. There are two differential equations is ordinary differential equations (ODE) and partial differential equations (PDE). The type of differential can be seen from its shape, order, coefficient and continuity, so there are many ways to solve it. The porpuse of this research is to get solution of equation differential linear nonhomogen two order with parameter variation on system forced motion on spring. The result of this study indicate that the method of parameter variation can be used to solve the second order nonhomogen linear differential equation in a forced motion system on a spring.

Keywords : *Variation Parameter, Linear Differential Equation, Spring Forced Motion System*

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Dalam perkembangan dan kemajuan ilmu pengetahuan dan teknologi, ilmu matematika sangat diperlukan dalam pemecahan masalah. Kemajuan teknologi yang sangat mengagumkan ini tidak mungkin dapat terjadi tanpa bantuan matematika. Peran utama matematika yaitu memberikan cara berfikir yang jelas, logis, tepat dan konsisten sebagai sarana pengembangan ilmu pengetahuan. Seiring perkembangan zaman, ilmu matematika berkembang dan hadir sebagai hal yang mendasar dan perlu dipelajari pada setiap disiplin ilmu. Dalam suatu fenomena yang semakin kompleks maka perlu adanya metode penyelesaian agar suatu permasalahan dapat terselesaikan.

Salah satu model matematika yang cukup penting adalah persamaan diferensial. Persamaan diferensial adalah persamaan matematika untuk fungsi satu variabel atau lebih yang menghubungkan fungsi itu sendiri dan turunannya dalam berbagai orde. Berdasarkan jumlah variabel bebasnya persamaan diferensial dibagi menjadi dua kelompok, yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial. Persamaan diferensial biasa adalah persamaan yang hanya mempunyai satu variabel bebas, sedangkan persamaan diferensial parsial adalah persamaan yang mempunyai lebih dari satu variabel bebas.

Persamaan diferensial banyak diterapkan dalam berbagai bidang sains dan teknologi, seperti dalam bidang fisika yaitu sistem gerak paksa pada pegas. Sistem gerak paksa pada pegas adalah suatu gerakan yang dipengaruhi oleh gaya eksternal dan dilakukan secara berulang dari suatu benda, dimana setelah menempuh selang waktu tertentu benda tersebut akan kembali kedalam posisi kesetimbangannya. Pada permasalahan model matematika pada sistem gerak paksa pada pegas dapat diselesaikan dengan menggunakan Persamaan diferensial linear nonhomogen, karena didalam sistem gerak paksa pada pegas dipengaruhi oleh gaya eksternal. Gaya eksternal adalah gaya pada sistem yang dilakukan oleh benda dari luar.

Persamaan diferensial biasa dapat dibedakan menjadi 2 jenis yaitu persamaan diferensial linear homogen dan persamaan diferensial linear nonhomogen. Untuk menyelesaikan persamaan diferensial linear nonhomogen dapat dilakukan dengan beberapa metode di antaranya adalah metode koefisien konstan dan metode variasi parameter. Metode koefisien konstan adalah metode untuk menentukan penyelesaian khusus persamaan diferensial linear nonhomogen dengan koefisien konstan. Metode koefisien konstan hanya dapat digunakan jika fungsi $g(x)$ di ruas kanan adalah berupa polinom, fungsi trigonometri, fungsi eksponen atau penjumlahan dan perkalian dari fungsi eksponen dan fungsi trigonometri. Metode variasi parameter adalah metode untuk menentukan penyelesaian khusus persamaan diferensial linear nonhomogen dengan koefisien variabel. Prinsip metode ini adalah mengubah variabel konstanta menjadi variasi parameter (Herdiana, 2011).

Penyelesaian persamaan diferensial linear nonhomogen dengan koefisien konstan telah diteliti oleh Sari (2012) dengan menggunakan metode *Predictor-Corrector* dan memperoleh solusi secara numerik. Pada penelitian ini peneliti membahas solusi persamaan diferensial linear nonhomogen orde dua dengan metode variasi parameter.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, maka permasalahan yang dibahas dalam penelitian ini adalah bagaimana solusi persamaan diferensial linear nonhomogen orde dua dengan metode variasi parameter pada sistem gerak paksa pada pegas.

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah untuk mengetahui solusi persamaan diferensial linear nonhomogen orde dua dengan metode variasi parameter pada sistem gerak paksa pada pegas.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini bagi peneliti adalah mengetahui bagaimana solusi persamaan diferensial linear nonhomogen orde dua dengan metode variasi parameter. Manfaat bagi pembaca adalah memberikan wawasan dan pengetahuan bahwa persamaan diferensial linear nonhomogen orde dua dapat diselesaikan dengan metode variasi parameter.

1.5 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan skripsi dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

BAB I : PENDAHULUAN

Berisi latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, dan sistematika penelitian.

BAB II : LANDASAN TEORI

Menjelaskan beberapa teori persamaan diferensial, persamaan diferensial biasa, sistem gerak paksa pada pegas dan metode variasi parameter.

BAB III : TELADAN DAN PENERAPAN

Menjelaskan hasil dan teladan yang dilakukan peneliti dalam penelitian ini.

BAB IV : KESIMPULAN DAN SARAN

Pada bab ini berisi kesimpulan dan saran dari seluruh pengerjaan skripsi ini.

DAFTAR PUSTAKA

BAB II
LANDASAN TEORI

2.1 Persamaan Diferensial Biasa

Persamaan diferensial adalah persamaan yang menyangkut turunan fungsi dari satu atau lebih variabel terikat terhadap satu atau lebih variabel bebas. Persamaan diferensial biasa (PDB) adalah suatu persamaan diferensial yang melibatkan hanya satu variabel bebas. Jika diambil $y(x)$ sebagai suatu fungsi satu variabel, dengan x dinamakan variabel bebas dan y dinamakan variabel terikat, maka suatu persamaan diferensial biasa dapat dinyatakan dalam bentuk :

$$F\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0 \tag{2.1}$$

(Munir, 2010)

Pada persamaan diferensial terdapat orde dan derajat. Orde persamaan diferensial adalah turunan tertinggi dari persamaan tersebut. Derajat atau pangkat dari suatu persamaan diferensial adalah pangkat tertinggi dari turunan tertinggi suatu persamaan diferensial (Finizio dan Ladas, 1988).

2.2 Persamaan Diferensial Linear Homogen

Bentuk umum Persamaan Diferensial Linear (PDL) orde$-n$ adalah :

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \tag{2.2}$$

dengan, $a_n(x), \dots, a_0(x)$ adalah fungsi-fungsi yang kontinu pada suatu selang I, serta $a_n(x) \neq 0$. Persamaan Diferensial (PD) disebut linear, jika memenuhi kriteria sebagai berikut:

1. Tidak terdapat perkalian antara variabel terikat dengan turunannya.
2. Peubah tak bebas dan turunannya paling tinggi pangkat satu.

3. Variabel terikat y dan semua turunannya $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ adalah derajat satu.
4. Koefisien $a_{0,} a_1, \ldots, a_n$ dari $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ hanya bergantung pada variabel bebas x.

Persamaan differensial linear homogen merupakan suatu persamaan jika pada ruas kiri persamaan tersebut hanya mengandung variabel terikat beserta turunannya, sedangkan pada ruas kanan yang tersisa hanya nol (Kusumah, 1989). Bentuk umum persamaan diferensial linear homogen orde$-n$ adalah :

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0 \qquad (2.3)$$

dengan, $a_n(x), \ldots, a_0(x)$ adalah fungsi-fungsi yang kontinu pada suatu selang I, serta $a_n(x) = 0$ untuk setiap $x \in I$ (Zill, 2013).

Teorema 2.2.1 (Solusi umum Persamaan Diferensial Linear Homogen). (Zill, 2013) *Misalkan $y_1, y_2, \ldots, y_n$ menjadi solusi dari persamaan diferensial linear homogen orde$-n$ pada Persamaan (2.3) dalam interval I. Maka solusi umum dari persamaan pada interval I adalah :*

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x) \qquad (2.4)$$

dengan, c_i, $i = 1,2,\ldots,n$ adalah konstan.

