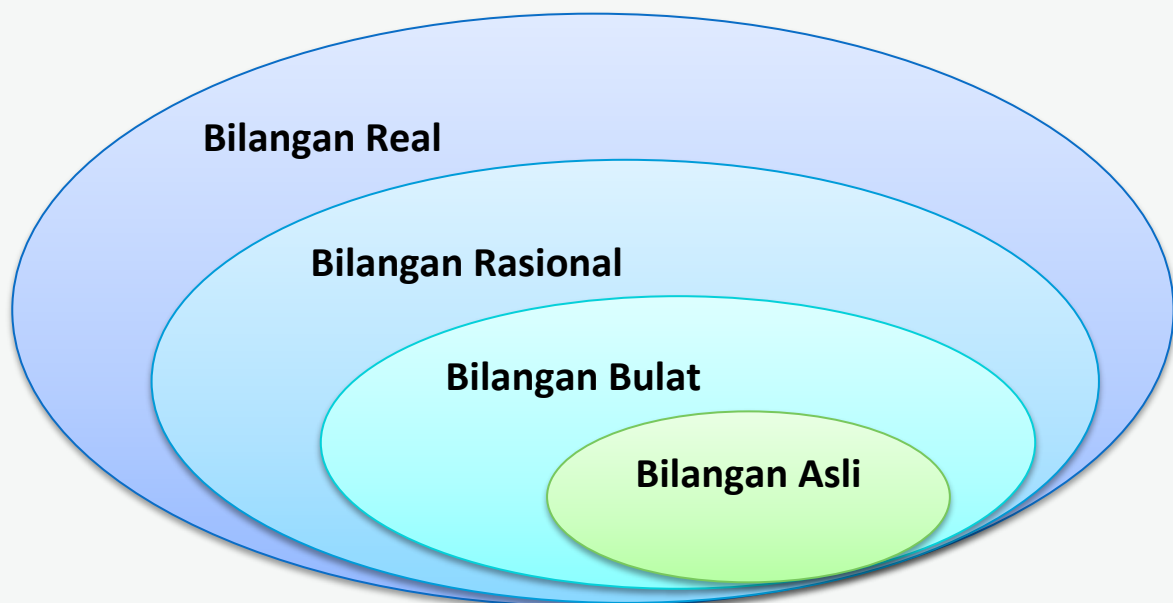


PENULIS:

Sukiman, Sasmita Mutiara, Ratih Kristantini, Yana Royana, Istikomar, Gustia Putri .L,
Depi Marlioni, Eka Yulitasari, Geza Dwi Putri, Latifa Nurliyan Hidayati,
Linda Yeka Juliani, Muhammad Yogi Ramadhan, Annie Rachmawati

TEORI BILANGAN

Editor: Dr. Dra. Hanifah, M.Kom



**UPP
FKIP UNIB**



TEORI BILANGAN

PENULIS:

SUKIMAN, SASMITA MUTIARA, RATIH KRISTANTINI,
YANA ROYANA, ISTIKOMAR, GUSTIA PUTRI .L, DEPI
MARLIANI, EKA YULITASARI, GEZA DWI PUTRI, LATIFA
NURLIYAN HIDAYATI, LINDA YEKA JULIANI,
MUHAMMAD YOGI RAMADHAN, ANNIE RACHMAWATI

EDITOR:

Dr. Dra. HANIFAH, M.Kom



UPP

FKIP UNIB

Unit Penerbitan dan Publikasi FKIP Univ. Bengkulu
Jl. W. R. Supratman, Kandang Limun, Kota Bengkulu
38371A
Telp. (0736)21186, Fax. (0736) 21186
Laman: www.fkip.unib.ac.id/unit-penerbitan/
E-mail: uppfkip@unib.ac.id

TEORI BILANGAN

**SUKIMAN, SASMITA MUTIARA, RATIH KRISTANTINI, YANA ROYANA,
ISTIKOMAR, GUSTIA PUTRI J., DEPI MARLIANI, EKA YULITASARI,
GEZA DWI PUTRI, LATIFA NURLIYAN HIDAYATI, LINDA YEKA
JULIANI, MUHAMMAD YOGI RAMADHAN, ANNIE RACHMAWATI**

Editor:
Dr. Dra. Hanifah, M.Kom

Desain Cover:
Yana Royana

Sumber:
Penulis

Tata Letak:
Istikommar dan Latifa Nurliyan Hidayati

Proofreader:
Nama

Ukuran:
Jml Hal Judul, Jml Hal isi, Uk: 18,2 x 25,7 cm

ISBN:
978-623-7074-62-5

Cetakan Pertama:
Januari 2021

Hak Cipta 2021, Pada Penulis

Isi diluar tanggung jawab percetakan

Copyright © 2021 by UPP FKIP UNIB
All right reserved

Hak cipta dilindungi undang-undang
Dilarang keras menerjemahkan, memfotokopi, atau
memperbanyak sebagian atau seluruh isi buku ini
tanpa izin tertulis dari Penerbit

UPP FKIP UNIB
Jl. W. R. Supratman, Kandang Limun, Kota Bengkulu 38371A
Telp. (0736)21186, Fax. (0736) 21186
Laman: www.fkip.unib.ac.id/unit-penerbitan/
E-mail: uppfkip@unib.ac.id

KATA PENGANTAR

Puji syukur Alhamdulillah, penulis panjatkan kehadiran Allah SWT karena dengan rahmat dan karunia-Nya jumlah buku ini dapat diselesaikan tepat pada waktunya.

Buku ini merupakan sebuah karya dari mahasiswa maupun mahasiswi Pascasarjana Pendidikan Matematika Universitas Bengkulu Angkatan 18 Tahun 2020, yang mana pada semester ganjil tersebut sedang mengampu Mata Kuliah Teori Bilangan. Sebagaimana nama-nama mahasiswa-mahasiswi dalam penulis buku tersebut yaitu Sukiman, Sasmita Mutiara, Ratih Kristantini, Yana Royana, Istikomar, Gustia Putri Lestari, Depi Marliani, Eka Yulitasari, Geza Dwi Putri, Latifa Nurliyan Hidayati, Linda Yeka Juliani, Muhammad Yogi Ramadhan, Annie Rachmawati Nalman.

Namun dalam penulisan karya ini, penulis menyadari banyak mengalami kesulitan, terutama disebabkan kurangnya ilmu pengetahuan. Berkat bimbingan dan motivasi yang diberikan oleh dosen pembimbing maupun editor, maka dari itu sepantasnya penulis mengucapkan rasa terimakasih kepada Ibu Dr. Dra. Hanifah, M.Kom.

Sebagaimana dalam pembahasan buku ini mengupas secara rinci konsep dasar Teori Bilangan dan Teorema Pendukung, Selain dari pada itu, buku ini juga tidak hanya mengupas konsep dasar melainkan materi-materi yang mendukung pemahaman

bilangan serta dilengkapi latihan-latihan soal yang mampu meningkatkan cara berpikir kritis dan analisis seseorang. Karena, penulis menyadari sepenuhnya bahwa buku ini masih jauh dari sempurna. Oleh karena itu, kritik dan saran yang ada relevansinya dengan penyempurnaan buku ini sangat penulis harapkan. Kritik dan saran sekecil apapun akan penulis perhatikan dan pertimbangkan guna penyempurnaan buku ini kedepannya.