2.2.1 Penyelesaian Persamaan Diferensial Linear Homogen Orde Dua

Pada kasus persamaan diferensial linear homogen kerap kali terjadi kesulitan pada penyelesaiannya, sehingga metode numerik merupakan solusi untuk menyelesaikan permasalahan tersebut. Penyelesaian persamaan diferensial linear homogen dapat diselesaikan secara eksak yaitu dengan persamaan kuadrat (Afri, 2019). Bentuk umum persamaan kuadrat adalah :

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ dengan } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ serta } a \neq 0 \tag{2.5}$$

dengan, a, b adalah koefisien, c adalah konstanta dan x adalah variabel. Untuk mencari akar-akar persamaan kuadrat dapat digunakan dengan beberapa metode salah satunya dengan menggunakan rumus abc. Bentuk rumus abc untuk menyelesaikan akar-akar persamaan kuadrat pada Persamaan (2.5) adalah :

$$m_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \quad \text{dan} \quad m_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

Kemungkinan nilai m_1 dan m_2 bergantung dari nilai D, yaitu :

a. Bila $D > 0$ maka $m_1 \neq m_2$ (akar real dan berbeda)

   Jika akar-akar persamaan karakteristik adalah real dan semuanya berbeda, maka solusi persamaan $e^{m_1 x}, e^{m_2 x}, \dots, e^{m_n x}$ merupakan bilangan real dan berbeda. Misalkan $y_1(x) = e^{m_1 x}$, $y_2(x) = e^{m_2 x}, \dots, y_n(x) = e^{m_n x}$ adalah solusi dari persamaan diferensial (PD), maka solusi umum persamaan diferensial (PD) adalah :

$$y_c(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x)$$

$$y_c(x) = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + \cdots + c_n e^{m_n x} \tag{2.6}$$

b. Bila $D < 0$ maka m_1, m_2 merupakan bilangan kompleks (imajiner)

   Jika persamaan karakteristik mempunyai akar-akar kompleks, maka akar-akar kompleks tersebut mempunyai bentuk $\alpha \pm \beta i$. Misalkan $m_1 = \alpha + \beta i$ dan $m_2 = \alpha - \beta i$ dimana α dan $\beta > 0$ dan $i^2 = -1$, sehingga solusi umumnya adalah :

$$y_c(x) = c_1\, e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2\, e^{\alpha x} \sin \beta x \tag{2.7}$$

c. Bila $D = 0$ maka $m_1 = m_2$ (akar real dan sama)

   Jika persamaan karakteristik mempunyai akar-akar yang sama, maka solusi umumnya tidak lagi mempunyai bentuk seperti Persamaan (2.6), tetapi mempunyai bentuk berikut $e^{m_1 x}, xe^{m_1 x}, x^2 e^{m_1 x}, \dots, x^{n-1} e^{m_n x}$, dengan $m_1 = m_2$, maka kita hanya memperoleh satu solusi yaitu $y_1(x) = e^{m_1 x}$, sehingga solusi umumnya adalah :

$$y_c(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

$$y_c(x) = c_1 e^{m_1 x} + c_2 xe^{m_1 x} \tag{2.8}$$

(Zill, 2013)

2.3 Persamaan Diferensial Linier Nonhomogen

Bentuk umum persamaan diferensial linear nonhomogen $orde-n$ seperti pada persamaan (2.2) yaitu :

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

dengan, $a_n(x), \dots, a_0(x)$ adalah fungsi-fungsi yang kontinu pada suatu selang I, serta $a_n(x) \neq 0$.

Teorema 2.3.1 (Solusi umum Persamaan Diferensial Linear Nonhomogen). (Zill, 2013) *Misalkan y menjadi solusi khusus dari persamaan diferensial orde ke-n nonhomogen (2.2) pada interval I, dan misalkan $y_{1,}\, y_{2,}, \dots, y_{n,}$ menjadi solusi dari persamaan diferensial homogen (2.3) pada interval I.Maka solusi umum dari persamaan pada interval I adalah :*

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x) + y_p \tag{2.9}$$

dengan $y_1, y_2, \dots, y_n$ adalah solusi dari Persamaan (2.3) pada interval I, y_p adalah solusi partikular dan c_i, $i = 1,2, \dots, n$ adalah konstan.

2.3.1 Persamaan Diferensial Linear Orde Satu

Bentuk umum dari PD linear orde satu adalah :

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x) \tag{2.10}$$

dapat ditulis kedalam bentuk standarnya adalah :

$$y' + P(x)y = f(x) \tag{2.11}$$

(Zill, 2013)

2.3.2 Persamaan Diferensial Linear Orde Dua

Bentuk umum dari PD linear orde dua adalah :

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x) \tag{2.12}$$

dapat ditulis kedalam bentuk standarnya adalah :

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \tag{2.13}$$

dengan, $P(x), Q(x)$ dan $f(x)$ adalah kontinu di interval I dan pada Persamaan (2.12) koefisien $a_2(x), a_1(x), a_0(x)$ dan g adalah fungsi-fungsi dari x (Zill, 2013)

2.4 Metode Variasi Parameter

Metode variasi parameter merupakan metode untuk menentukan penyelesaian khusus persamaan diferensial linear (PDL) nonhomogen dengan koefisien variabel. Penyelesaian umum persamaan diferensial linear nonhomogen orde dua pada Persamaan (2.12) adalah

$$y = y_c + y_p \tag{2.14}$$

Dimana, $y_c = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ dan y_p adalah penyelesaian khusus pada persamaan diferensial nonhomogen. Prinsip metode variasi parameter ini adalah mengubah variabel konstanta dengan variasi parameter. Misal pada persamaan diferensial linear nonhomogen orde dua konstanta c_1 dan c_2 pada solusi umum PD homogen $y_c = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ pada Persamaan (2.4) diubah dengan variasi parameter u_1 dan u_2, sehingga solusi khusus persamaan diferensial nonhomogen adalah :

$$y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) \tag{2.15}$$

dengan, $u_1(x)$ dan $u_2(x)$ fungsi dari x, dan $y_1(x)$ dan $y_2(x)$ adalah fungsi-fungsi penyelesaian homogen. Selanjutnya, untuk memperoleh fungsi $u_1(x)$ dan $u_2(x)$ terlebih dahulu lakukan penurunan dua kali pada Persamaan (2.15) sehingga,

$$y_p{}' = u_1 y_1{}' + y_1 u_1{}' + u_2 y_2{}' + y_2 u_2{}' \tag{2.16}$$

$$y_p'' = u_1 y_1'' + y_1{}' u_1{}' + y_1 u_1{}'' + u_1{}' y_1{}' + u_2 y_2{}'' + y_2{}' u_2{}' + y_2 u_2{}'' + y_2{}' u_2{}' \tag{2.17}$$

Substitusikan Persamaan (2.15), (2.16) dan (2.17) kedalam Persamaan (2.13) sehingga diperoleh :

$$\begin{aligned} y_p'' + P(x)y_p' + Q(x)y = {} & u_1[y_1'' + Py_1' + Qy_1] + u_2[y_2'' + Py_2' + Qy_2] + y_1 u_1'' \\ & + u_1{}' y_1{}' + y_2 u_2{}'' + y_2{}' u_2{}' + P[y_1 u_1' + y_2 u_2{}'] \\ & + u_1{}' y_1{}' + y_2{}' u_2{}' \end{aligned} \tag{2.18}$$

Dua suku pertama $y_1'' + Py_1' + Qy_1$ dan $y_2'' + Py_2' + Qy_2$ adalah nol, karna y_1 dan y_2 adalah solusi dari persamaan homogen sehingga,

$$\begin{aligned} y_p'' + P(x)y_p' + Q(x)y &= \frac{d}{dx}[u_1{}' y_1] + \frac{d}{dx}[u_2{}' y_2] + P[y_1 u_1' + y_2 u_2{}'] + u_1{}' y_1{}' \\ & \quad + u_2{}' y_2{}' \\ &= \frac{d}{dx}[y_1 u_1' + y_2 u_2{}'] + P[y_1 u_1' + y_2 u_2{}'] + u_1{}' y_1{}' \\ & \quad + u_2{}' y_2{}' = f(t) \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} y_1 u_1{}' + y_2 u_2{}' &= 0 \\ y_1{}' u_1{}' + y_2{}' u_2{}' &= f(t) \end{aligned} \tag{2.19}$$

atau dapat diberikan dalam bentuk

$$u_1{}' = \frac{W_1}{W} = \frac{-y_2\, f(t)}{W} \text{ dan } u_2{}' = \frac{W_2}{W} = \frac{-y_1\, f(t)}{W} \tag{2.20}$$

dengan demikian, fungsi u_1 dan u_2 persamaan diberikan oleh :

$$u_1 = \int \frac{W_1}{W} \text{ dan } u_2 = \int \frac{W_2}{W} \tag{2.21}$$

dimana , $W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$, $W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(t) & y_2' \end{vmatrix}$, $W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(t) \end{vmatrix}$ (2.22)

(Zill, 2013)

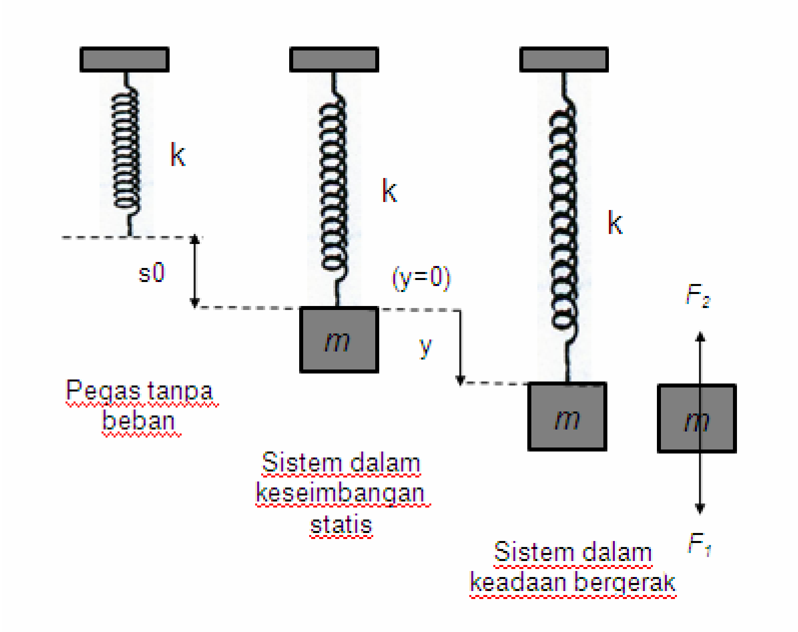
2.5 Masalah Nilai Awal

Masalah nilai awal adalah sebuah masalah yang melibatkan satu atau lebih fungsi yang tidak diketahui beserta turun-turunannya dalam sebuah persamaan yang memenuhi syarat awal yang diberikan. Untuk menentukan solusi tunggal dari persamaan orde kedua adalah dengan menspesifikasikan dua kondisi atau syarat yang dinamakan syarat awal, yaitu $y(x_0) = k_0$ dan $y'(x_0) = k_1$ pada sebuah titik. Dengan x_0 merupakan nilai x yang diberikan, sedangkan k_0 dan k_1 merupakan konstanta yang diberikan (Tung, K.K, 2013).

2.6 Sistem Gerak Paksa Pada Pegas

Getaran dapat didefinisikan sebagai gerak bolak-balik sebuah benda yang terjadi secara periode atau berkala pada selang waktu yang tetap. Gerak benda yang terjadi secara periodik biasanya disebut sebagai gerak harmonik. Salah satu contoh yang sering dijumpai dalam kehidupan sehari-hari adalah gerak getaran pada pegas. Gerak getaran pada pegas dapat terjadi jika terdapat gaya yang bekerja pada pegas tersebut atau dapat disebut dengan gaya luar (Daufik, 1999).

Sistem gerak pegas sederhana diilustrasikan dengan benda bermassa m yang tergantung pada suatu pegas. Jika benda itu ditarik kebawah (kearah positif) secara vertikal pada jarak tertentu dan kemudian dilepaskannya, maka benda itu bergerak secara vertikal (naik-turun). Berikut model sistem gerak benda pada pegas sederhana :



Gambar 2.1. Osilasi dari sebuah pegas dan sebuah massa

Untuk menentukan persamaan gerak sistem mekanis tersebut, perlu diperhatikan semua gaya yang bekerja pada benda itu selama pergerakannya yaitu:

a. Gaya gravitasi (F_g)

$$F_g = mg$$

dimana m merupakan massa benda dan g adalah percepatan gravitasi $(980\ {}^{cm}/_{det^2})$

b. Gaya pegas pada benda (F_p)

Menurut Hukum Hooke: " *Jika gaya tarik yang diberikan pada sebuah pegas tidak melampaui batas elastis bahan maka pertambahan panjang pegas berbanding lurus atau sebanding dengan gaya tariknya*", dan dapat ditulis sebagai berikut:

$$F_p = -kx \tag{2.23}$$

dimana, k adalah konstanta pegas dan x adalah pertambahan panjang pegas. Jika x positif (pegas ditarik) maka F_p menjadi negatif (arah keatas) tetapi jika x negatif (pegas ditekan) maka F_p menjadi positif (arah kebawah).

Dalam keadaan tidak bergerak (diam) gaya gravitasi dan gaya pegas dalam keadaan setimbang mempunyai resultan gaya yaitu nol.

$$F_g + F_p = mg - kx_0 = 0 \tag{2.24}$$

dimana x_0 adalah perubahan panjang pegas pada saat benda dalam keadaan diam, yang disebut dengan posisi kesetimbangan statis.

c. Gaya gesek / peredam (F_r)

Gaya gesek pada kecepatan rendah diaproksimasi sebanding dengan kecepatan benda itu, yang berarti bahwa :

$$F_r = -b\frac{dy}{dt} \text{ dengan } b > 0 \tag{2.25}$$

Konstanta b dinamakan konstan peredam. Konstanta kesebandingan $-b$ negatif karena gaya gesek beraksi dalam arah yang berlawanan dengan gerak.

(Bronson, 2013)

d. Gaya eksternal (F_c)

Diamsumsikan bahwa gaya ekternal F_c bergantung hanya pada waktu t dan tidak pada y atau y', ditulis sebagai $f(t)$.

Menurut Hukum II Newton, yaitu

$$F_T = ma \tag{2.26}$$

dimana m adalah massa, t adalah waktu dan F_T adalah total gaya yang bekerja pada benda. Dari Persamaan (2.26) dan (2.23) diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$ma = -ky \tag{2.27}$$

atau dapat dituliskan :

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky \tag{2.28}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + ky = 0 \tag{2.29}$$

Jika $\omega^2 = \frac{k}{m}$, maka Persamaan (2.29) dapat juga dituliskan sebagai berikut :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0 \tag{2.30}$$

Persamaan (2.30) merupakan persamaan diferensial dengan solusi sebagai berikut:

$$y(t) = A\,sin\,(\omega t + \theta) \text{ atau } y(t) = A\,cos\,(\omega t + \theta) \tag{2.31}$$

y adalah posisi perpindahan partikel terhadap waktu t. Apabila tidak ada gaya gesek maka pegas akan terus berosilasi tanpa berhenti. Gaya gesek suatu benda dipengaruhi oleh kondisi permukaan benda terhadap permukaan benda lain, seperti kekasaran permukaan. Gaya gesek dibagi menjadi dua jenis yaitu gaya gesek statis dan gaya gesek dinamis. Selanjutnya, diasumsikan bahwa gaya gesek pada sistem massa pegas adalah linear dan dipengaruhi oleh kecepatan. Total gaya yang bekerja pada massa m dalam sistem teredam adalah

$$\sum F = -ky - bv = ma \tag{2.32}$$

$$-ky - b\frac{dy}{dt} = m\frac{d^2y}{dt^2} \tag{2.33}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + ky = 0 \tag{2.34}$$

dengan b adalah konstanta redaman dan $2\gamma = \frac{b}{m}$ atau $\gamma = \frac{b}{2m}$ adalah koefisien redaman. Jika $\omega^2 = \frac{k}{m}$ maka Persamaan (2.34) dapat dituliskan kembali dalam bentuk:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\gamma\frac{dy}{dt} + \omega^2 y = 0 \tag{2.35}$$

Persamaan (2.35) merupakan persamaan diferensial orde dua dengan dua akarnya sebagai berikut :

$$r_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{(\omega_0{}^2 - \gamma^2)} \tag{2.36}$$

Solusi pendekatan Persamaan (2.35) adalah

a. Jika $\omega_0{}^2 - \gamma^2 > 0$ maka solusi pendekatan persamaanya yaitu :

$y_c(t) = c_1 e^{m_1 t} + c_2 e^{m_2 t}$ atau

$$y_c(t) = e^{-\gamma t}\left(c_1 \exp\left(t\sqrt{(\gamma^2 - \omega_0{}^2)}\right) + c_2 \exp\left(t\sqrt{(\gamma^2 - \omega_0{}^2)}\right)\right) \tag{2.37}$$

b. Jika $\omega_0{}^2 - \gamma^2 = 0$ maka solusi pendekatan persamaanya yaitu :

$y_c(t) = c_1 e^{m_1 t} + c_2 t e^{m_2 t}$ atau

$$y_c(t) = e^{-\gamma t}(c_1 + c_2 t) \tag{2.38}$$

c. Jika $\omega_0{}^2 - \gamma^2 < 0$ maka solusi pendekatan persamaanya yaitu :

$$y_c(t) = e^{-\gamma t}\left(c_1 \cos\left(t\sqrt{(\gamma^2 - \omega_0{}^2 t)}\right) + c_2 \sin\left(t\sqrt{(\gamma^2 - \omega_0{}^2 t)}\right)\right) \tag{2.39}$$

y adalah posisi perpindahan partikel terhadap waktu t yang mengalami osilasi teredam, sehingga total gaya yang bekerja pada massa m dalam sistem teredam paksa :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\gamma\frac{dy}{dt} + \omega^2 y = f(t) \tag{2.40}$$

dengan $f(t)$ adalah gaya luar dan adalah gaya redaman. Dengan mempertimbangkan gaya pemulih linier dan gaya peredam selain gaya penggerak maka Persamaan (2.40) dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\gamma\frac{dy}{dt} + \omega^2 y = F cos\, \omega t \tag{2.41}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\gamma\frac{dy}{dt} + \omega_0{}^2 y = A\, cos\, \omega t \tag{2.42}$$

Dari Persamaan (2.42) diperoleh solusi partikularnya yaitu :

$$y_p(t) = \frac{A}{\sqrt{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4^2\gamma^2}} \cos(\omega t - \theta) \quad (2.43)$$

$$A = \sqrt{{c_1}^2 + {c_2}^2} \quad (2.44)$$

Solusi umum untuk gerak harmonik teredam paksa adalah

$$y(t) = Ae^{-\gamma t}\sin((\omega t - \theta) + \frac{A}{\sqrt{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4^2\gamma^2}} \cos(\omega t - \theta) \quad (2.45)$$

y adalah posisi perpindahan partikel terhadap waktu y yang mengalami osilasi teredam terpaksa. Jika suatu sistem tidak mengalami gaya redaman maka diperoleh solusi persamaan gerak paksa pada pegasnya adalah :

$$y_p(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t \quad (2.46)$$

(Young, Roger. 2002)

BAB III
TELADAN DAN PENERAPAN

Pada bab ini dibahas solusi persamaan diferensial linear nonhomogen orde dua dengan metode variasi parameter pada sistem gerak paksa pada pegas, Solusi persamaan diferensial linear nonhomogen orde dua diselesaikan dengan menjumlahkan solusi persamaan diferensial linear homogen dengan solusi khusus persamaan diferensial linear nonhomogen. Pada bab ini diberikan lima teladan penerapan persamaan diferensial linear nonhomogen orde dua pada sistem gerak paksa pada pegas.