Bengkulu, Januari 2021

Penyusun

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	ii
KATA PENGANTAR	iv
DAFTAR ISI	vi
BAB I BILANGAN REAL, PERTIDAKSAMAAN DAN NILAI MUTLAK	
A. BILANGAN REAL	1
B. KETIDAKSAMAAN DAN PERTIDAKSAMAAN ..	14
C. NILAI MUTLAK	29
D. LATIHAN SOAL.....	43
DAFTAR PUSTAKA.....	44
BAB II BILANGAN BULAT	
A. PENDAHULUAN	46
B. PEMBAHASAN	47
C. LATIHAN SOAL	65
DAFTAR PUSTAKA.....	65
BAB III PEMBAGI BERSAMA TERBESAR	
A. PENDAHULUAN	66
B. PEMBAHASAN	67
C. LATIHAN SOAL	84
DAFTAR PUSTAKA	85
BAB IV RELATIF PRIMA	
A. PENDAHULUAN.....	86
B. PEMBAHASAN	87
C. LATIHAN SOAL	95
DAFTAR PUSTAKA	96
BAB V ARITMETIKA MODULO	
A. PENDAHULUAN	97
B. PEMBAHASAN	98
C. LATIHAN SOAL	119
DAFTAR PUSTAKA	121

BAB VI KONGRUENSI BILANGAN BULAT	
A. PENDAHULUAN	123
B. PEMBAHASAN	124
C. LATIHAN SOAL	132
DAFTAR PUSTAKA	135
BAB VII BALIKAN MODULO (MODULO INVERS)	
A. PENDAHULUAN	136
B. PEMBAHASAN	137
C. LATIHAN SOAL	142
DAFTAR PUSTAKA	143
BAB VIII <i>LINEAR CONGRUENCES</i> (KONGRUENSI LINEAR)	
A. PENDAHULUAN	144
B. PEMBAHASAN	145
C. LATIHAN SOAL	160
DAFTAR PUSTAKA	161
BAB IX <i>CHINESE REMAINDER PROBLEM</i> (TEOREMA SISA CINA)	
A. PENDAHULUAN	162
B. PEMBAHASAN	164
C. LATIHAN SOAL	179
DAFTAR PUSTAKA	182
BAB X BILANGAN PRIMA	
A. PENDAHULUAN	183
B. PEMBAHASAN	184
C. LATIHAN SOAL	200
DAFTAR PUSTAKA	203
BAB XI TEOREMA FERMAT	
A. PENDAHULUAN	204
B. PEMBAHASAN	205
C. LATIHAN SOAL	211
DAFTAR PUSTAKA	212