3.1 Penyelesaian Sistem Gerak Paksa pada Pegas dengan Metode Variasi Parameter

Teladan penerapan ini diambil dari Zill (2013).

Kasus 1: Sebuah massa sebesar 14,59 gram melekat pada pegas dengan konstanta pegas 5 lb/ft. Awalnya, massa di lepaskan sejauh 1 ft dibawah posisi kesetimbangan dengan kecepatan 5 ft/s ke bawah, dan gerakan selanjutnya berlangsung dalam media yang ditawarkan pada kekuatan redaman yang sama dengan 2 kali kecepatan sesaat.

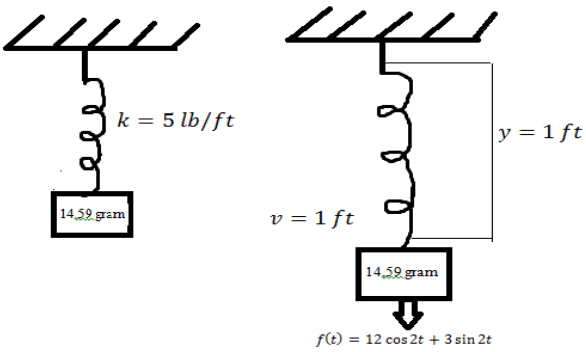
a) Tentukan persamaan gerak jika massa didorong dengan kekuatan eksternal sebesar $f(t) = 12\cos 2t + 3\sin 2t$
b) Grafik solusi pada sumbu koordinat yang sama

<u>**Penyelesaian:**</u>

a. Misalkan m adalah sebuah massa yang melekat pada pegas dengan k adalah konstanta pegas dan b adalah konstanta redaman. Hukum Newton II untuk kasus 1 ini adalah seperti pada Persamaan (2.40)

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\gamma \frac{dy}{dt} + \omega^2 y = f(t)$$

dengan $y(t)$ adalah perpindahan dari posisi kesetimbangan. Diketahui pada kasus 1 $m = 14{,}59$ gram, $k = 5$ lb/ft, $b = 2$, dan $f(t) = 12\cos 2t + 3\sin 2t$ seperti gambar di bawah ini.



Gambar 3.1 Model Sistem Gerak Paksa pada Pegas dalam Kasus 1

Untuk mencari nilai dari ω^2 dan γ gunakan rumus $\omega^2 = \frac{k}{m} = \frac{5}{14{,}59} = 0{,}34$ dan $\gamma = \frac{b}{2m} = \frac{2}{29{,}18} = 0{,}06$, oleh karena itu bentuk persamaan diferensial pada kasus 1 adalah

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 0{,}13\ \frac{dy}{dt} + 0{,}34\ y = 12\cos 2t + 3\sin 2t \tag{3.1}$$

Dari persamaan (3.1) diketahui $f(t) = 12\cos 2t + 3\sin 2t$ (3.1.1)

Ubah Persamaan (3.1) ke dalam bentuk persamaan diferensial linear homogen orde dua yaitu:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 0{,}13\ \frac{dy}{dt} + 0{,}34\ y = 0 \tag{3.1.2}$$

dan akar-akar persamaan pada Persamaan (3.1.2) yaitu $r_1 = 0{,}52$ dan $r_2 = -0{,}64$. Solusi persamaan diferensial linear homogen adalah,

$$y_c(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} = c_1 e^{0{,}52\ t} + c_2 e^{-0{,}64\ t} \tag{3.1.3}$$

dengan, $y_1 = e^{0{,}52\ t}$ dan $y_2 = e^{-0{,}64\ t}$

Setelah memperoleh solusi persamaan diferensial linear homogen, selanjutnya mencari solusi khusus persamaan diferensial linear nonhomogen dengan menggunakan metode variasi parameter. Untuk mencari solusi khusus pada Persamaan (3.1) digunakan rumus pada Persamaan (2.5) yaitu:

$y_p(t) = U_1 y_1 + U_2 y_2$

dimana untuk mencari nilai U_1, U_2 digunakan rumus seperti Persamaan (2.21) yaitu $U_1 = \int \frac{W_1}{W}$ dan $U_2 = \int \frac{W_2}{W}$, dan untuk mencari nilai W, W_1, W_2 dapat di gunakan rumus seperti Persamaan (2.22), sehingga diperoleh nilai W, W_1, W_2, U_1, U_2 yaitu:

$$U_1 = \int \frac{W_1}{W}\, dt = \int \frac{-12e^{-0{,}64t}\cos 2t - 3e^{-0{,}64t}\sin 2t}{-1{,}16\, e^{-0{,}12\,t}}\, dt$$

$$= \frac{12}{1{,}16}\int e^{-0{,}52\,t}\cos 2t + \frac{3}{1{,}16}\int e^{-0{,}52\,t}\sin 2t\ dt$$

$$= -5{,}1\, e^{-0{,}52\,t}\sin 2t - 0{,}09\, e^{-0{,}52\,t}\cos 2t + c$$

$$U_2 = \int \frac{W_2}{W}\, dt = \int \frac{12e^{0{,}52\,t}\cos 2t + 3e^{0{,}52\,t}\sin 2t}{-1{,}16\, e^{-0{,}12\,t}}\, dt$$

$$= \frac{-12}{1{,}16}\int e^{0{,}64\ t}\cos 2t - \frac{3}{1{,}16}\int e^{0{,}64\,t}\sin 2t\ dt$$

$$= 2{,}59\, e^{0{,}64\,t}\cos 2t - 0{,}1\, e^{0{,}64\,t}\sin 2t + c$$

diperoleh nilai $y_p(t)$ yaitu:

$$y_p(t) = U_1 y_1 + U_2 y_2$$

$$= (-5{,}1\, e^{-0{,}52\,t}\sin 2t - 0{,}09\, e^{-0{,}52\,t}\cos 2t)(e^{0{,}52\,t}) +$$

$$(2{,}59\, e^{0{,}64\,t}\cos 2t - 0{,}1\, e^{0{,}64\,t}\sin 2t)(e^{-0{,}64\,t})$$

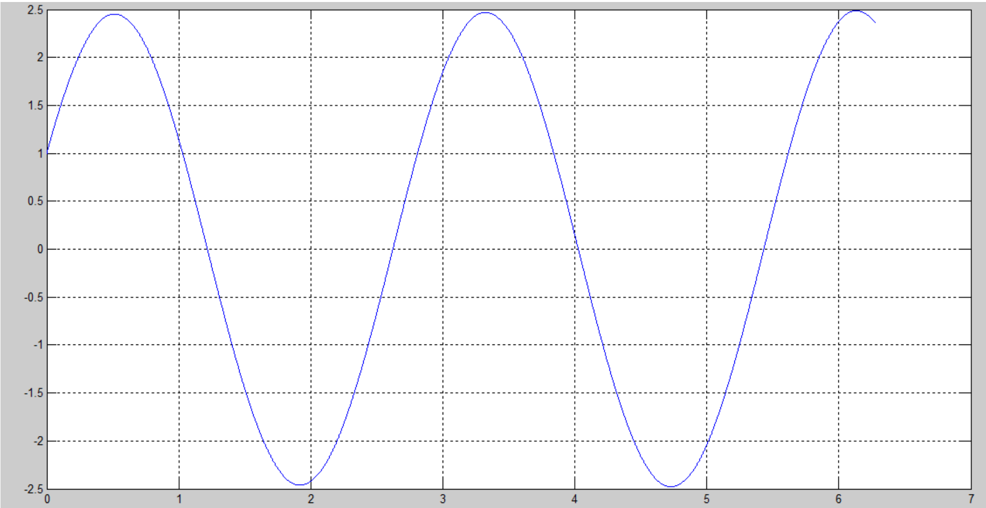
$$= -5{,}2\ \sin 2t - 2{,}68\ \cos 2t \qquad (3.1.4)$$