BAB XII FUNGSI EULER

A. PENDAHULUAN	214
B. PEMBAHASAN	215
C. LATIHAN SOAL	198
DAFTAR PUSTAKA	198

BAB XIII RELATIF PRIMA DAN BILANGAN KOMPOSIT

A. PENDAHULUAN	223
B. PEMBAHASAN	223
C. LATIHAN SOAL	231
DAFTAR PUSTAKA	232

BAB XIV RELATIF PRIMA (KOPRIMA) DAN TEOREMA FERMAT

A. PENDAHULUAN	233
B. PEMBAHASAN	235
C. LATIHAN SOAL	246
DAFTAR PUSTAKA	247

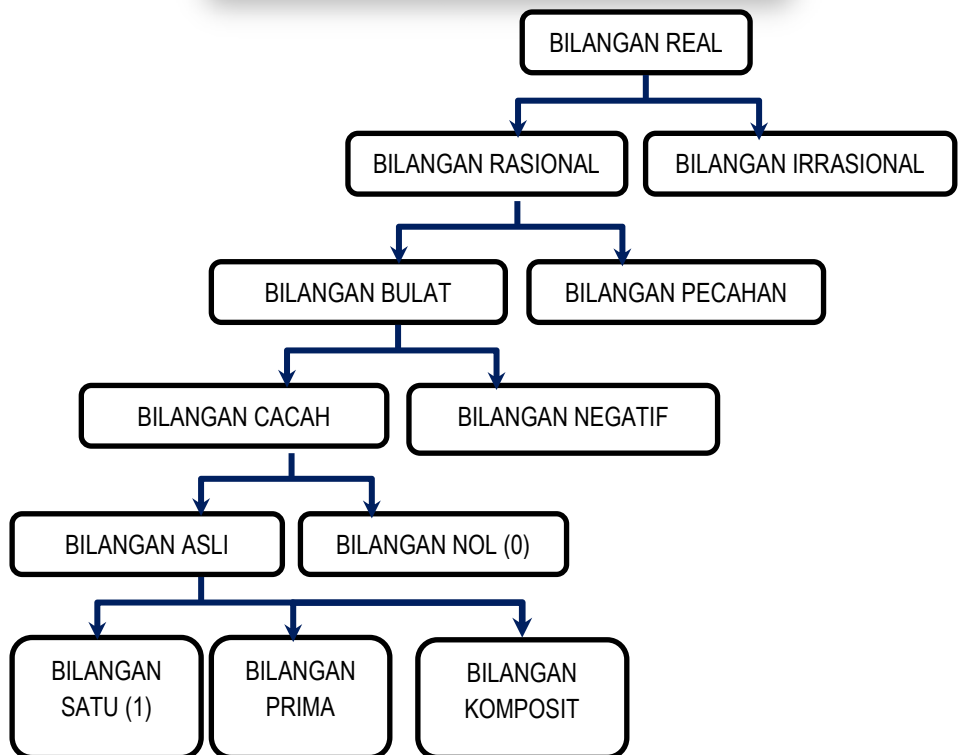
BAB I

BILANGANAN REAL, PERTIDAKSAMAAN DAN NILAI MUTLAK

(Oleh : Yana Royana, Istikomar dan Latifa Nurliyan Hidayati)

A. BILANGAN REAL

BAGAN SISTEM BILANGAN REAL



Bilangan adalah suatu konsep matematika yang digunakan untuk pencacahan dan pengukuran. Simbol ataupun lambang yang digunakan untuk mewakili suatu bilangan disebut sebagai

angka atau lambang bilangan. Bilangan dapat juga dikatakan suatu ide yang bersifat abstrak yang akan memberikan keterangan mengenai banyaknya suatu kumpulan benda. [1] (Purfini, A Puti, 2018)

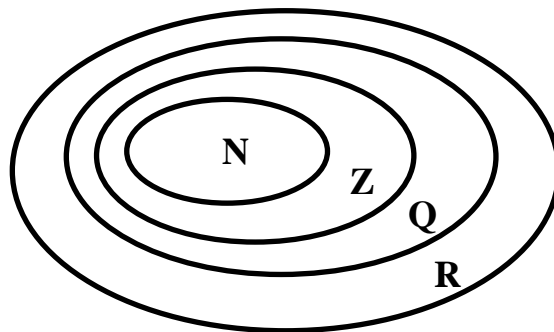
Sistem bilangan real adalah himpunan bilangan real yang disertai dengan operasi penjumlahan dan perkalian, sehingga memenuhi aksioma tertentu. Dalam penulisannya ditulis dengan simbol \mathbf{R} (baca : R cantik). [2]

1. Pengertian Bilangan Real (\mathbf{R})

Definisi

Bilangan real atau bilangan riil adalah gabungan antara himpunan bilangan rasional dan irasional.[2]

Contoh



Keterangan:

N : Bilangan asli, dengan $N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

Z : Bilangan bulat, dengan $Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

Q : Bilangan rasional, dengan $Q = \{\frac{a}{b} | a, b \in Z, b \neq 0\}$

R : $Q \cup$ Irasional, Contoh bilangan Irasional $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi$

2. Operasi pada Bilangan Real

Operasi pada bilangan real terdapat beberapa macam diantaranya yaitu operasi penjumlahan, operasi pengurangan, operasi perkalian dan operasi pembagian. [3] (Sudihartinih, Eyus, 2014)

a) Operasi Penjumlahan

Contoh:

$$1) 4 + 6 = 10$$

$$2) 4 + (-6) = -2$$

b) Operasi Pengurangan

Contoh:

$$1) (-6) - 4 = -6 + (-4) = -10$$

$$2) 3 - 6 - 4 = -3 + (-4) = -7$$

c) Operasi Perkalian

Contoh:

$$1) 6 \times 4 = 24$$

$$2) 6 \times (-4) = -24$$

$$3) (-6) \times (-4) = 24$$

d) Operasi Pembagian

Contoh:

$$1) 12 : 2 = 6$$

$$2) 12 : -2 = -6$$

$$3) (-12) : (-2) = 6$$

3. Sifat-Sifat Bilangan Real

Jika a , b , dan c merupakan elemen dari himpunan bilangan real, maka berlaku sifat sifat berikut: [4] (Sugiarto & Isti Hidayah, 2011)

SIFAT	PENJUMLAHAN	PERKALIAN
Tertutup	$a + b = \text{bilangan real}$	$a \times b = \text{bilangan real}$
Asosiatif	$a + (b + c) = (a + b) + c$	$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$
Komutatif	$a + b = b + a$	$a \times b = b \times a$
Mempunyai unsur identitas	$a + 0 = a$	$a \times 1 = a$
Setiap bilangan punya invers	$a + (-a) = 0$	$a \times \left(\frac{1}{a}\right) = 1, \text{ dengan } a \neq 0$
Distributif	$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$	
Pembagi Nol	Tidak berlaku	

Keterangan:

1. Tertutup adalah operasi perkalian dan penjumlahan bilangan real yang menghasilkan bilangan real.
2. Assosiatif adalah penjumlahan atau perkalian tiga buah bilangan real yang dikelompokkan secara berbeda mempunyai hasil yang sama.
3. Komutatif adalah pertukaran letak angka pada penjumlahan dan perkalian bilangan real mempunyai hasil sama.
4. Unsur identitas adalah operasi perkalian dan penjumlahan setiap bilangan real dengan identitasnya dapat menghasilkan bilangan real itu sendiri.

- a. Identitas penjumlahan termasuk bilangan real yaitu 0.
 - b. Identitas perkalian termasuk bilangan real yaitu 1.
5. Mempunyai invers yaitu setiap bilangan real mempunyai nilai invers real terhadap operasi penjumlahan dan perkalian, suatu bilangan real yang dioperasikan dengan invers menghasilkan unsur identitasnya.
 6. Sifat distributif yaitu penyebaran 2 operasi hitung yang berbeda, salah satu operasi hitung berfungsi sebagai operasi penyebaran dan operasi lainnya digunakan untuk menyebarkan bilangan yang dikelompokkan dalam tanda kurung.
 7. Tidak ada pembagi nol yaitu pembagian bilangan real dengan nol menghasilkan nilai tidak terdefinisi (*Undefined*).

4. Jenis-Jenis Bilangan Real

a. Bilangan Irrasional

Definisi

Bilangan irasional adalah sistem bilangan yang tidak dapat dinyatakan dalam bentuk pecahan $\frac{a}{b}$ namun dapat ditulis dalam bentuk desimal.

Contoh

Nilai π (phi) = 3,14159 26535 89793 ...

Nilai e (euler) = 2,7182818....

b. Bilangan Rasional (Z)

Definisi [5] (Gunawan H & Pratama E, 2016)

Bilangan rasional adalah sistem bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk pecahan $\frac{a}{b}$ dengan a dan b adalah bilangan bulat dan $b \neq 0$. Bilangan rasional juga memiliki batasan yaitu terdapat pada selang $(-\infty, \infty)$. Bilangan-bilangan rasional $\frac{4}{5}, \frac{1}{7}, \frac{3}{8}, \frac{6}{7}, \frac{5}{11}, \dots, \frac{a}{b} \dots$ disebut bilangan-bilangan rasional pecahan biasa atau sering disebut pecahan biasa.