Solusi umum persamaan diferensial linear nonhomogen pada sistem gerak paksa pada pegas adalah dengan menjumlahkan Persamaan (3.1.3) dan Persamaan (3.1.4) yaitu:

$$y = y_c(t) + y_p(t)$$

$$= c_1 e^{0,43\,t} + c_2 e^{-0,69\,t} - 5,2\ \sin 2t - 2,68\ \cos 2t$$

b. Untuk menggambarkan grafik solusi persamaan diferensial pada kasus 1 digunakan program Matlab versi 7.8.0.347 (R2009a). Dari nilai $m = 14,59$ gram, $k = 5$ lb/ft, $b = 2$ diperoleh grafik solusi persamaan pada sumbu koordinat yang sama yaitu :



Gambar 3.2. Grafik solusi persamaan pada sumbu koordinat yang sama

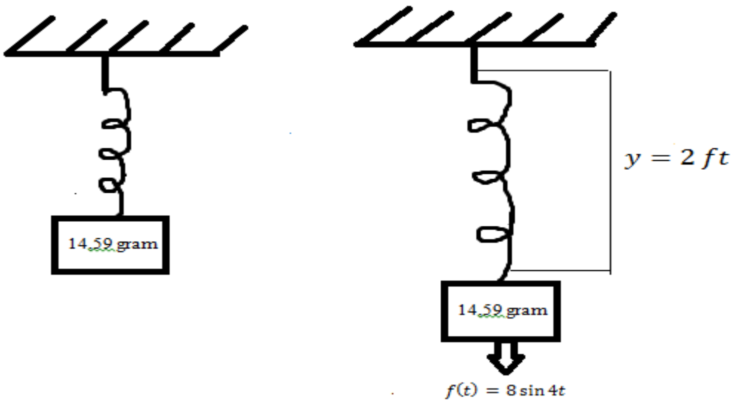
Kasus 2. Sebuah massa sebesar 14,59 gram melekat pada pegas yang di rentangkan sejauh 2 kaki dan kemudian kembali ke posisi awal. Dimulai dari $t = 0$, gaya eksternal yang dimiliki sama dengan $f(t) = 8 \sin 4t$ yang diterapkan ke dalam sistem pegas. Cari persamaan gerak jika medium yang di sekitarnya dipengaruhi oleh adanya gaya redaman yang secara numerik sama dengan 8 kali kecepatan sesaat.

<u>Penyelesaian:</u>

Misalkan m adalah sebuah massa yang melekat pada pegas dengan k adalah konstanta pegas dan b adalah konstanta redaman. Hukum Newton II untuk kasus 2 ini adalah seperti pada persamaan (2.40)

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\gamma\frac{dy}{dt} + \omega^2 y = f(t)$$

dengan $y(t)$ adalah perpindahan dari posisi kesetimbangan. Diketahui pada kasus 2 diatas $m = 14{,}59$ gram, $k = 5$ lb/ft, $b = 8$, dan $f(t) = 8\sin 4t$ seperti gambar dibawah ini.



Gambar 3.3 Model Sistem Gerak Paksa pada Pegas dalam Kasus 2

Untuk mencari nilai dari ω^2 dan γ gunakan rumus $\omega^2 = \frac{k}{m} = \frac{0}{14{,}59} = 0$ dan $\gamma = \frac{b}{2m} = \frac{8}{29{,}18} = 0{,}548$, oleh karena itu bentuk persamaan diferensial pada kasus 2 adalah $\frac{d^2y}{dt^2} + 0{,}548\,\frac{dy}{dt} = 8\sin 4t$ (3.2)

Dari Persamaan (3.2) diketahui $f(t) = 12\cos 2t + 3\sin 2t$ (3.2.1)

Ubah Persamaan (3.2) kedalam bentuk persamaan diferensial linear homogen orde dua yaitu:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 0{,}548\,\frac{dy}{dt} = 0 \quad (3.2.2)$$

dan akar-akar persamaannya yaitu $r_1 = 0$ dan $r_2 = -0{,}548$. Solusi persamaan diferensial linear homogen adalah,

$$y_c(t) = e^{-t}\left(c_1\cos\left(t\sqrt{(\gamma^2 - \omega_0{}^2 t}\right) + c_2\sin\left(t\sqrt{(\gamma^2 - \omega_0{}^2 t}\right)\right)$$

$$y_c(t) = e^{-t}(c_1 \cos 0{,}274\, t + c_2 \sin 0{,}274\, t) \tag{3.2.3}$$

dengan, $y_1 = \cos 0{,}274\, t$ dan $y_2 = \sin 0{,}274\, t$

Setelah memperoleh solusi persamaan diferensial linear homogen, selanjutnya mencari solusi partikular persamaan diferensial linear nonhomogen dengan menggunakan metode variasi parameter. Untuk mencari solusi partikular pada Persamaan (3.2) digunakan rumus pada Persamaan (2.5) yaitu:

$$y_p(t) = U_1 y_1 + U_2 y_2$$

dimana untuk mencari nilai U_1, U_2 digunakan rumus seperti Persamaan (2.21) yaitu $U_1 = \int \frac{W_1}{W}$ dan $U_2 = \int \frac{W_2}{W}$, dan untuk mencari nilai W, W_1, W_2 dapat digunakan rumus seperti Persamaan (2.22), sehingga diperoleh nilai W_1, W_2, U_1, U_2 adalah :

$$U_1 = \int \frac{W_1}{W}\, dt = \int \frac{-8 \sin 4t \sin 0{,}27\, t}{0{,}27}\, dt$$

$$= -\frac{8}{0{,}27}\int \sin 4t \sin 0{,}27\, t\, dt$$

$$= 1{,}33 \sin 4{,}2\, t - 1{,}53 \sin 3{,}73\, t + c$$

$$U_2 = \int \frac{W_2}{W}\, dt = \int \frac{8 \sin 4t \cos 0{,}27\, t}{0{,}27}\, dt$$

$$= \frac{8}{0{,}27}\int \sin 4t \cos 0{,}27\, t\, dt$$

$$= 1{,}33 \cos 4{,}2\, t + 1{,}53 \cos 3{,}73\, t + c$$

diperoleh nilai $y_p(t)$ yaitu:

$$y_p(t) = U_1 y_1 + U_2 y_2$$

$$= (1{,}33 \sin 4{,}2\, t - 1{,}53 \sin 3{,}73\, t)(\cos 0{,}27\, t)$$

$$+(1{,}33 \cos 4{,}2\, t + 1{,}53 \cos 3{,}73\, t)(\sin 0{,}27\, t)$$

$$= 1{,}33 \sin 4{,}2\, t \cos 0{,}27\, t - 1{,}53 \sin 3{,}73\, t \cos 0{,}27\, t + 1{,}33 \cos 4{,}2\, t$$

$$\sin\ 0{,}27\ t + \ 1{,}53 \cos 3{,}73\ t \sin 0{,}27\ t \qquad (3.2.4)$$

Solusi umum persamaan diferensial linear nonhomogen pada sistem gerak paksa pada pegas adalah dengan menjumlahkan Persamaan (3.2.3) dan Persamaan (3.2.4) yaitu:

$$y = y_c + \ y_p$$

$$= \ e^{-t}(c_1 \cos\ 0{,}274\ t \ + \ c_2 \sin\ 0{,}274\ t\ \ ) + \ 1{,}33\ \sin 4{,}2\ t\ \cos\ 0{,}27\ t$$

$$-1{,}53 \sin 3{,}73\ t\ \cos 0{,}27\ t + 1{,}33 \cos 4{,}2\ t$$

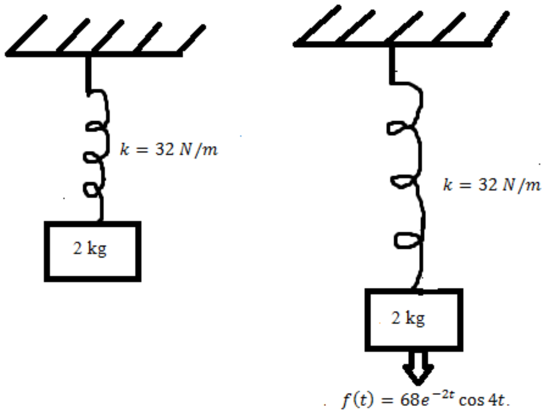
Kasus 3: Ketika massa 2 kg melekat pada pegas yang konstanta pegasnya adalah $32\ \mathrm{N/m}$ dan kemudian berhenti pada posisi awal. Dimulai dari $t = 0$, dengan gaya eksternalnya adalah $f(t) = 68e^{-2t} \cos 4t$. Tentukan persamaan gerak tanpa adanya gaya redaman. Tulis persamaan gerak dalam bentuk $x(t) = A \sin(\omega t + \emptyset) + Be^{-2t}$ $\sin(4t + \emptyset)$. Berapakah getaran amplitudonya?

<u>Penyelesaian:</u>

Misalkan m adalah sebuah massa yang melekat pada pegas dengan k adalah konstanta pegas dan b adalah konstanta redaman. Hukum Newton II untuk kasus 3 ini adalah seperti pada Persamaan (2.30)

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = f(t)$$

dengan $y(t)$ adalah perpindahan dari posisi kesetimbangan. Diketahui pada kasus 3 $m = 2$ kg, $k = 32\ N/m$, dan $f(t) = 68e^{-2t} \cos 4t$ seperti gambar dibawah ini.



Gambar 3.4 Model Sistem Gerak Paksa pada Pegas dalam Kasus 3

Untuk mencari nilai dari ω^2 dan γ gunakan rumus $\omega^2 = \frac{k}{m} = \frac{32}{2} = 16$ dan $\gamma\ = \frac{b}{2m} = \frac{0}{4} = 0$, oleh karena itu bentuk persamaan diferensial pada kasus 3 adalah $\frac{d^2y}{dt^2} + 16y = 68\ e^{-2t}\cos 4t$

(3.3)

dengan $x(0) = 0, x'(0) = 0$ dengan $c_1 = -\frac{1}{2}$ dan $c_2 = \frac{9}{4}$.

Dari Persamaan (3.3) diketahui $f(t) = 68\ e^{-2t}\cos 4t$ (3.3.1)

Ubah Persamaan (3.3) kedalam bentuk persamaan diferensial linear homogen orde dua yaitu:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 16y = 0 \tag{3.3.2}$$

diperoleh akar-akar persamaannya yaitu $r_1 = 4$ dan $r_2 = -4$. Untuk mencari solusi umum persamaan diferensial linear orde dua dilakukan dengan menjumlahkan solusi partikular dengan solusi persamaan diferensial linear homogennya seperti yang ditunjukkan Persamaan (2.14), sehingga solusi persamaan diferensial linear homogennya yaitu,

$$y_c(t)\ =\ c_1e^{r_1t} +\ c_2e^{r_2t}\ =\ c_1e^{4t} +\ c_2e^{-4t} \tag{3.3.3}$$

dengan, $y_1 =\ e^{4t}$ dan $y_2\ = e^{-4t}$

Setelah memperoleh solusi persamaan diferensial linear homogen, selanjutnya mencari solusi partikular persamaan diferensial linear nonhomogen dengan menggunakan metode variasi parameter. Untuk mencari solusi partikular pada Persamaan (3.3) digunakan rumus pada Persamaan (2.5) yaitu:

$y_p(t) = U_1 y_1 + U_2 y_2$

dimana untuk mencari nilai U_1, U_2 digunakan rumus seperti Persamaan (2.21) yaitu $U_1 = \int \frac{W_1}{W}$ dan $U_2 = \int \frac{W_2}{W}$, dan untuk mencari nilai W, W_1, W_2 dapat digunakan rumus seperti Persamaan (2.22), sehingga diperoleh nilai W_1, W_2, U_1, U_2 adalah :

$$U_1 = \int \frac{W_1}{W}\, dt = \int \frac{-68e^{-6t}\cos 4t}{-8}\, dt = \frac{-68}{-8}\int e^{-6t}\cos 4t\, dt$$

$$= -\frac{17}{26}e^{-6t}\sin 4t - \frac{51}{52}\, e^{-6t}\cos 4t + c$$

$$U_2 = \int \frac{W_2}{W}\, dt = \int \frac{68e^{2t}\cos 4t}{-8}\, dt = \frac{-68}{8}\int e^{2t}\cos 4t\, dt$$

$$= \frac{17}{10}e^{2t}\sin 4t - \frac{17}{20}\, e^{2t}\cos 4t + c$$

diperoleh nilai $y_p(t)$ yaitu:

$$y_p(t) = U_1 y_1 + U_2 y_2$$

$$= \left(-\frac{17}{26}e^{-6t}\sin 4t - \frac{51}{52}\, e^{-6t}\cos 4t\right)(e^{4t})$$

$$+\left(\frac{17}{10}e^{2t}\sin 4t - \frac{17}{20}\, e^{2t}\cos 4t\right)(e^{-4t})$$

$$= -\frac{17}{26}e^{-2t}\sin 4t - \frac{51}{52}\, e^{-2t}\cos 4t + \frac{17}{10}e^{-2t}\sin 4t -$$

$$\frac{17}{20}\, e^{-2t}\cos 4t \qquad (3.3.4)$$

Solusi umum persamaan diferensial linear nonhomogen yaitu dengan menjumlahkan Persamaan (3.3.3) dan Persamaan (3.3.4) yaitu:

$$y = y_c + y_p$$

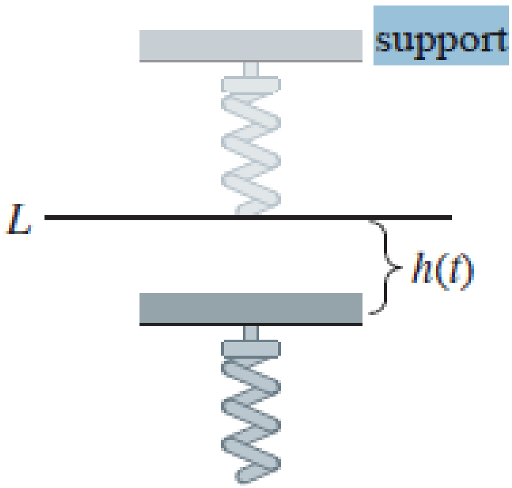
$$= c_1 e^{4t} + c_2 e^{-4t} + -\frac{17}{26} e^{-2t} \sin 4t - \frac{51}{52} e^{-2t} \cos 4t + \frac{17}{10} e^{-2t} \sin 4t$$

$$-\frac{17}{20} e^{-2t} \cos 4t$$

Selanjutnya, jika bentuk persamaan geraknya $y(t) = A \sin(\omega t + \emptyset) + Be^{-2t} \sin(4t + \emptyset)$, maka haruslah dicari nilai A atau amplitudo, dimana $A = \sqrt{c_1{}^2 + c_2{}^2}$ seperti pada Persamaan (2.44) maka diperoleh nilai A adalah:

$$A = \sqrt{c_1{}^2 + c_2{}^2} = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{9}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{85}{16}} = \frac{\sqrt{85}}{4}$$

Kasus 4 : Massa 100 gram melekat pada pegas yang konstanta pegasnya adalah 600 dynes / cm. Setelah massa mencapai kesetimbangan, diperoleh gaya luar sebesar $h(t) = \sin 8t$, dimana h menunjukkan perpindahan dari posisi awal.



Gambar 3.5. Gaya luar osilasi

a) Jika tidak ada redaman, tentukan persamaan gerak jika massa dimulai dari posisi awal kesetimbangan.

b) Pada waktu keberapa massa melewati posisi kesetimbangan ?

c) Buat grafik persamaan gerak

Penyelesaian:

a. Misalkan m adalah sebuah massa yang melekat pada pegas dengan k adalah konstanta pegas dan b adalah konstanta redaman. Hukum Newton II untuk kasus 4 ini adalah seperti pada Persamaan (2.30)

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = f(t)$$

dengan $y(t)$ adalah perpindahan dari posisi kesetimbangan. Diketahui pada kasus 2 diatas $m = 100$ gram, $k = 600\ dynes/cm$ dan $f(t) = \sin 8t$. Untuk mencari nilai dari ω^2 dan γ gunakan rumus $\omega^2 = \frac{k}{m} = \frac{600}{100} = 6$ dan $\gamma = \frac{b}{2m} = \frac{0}{200} = 0$, oleh karena itu bentuk persamaan diferensial pada kasus 4 adalah

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 6y = \sin 8t \qquad (3.4)$$

Dari Persamaan (3.4) diketahui $f(t) = \sin 8t$ (3.4.1)

Ubah Persamaan (3.4) kedalam bentuk persamaan diferensial linear homogen orde dua yaitu:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 6y = 0 \qquad (3.4.2)$$

diperoleh akar-akar persamaannya yaitu $r_1 = 2{,}4$ dan $r_2 = -2{,}4$. Untuk mencari solusi umum persamaan diferensial linear orde dua dilakukan dengan menjumlahkan solusi partikular dengan solusi persamaan diferensial linear homogennya seperti yang ditunjukkan Persamaan (2.14), sehingga solusi persamaan diferensial linear homogennya adalah,

$$y_c(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} = c_1 e^{2{,}4\,t} + c_2 e^{-2{,}4\,t} \qquad (3.4.3)$$

dengan, $y_1 = e^{2,4\,t}$ dan $y_2 = e^{-2,4\,t}$

Selanjutnya untuk mencari solusi partikularnya digunakan rumus pada Persamaan (2.15) yaitu $y_p(t) = U_1 y_1 + U_2 y_2$

dimana untuk mencari nilai U_1, U_2 digunakan rumus seperti Persamaan (2.21) yaitu $U_1 = \int \frac{W_1}{W}$ dan $U_2 = \int \frac{W_2}{W}$, dan untuk mencari nilai W, W_1, W_2 dapat digunakan rumus seperti Persamaan (2.22), sehingga diperoleh nilai W, W_1, W_2, U_1, U_2 yaitu:

$$U_1 = \int \frac{W_1}{W}\,dt = \int \frac{-e^{-2,4t}\sin 8t}{-4,8}\,dt = \frac{1}{4,8}\int e^{-2,4\,t}\sin 8t\ dt$$