Bilangan-bilangan rasional $2\frac{1}{2}, 4\frac{1}{5}, 7\frac{5}{6}, 23\frac{1}{8}, \dots, c\frac{a}{b}$, disebut bilangan-bilangan rasional pecahan sempurna atau sering disebut pecahan campuran.

Bilangan rasional terdiri dari bilangan bulat, bilangan pecahan, bilangan nol, bilangan asli, bilangan cacah, bilangan prima, bilangan komposit.

Bilangan rasional dapat juga ditulis sebagai desimal dengan deret angka yang berulang teratur.

Contoh:

- $\frac{1}{8} = 0,125000 \dots$ (0 berulang teratur)
- $\frac{1}{3} = 0,333333 \dots$ (3 berulang teratur)
- $\frac{1}{4} = 0,250000 \dots$ (0 berulang teratur)
- $\frac{2}{3} = 0,66666 \dots$ (6 berulang teratur)
- $\frac{3}{7} = 0,428571428571 \dots$ (428571 berulang beraturan)

- $\frac{1}{2} = 0,50000 \dots$ (0 berulang teratur)
- $\frac{3}{2} = 0,66666 \dots$ (6 berulang teratur)
- $\frac{17}{9} = 1,8888 \dots$ (8 berulang teratur)
- **Apa bilangan berikut rasional ???**

1. 0,33333333.....

Penyelesaian

Missal $A=0,33333333\dots$ (x 100)

$100A=33,333333\dots$ (1)

$A=0,33333333\dots$ (x 1000)

$1000A=333,333333\dots$ (2)

Lalu persamaan 2 dikurang dengan persamaan 1

$1000A-100A=333,333333\dots - 33,333333\dots$

$900A = 300$

$$A = \frac{300}{900} = \frac{1}{3}$$

$A = \frac{1}{3}$ dan $b = 3$ merupakan bilangan bulat dan tidak sama dengan 0.

Jadi 0,33333333.....**Merupakan bilangan rasional.**

2. 0,875865875.....

Penyelesaian:

Missal $A=0,875865875\dots$ (1)

Kalikan kedua ruas dengan 1.000.000, diperoleh

$1.000.000 A= 875865,875\dots$ (2)

Lalu persamaan 2 dikurang dengan persamaan 1

$$1.000.000 A - A = 875865,875..... - 0,875865875.....$$

$$999.999 A = 875.865$$

$$A = \frac{875.865}{999.999}$$

$a = 875.865$ daan $b = 999.999$ merupakan bilangan bulat dan tidak sama dengan 0.

Jadi $0,875865875.....$ **Merupakan bilangan rasional.**

3. $0, 12345875875875.....$

$$\text{Missal } A=0, 12345875875875..... \quad (\times 100.000)$$

$$100.000 A= 12345,875875875..... \quad \dots(1)$$

$$A = 0, 12345875875875..... \quad (\times 100.000.000)$$

$$100.000.000 A= 12345875,875875..... \quad \dots(2)$$

Lalu persamaan 2 dikurang dengan persamaan 1

$$100.000.000 A = 12345875,875875.....$$

$$\underline{100.000 A = \quad 12345,875875875... \quad -}$$

$$99.900.000 A = 12.333.530$$

$$A = \frac{12.333.530}{99.900.000}$$

$$A = \frac{12.333.53}{9.990.000}$$

$a = 12.333.53$ daan $b = 9.990.000$ merupakan bilangan bulat dan tidak sama dengan 0.