$$= 0,02\ e^{-2,4\,t}\cos\ 8t - 0,006\,e^{-2,4\,t}\sin 8t + c$$

$$U_2 = \int \frac{W_2}{W}\,dt = \int \frac{e^{2,4t}\sin 8t}{-4,8}\,dt = \frac{-1}{4,8}\int e^{2,4\,t}\sin 8t\ dt$$

$$= -0,02\ e^{2,4\,t}\cos\ 8t - 0,006\,e^{2,4\,t}\sin 8t + c$$

diperoleh nilai $y_p(t)$ yaitu:

$$y_p(t) = U_1 y_1 + U_2 y_2$$

$$= (0,02\ e^{-2,4\,t}\cos\ 8t - 0,006\,e^{-2,4\,t}\sin 8t)(\,e^{2,4\,t}) +$$

$$(-0,02\ e^{2,4\,t}\cos\ 8t - 0,006\,e^{2,4\,t}\sin 8t)(\,e^{-2,4\,t})$$

$$= -0,012\ \sin 8t \qquad (3.4.4)$$

Solusi umum persamaan diferensial linear nonhomogen yaitu menjumlahkan Persamaan (3.4.3) dan Persamaan (3.4.4) yaitu:

$$y = y_c + y_p$$

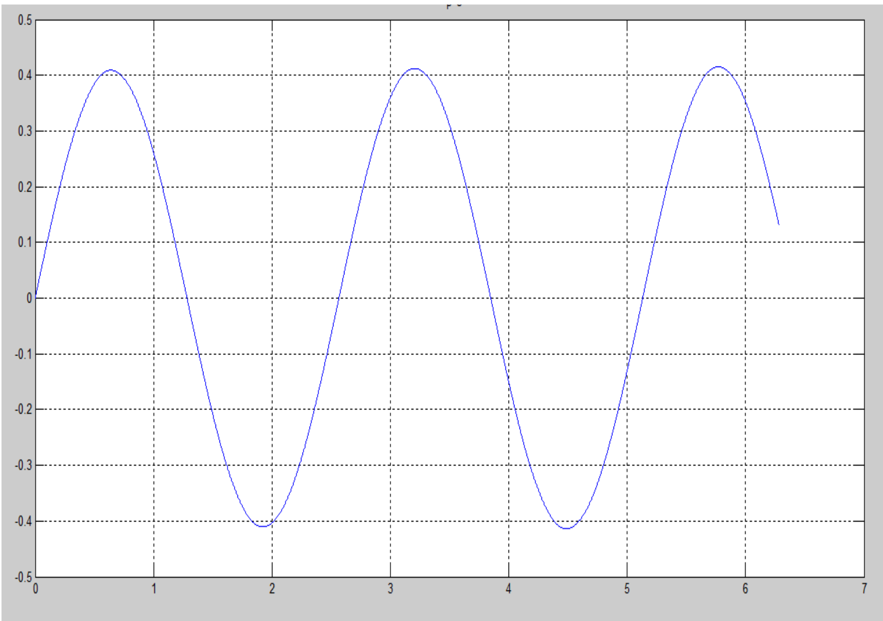
$$= c_1 e^{2,4\,t} + c_2 e^{-2,4t} - 0,012\ \sin 8t$$

Persamaan gerak tanpa adanya gaya redaman dan dimulai dari posisi kesetimbangan adalah:

$\frac{d^2y}{dt^2} + 6\text{y} = \sin 8t,\ y(0) = 0, y'(0) = 0$ dengan $h(t) = \sin 8t$.

b). Jika $y = \frac{-1}{1486{,}8} \cos 4{,}8t$ maka , $t = \frac{n\pi}{4}$ dengan $n = 0, 1, 2, ...$

c). Untuk menggambarkan grafik solusi persamaan diferensial pada kasus 4 digunakan program Matlab versi 7.8.0.347 (R2009a). Dari nilai $m = 100$ gram, $k = 100\ \text{dynes/cm}$, $b = 2$ diperolehlah grafik solusi persamaan pada sumbu koordinat yang sama yaitu :



Gambar 3.6. Grafik persamaan gerak

Kasus 5: a) Tunjukkan solusi umum dari persamaan berikut:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = F_0 \sin \gamma t$$

dengan, $F_0 = 1$ dan

$y(t) = Ae^{-\varphi t} \sin\left(\sqrt{\omega^2 - \varphi^2}t + \emptyset\right) + \frac{F_0}{\sqrt{(\omega^2-\gamma^2)^2+4^2\gamma^2}} \sin(\gamma t + \theta)$, dimana

$A = \sqrt{{c_1}^2 + {c_2}^2}$ dan sudut fase $\emptyset$ dan θ adalah masing-masing didefinisikan oleh $\sin \emptyset = \frac{c_1}{A}, \cos \emptyset = \frac{c_2}{A}$ dan

$$\sin \emptyset = \frac{-2\gamma}{\sqrt{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4^2\gamma^2}}$$

$$\cos \emptyset = \frac{\omega^2 - \gamma^2}{\sqrt{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4^2\gamma^2}}$$

(b) Solusi pada bagian (a) didapat dengan bentuk $y(t) = y_c(t) + y_p(t)$ dan solusinya adalah $y_p(t) = g(\gamma)\sin(\gamma t + \theta)$, dengan $g(y) = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega^2-\gamma^2)^2+4^2\gamma^2}}$

Meskipun amplitude $g(\gamma)$ terhadap $y_p(t)$ dibatasi oleh $t \to \infty$, tunjukkan bahwa osilasi maksimun akan terjadi pada $\gamma_1 = \sqrt{(\omega^2 - 2^2)^2}$. Apa nilai dari maksimun g? Pada $\frac{\sqrt{(\omega^2-2^2)^2}}{2\pi}$ dapat dikatakan resonasi frekuensi pada sistem.

(c) Ketika $F_0 = 2, m = 1, k = 4,$

$$g(y) = \frac{F_0}{\sqrt{4 - \gamma^2)^2 + \beta^2\gamma^2}}$$

Buat tabel γ_1 dan $g(\gamma_1)$ yang sesuai dengan koefisien redaman $\beta = 2, \beta = 1, \beta = \frac{3}{4}, \beta = \frac{1}{2}$ dan $\beta = \frac{1}{4}$.

Penyelesaian :

(a) Akan ditunjukkan solusi umum dari persamaan dibawah ini adalah

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = F_0 \sin \gamma t$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + \omega^2 y = \sin \gamma t$$

Selanjutnya,cari akar-akar persamaannya seperti pada Persamaan (2.36) sehingga menjadi :

$$r_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{({\omega_0}^2 - \gamma^2)}$$

$$= -1 \pm \sqrt{({\omega_0}^2 - \gamma^2)}$$

diperoleh akar-akar persamaannya yaitu $r_{1,2} = -1 \pm \sqrt{(\omega_0{}^2 - \gamma^2)}$. Untuk mencari solusi umum persamaan diferensial linear orde dua dilakukan dengan menjumlahkan solusi partikular dengan solusi persamaan diferensial linear homogennya seperti yang ditunjukkan Persamaan (2.14), sehingga solusi persamaan diferensial linear homogennya adalah,

$$y_c = c_1 e^{-\vartheta t} \cos\left(\sqrt{(\omega^2 - \vartheta^2 t}\right) + c_2 e^{-\vartheta t} \sin\left(\sqrt{(\omega^2 - \vartheta^2 t)}\right.$$

$$= A e^{-\vartheta t} \cos\left(\sqrt{(\omega^2 - \vartheta^2 t} + \emptyset\right)$$

dengan, $A = \sqrt{c_1{}^2 + c_2{}^2}$, $\sin \emptyset = \frac{c_1}{A}$, $\cos\ \emptyset = \frac{c_2}{A}$ dan $y_1 = \cos\left(\sqrt{(\omega^2 - \vartheta^2 t)}\right.$, $y_2 = \sin\left(\sqrt{(\omega^2 - \vartheta^2 t)}\right.$, selanjutnya untuk mencari solusi partikular dilakukan :

$$y_p = U_1 y_1 + U_2 y_2$$

Untuk memperoleh nilai U_1 dan U_2 dilakukan pengintegralan seperti persamaan (2.21) yaitu:

$$U_1 = \int \frac{W_1}{W}\, dt = \int \frac{-sin\sqrt{(\omega^2 - \vartheta^2 t)}\ \sin(\gamma t)}{\frac{-\vartheta^2}{2\sqrt{(\omega^2 - \vartheta^2 t)}}}\, dt$$

$$= \frac{2}{\vartheta^2} \int \sqrt{(\omega^2 - \vartheta^2 t)} sin\sqrt{(\omega^2 - \vartheta^2 t)}\ \sin(\gamma t)\, dt$$

$$= cos\sqrt{(\omega^2 - \vartheta^2 t)} - \frac{\vartheta^2}{2} \sin(\sqrt{(\omega^2 - \vartheta^2 t)}\ In|\omega^2 - \vartheta^2 t|$$

$$U_2 = \int \frac{W_2}{W}\, dt = \int \frac{cos\sqrt{(\omega^2 - \vartheta^2 t)}\ \sin(\gamma t)}{\frac{-\vartheta^2}{2\sqrt{(\omega^2 - \vartheta^2 t)}}}\, dt$$

$$= \frac{2}{\vartheta^2} \int \sqrt{(\omega^2 - \vartheta^2 t)} cos\sqrt{(\omega^2 - \vartheta^2 t)}\ \sin(\gamma t)\, dt$$

$$= -sin\sqrt{(\omega^2 - \vartheta^2 t)} + \frac{\vartheta^2}{2} \cos(\sqrt{(\omega^2 - \vartheta^2 t)}\ In|\omega^2 - \vartheta^2 t|$$