Jadi $0,12345875875875...$ **Merupakan bilangan rasional.**

4. $0,12334356456876535669876456\dots$

$$\text{Missal } A = 0,12334356456876535669876456\dots \quad \dots(1)$$

Kalikan kedua ruas dengan 1.00

$$100A = 12,334356456876535669876456\dots \quad \dots(2)$$

Lalu persamaan 2 dikurang dengan persamaan 1

$$100A = 12,334356456876535669876456\dots$$

$$A = 0,12334356456876535669876456\dots \quad -$$

$$99A = 12,21101\dots$$

$$A = \frac{12,21101\dots}{99}$$

Karena $a = 12,21101\dots$ bukan bilangan bulat.

Jadi $0,12334356456876535669876456\dots$

bukan bilangan Rasional.

c. Bilangan Pecahan

Definisi

Bilangan pecahan adalah bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk pecahan $\frac{a}{b}$ dengan a dan b adalah anggota bilangan bulat (a dan $b \in B$ dan $b \neq 0$). a disebut pembilang dan “b” adalah bilangan penyebut.[6](Subekti, 2013)

Contoh

Bilangan, $\frac{2}{3}, \frac{1}{5}, \frac{2}{9}, \frac{1}{8}, \frac{2}{11}$, dan lain-lain

d. Bilangan Bulat

Definisi

Himpunan Bilangan bulat adalah gabungan antara himpunan bilangan cacah dan himpunan bilangan bulat negatif. [6] (Subekti, 2013) Dapat juga diartikan bahwa himpunan dari semua bilangan bukan pecahan yang terdiri dari bilangan **bulat negatif** {..., -3, -2, -1}, **nol** {0}, dan bilangan **bulat positif** {1, 2, 3, ...}. Himpunan semua bilangan bulat dalam ilmu matematika dilambangkan dengan simbol \mathbb{Z} atau "Zahlen" (bahasa jerman yang berarti *bilangan*).

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Contoh

Sebuah termometer menunjukkan suhu 21°C . Setelah beberapa saat dicelupkan ke dalam air es dicampur garam, pada termometer terjadi penurunan suhu sebesar 25°C . Berapa suhu yang ditunjukkan termometer tersebut?

Penyelesaian :

Suhu mengalami penurunan/pengurangan, maka

$$\text{Suhu akhir} = 21^{\circ}\text{C} - 25^{\circ}\text{C} = -4^{\circ}\text{C}$$

e. **Bilangan Bulat Negatif**

Definisi

Bilangan bulat negatif adalah suatu himpunan yang memiliki anggota negatif, sedangkan ciri bilangan negatif adalah bilangan yang nilai paling besar terletak pada nilai -1. Bisa ditulis dengan $B = \{-1, -5, -7, -9\}$ terlihat nilai paling besar adalah -1. [6] (Subekti, 2013)

Contoh

bilangan bulat negatif adalah -1, -2, -3, -4, -5, dan seterusnya.

f. **Bilangan Cacah**

Definisi

Bilangan cacah adalah himpunan bilangan bulat yang tidak negatif, yaitu $\{0, 1, 2, 3 \dots\}$. Dengan kata lain himpunan bilangan asli ditambah 0. [6] (Subekti, 2013)
Bilangan cacah selalu tidak bertanda negatif.

Contoh

- **Contoh bilangan cacah kurang dari 13**

$$C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

- **Contoh bilangan cacah kurang dari 15**

$$C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$$

- **15 bilangan cacah yang pertama**

$$C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$$

- **Contoh bilangan cacah kuadrat**

$$\{0^2, 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, \dots\} = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots\}$$

Keterangan : Didapatkan dari himpunan bilangan diatas dipangkatkan ²

- **Contoh Bilangan cacah kelipatan 2**

{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26 ...}

Keterangan : Didapatkan dari angka 2 diawal yang ditambahkan dengan angka 2 dengan berurut.