Selanjutnya cari nilai partikularnya

$$y_p = U_1 y_1 + U_2 y_2$$

$$= \left(cos\sqrt{(\omega^2 - \vartheta^2 t)} - \frac{\vartheta^2}{2} \sin(\sqrt{(\omega^2 - \vartheta^2 t)}\ In|\omega^2 - \vartheta^2 t| \right)$$

$$\left(\cos(\sqrt{(\omega^2 - \vartheta^2 t)}\right) + (-sin\sqrt{(\omega^2 - \vartheta^2 t)} + \frac{\vartheta^2}{2}\cos(\sqrt{(\omega^2 - \vartheta^2 t)}$$

$$In|\omega^2 - \vartheta^2 t|) \left(\sin(\sqrt{(\omega^2 - \vartheta^2 t)}\right)$$

$$= cos^2\sqrt{(\omega^2 - \vartheta^2 t)} - \frac{\vartheta^2}{2} cos(\sqrt{(\omega^2 - \vartheta^2 t)}\ sin(\sqrt{(\omega^2 - \vartheta^2 t)}$$

$$In|\omega^2 - \vartheta^2 t| - sin^2\sqrt{(\omega^2 - \vartheta^2 t)} + \frac{\vartheta^2}{2} sin(\sqrt{(\omega^2 - \vartheta^2 t)}$$

$$cos(\sqrt{(\omega^2 - \vartheta^2 t)}\ In|\omega^2 - \vartheta^2 t|$$

$$= \frac{F_0(\omega^2 - \vartheta^2)}{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4^2\gamma^2}\ sin(\gamma t) + \frac{F_0(-2\vartheta\gamma)}{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4^2\gamma^2}\cos(\gamma t)$$

$$= \frac{F_0}{\sqrt{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4^2\gamma^2}}\ sin(\gamma t + \theta)$$

Solusi umum persamaan diferensial linear nonhomogennya adalah :

$$y = y_c + y_p$$

$$= Ae^{-\vartheta t}\cos(\sqrt{(\omega^2 - \vartheta^2 t} + \emptyset) + \frac{F_0}{\sqrt{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4^2\gamma^2}}\ sin(\gamma t + \theta)$$

dengan,

$$\sin\emptyset = \frac{\frac{F_0(-2\vartheta\gamma)}{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4^2\gamma^2}}{\frac{F_0}{\sqrt{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4^2\gamma^2}}} = \frac{-2\vartheta\gamma}{\sqrt{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4^2\gamma^2}}$$

$$\cos\emptyset = \frac{\frac{F_0(\omega^2 - \vartheta^2)}{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4^2\gamma^2}}{\frac{F_0}{\sqrt{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4^2\gamma^2}}} = \frac{\omega^2 - \vartheta^2}{\sqrt{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4^2\gamma^2}}$$

(b) Jika $g'(\gamma) = 0$ maka $\gamma(\gamma^2 + 2\vartheta^2 - \omega^2)$, oleh karena itu diperoleh $\gamma = 0$ atau $\gamma = \sqrt{\gamma^2 + 2\vartheta^2}$. Turunan pertama dari g menunjukkan bahwa g adalah nilai maksimun pada $\gamma = \sqrt{\gamma^2 + 2\vartheta^2}$. Maka nilai maksimun g adalah: $g\left(\sqrt{\gamma^2 + 2\vartheta^2}\right) = \frac{F_0}{2\pi\sqrt{\omega^2 - \vartheta^2}}$

(c) Dengan $F_0 = 2, m = 1, k = 4$ maka diperoleh $\omega^2 = \frac{k}{m} = 4,\ \vartheta = \frac{\beta}{2}$ dan $\gamma_1 = \sqrt{\omega^2 + 2\vartheta^2} = \sqrt{4 - \frac{\beta^2}{2}}$ dengan $\beta \to 0$. Dibawah ini akan diberikan tabel pada γ_1 dan $g(\gamma_1)$ yang sesuai dengan koefisien redaman $\beta = 2, \beta = 1, \beta = \frac{3}{4}, \beta = \frac{1}{2}$ dan $\beta = \frac{1}{4}$.

Tabel 1. Nilai untuk $\boldsymbol{\gamma_1}$, $\boldsymbol{\beta}$ dan $\boldsymbol{g(\gamma_1)}$

β	γ_1	$g(\gamma_1)$
2.00	1.41	0.58
1.00	1.87	1.03
0.75	1.93	1.36
0.50	1,97	2.02
0.25	1,99	4.01

BAB IV
KESIMPULAN DAN SARAN

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian terhadap beberapa kasus persamaan diferensial linear nonhomogen orde dua dengan metode variasi parameter pada sistem gerak paksa pada pegas maka metode variasi parameter dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial linear nonhomogen orde dua pada sistem gerak paksa pada pegas dengan melalui langkah-langkah berikut yaitu: (1). Mencari nilai dari u_1 dan u_2 dengan mengintegralkan nilai dari W, W_1 dan W_2, (2). Menyubtstitusikan nilai u_1, u_2, y_1 dan y_2 kedalam persamaan $y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$, (3). Menyubtstitusikan nilai y_p dan y_c kedalam persamaan $y = y_c + y_p$.

4.2 Saran

Berkaitan dengan hasil penelitian, ada beberapa hal yang perlu diperhatikan yaitu penelitian ini mengkaji masalah sistem gerak paksa pada pegas dengan adanya redaman maupun tidak adanya redaman dan dengan adanya gaya luar pada persamaan diferensial linear nonhomogen orde dua. Untuk itu perlu penelitian lebih lanjut untuk masalah sistem pegas dengan adanya redaman maupun tidak adanya redaman dan dengan adanya gaya luar pada persamaan diferensial linear nonhomogen orde yang lebih tinggi.

DAFTAR PUSTAKA

Afri, 2019. *Persamaan Diferensial Biasa* . Pekanbaru: Zanafa Publishing

Bronson, 2013. *Persamaan diferensial. Edisi ketiga*. Jakarta :Erlangga.

Daufik. 1999. Klasifikasi Getaran. *Jurnal Teknik Mesin*. Vol. 1, No. 2, hal 156-162.

Finizio, N dan G. Ladas. 1988. *Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern.* Jakarta: Erlangga.

Herdiana, H. 2011. *Persamaan Diferensial.* Bandung: Pustaka.

Kusumah, Y. 1989. *Persamaan Diferensial Biasa Model Matematika Fenomena Perubahan* . Yogyakarta: Graha Ilmu

Munir, R. 2010. *Metode Numerik.* Bandung: ITB

Sari, D.Y. 2012. Penyelesaian Sistem Persamaan Diferensial Linier Non Homogen dengan Koefisien Konstan Menggunakan Metode PREDICTOR-CORRECTOR. *Skripsi*. Fakultas Matematika Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Bengkulu, Bengkulu.

Tung, K.K. 2013. *Partial Differential Equations And Fourier Analysis: A Short Introduction*. Washington: University.

Young, Roger. 2002. *Fisika untuk Sains dan Teknik (Jilid 1)*. Jakarta: Erlangga

Zill, D. G. 2013. *A First Course In Differential Equations With Modeling Applications . Tenth Edition.* Amerika: Brooks Cole.

RIWAYAT HIDUP

Bella Grace Sara Br Lubis lahir di Lubuk Pakam Kecamatan Lubuk Pakam Kabupaten Deli Serdang pada tanggal 02 Januari 1999. Penulis merupakan anak ketiga dari lima bersaudara dari pasangan Ayahanda 'Maringan Lubis' dan Ibunda 'Hotmaida Situmorang'. Penulis memulai pendidikannya pada tahun 2004 di Sekolah Dasar SDN 101899 Lubuk Pakam. Selanjutnya penulis menuntut ilmu di SMPN 1 Pagar Merbau pada tahun 2010 dan selesai pada tahun 2013, kemudian dari tahun 2013 hingga 2016 penulis melanjutkan pendidikan di SMAN 2 Lubuk Pakam. Setelah menyelesaikan pendidikan di SMA, penulis diterima di Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Bengkulu tepatnya di Jurusan Matematika pada tahun 2016 melalui jalur SNMPTN. Penulis menyelesaikan Kuliah Kerja Nyata (KKN) Universitas Bengkulu periode 88 di Desa Sidodadi Kabupaten Kepahiang. Penulis berhasil menyelesaikan jenjang S1 Matematika FMIPA Universitas Bengkulu pada tanggal 08 Juli 2020.

Email: gracebellabella93@gmail.com