- **Contoh bilangan cacah genap**

{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20...}

- **Contoh Bilangan cacah ganjil**

$C = \{ 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19 \dots \}$

g. Bilangan Nol

Bilangan nol adalah suatu himpunan yang memiliki anggota hanya bilangan nol saja. [6] (Subekti, 2013) Nol bukan bilangan positif atau pun bilangan negatif serta Nol.

h. Bilangan Asli

Bilangan asli adalah bilangan yang dimulai dari angka 1 dan angka selanjutnya didapat dari menambah 1 dari bilangan semula, bilangan asli dilambangkan dengan A. Nama lain dari bilangan asli adalah bilangan hitung atau bilangan yang bernilai positif (integrel positif) . [6] (Subekti, 2013)

contoh bilangan asli adalah {1, 2, 3, 4, 5, ...}

i. Bilangan Satu

Bilangan 1. [6] (Subekti, 2013)

j. Bilangan Prima

Definisi

Bilangan Prima adalah bilangan yang hanya memiliki 2 faktor, yaitu angka 1 dan bilangan itu sendiri, bilangan prima dilambangkan dengan P. [6] (Subekti, 2013)

Contoh

bilangan prima kurang dari 11 adalah {2, 3, 5, 7}

k. Bilangan Komposit

Definisi

Bilangan komposit adalah bagian dari bilangan asli yang memiliki lebih dari 2 faktor, sehingga bilangan komposit dapat dibagi lagi oleh bilangan lain selain angka 1 dan bilangan itu sendiri atau Bilangan asli lebih dari satu yang bukan merupakan bilangan prima. [6] (Subekti, 2013)

Contoh

Himpunan bilangan komposit 1 - 10

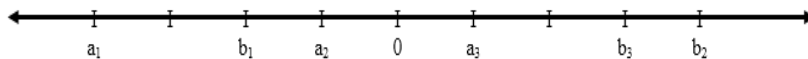
{4, 6, 8, 9}

Himpunan bilangan komposit ganjil

{9, 15, 21, 25, 27, ...}

B. KETAKSAMAAN ATAU PERTIDAKSAMAAN

Dua bilangan riil a dan b ditulis $a < b$ (dibaca, a kurang dari b) atau $b > a$ (dibaca, b lebih dari a) jika $b - a$ bertanda positif. Jika $a < b$ mempunyai arti bahwa letak titik yang mewakili b pada garis bilangan terletak di sebelah kanan titik yang mewakili



Dari gambar diperoleh

$$a_1 < b_1; a_2 < b_2; a_3 < b_3$$

Simbol $<$ dan $>$ dinamai simbol ketaksamaan yang memiliki sifat:

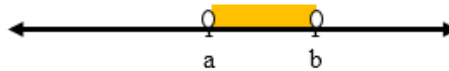
1. Jika $a \neq 0$ maka berlaku salah satu hubungan $a < b$, $a > b$, atau $a = b$.
2. Jika $a < b$, dan $b < c$ maka $a < c$.
3. Jika $a < b$ dan c adalah bilangan riil maka $a + c < b + c$.
4. Jika $a < b$ dan $c > 0$ maka $ac < bc$.
5. Jika $a < b$, dan $c < 0$ maka $ac > bc$.
6. Tidak ada bilangan a sehingga $a < a$.
7. Jika $0 < a < b$ maka $\frac{1}{a} > \frac{1}{b} > 0$
8. Jika $a \neq 0$ maka $a^2 > 0$.
9. Jika $a > 0$, $b > 0$ maka $a < b$ jika dan hanya jika $a^2 < b^2$.

Kita dapat menuliskan kesamaan dan ketaksamaan dengan satu simbol " \leq " atau " \geq ". Jika ditulis " $a \leq b$ " dibaca, " a kurang dari atau sama dengan b ". Jika ditulis " $a \geq b$ " dibaca, " a lebih dari atau sama dengan b ". Jika ditulis " $a < b \leq c$ "

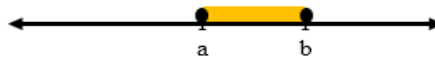
dibaca b lebih dari a dan b kurang dari atau sama dengan c".
 Pernyataan " $a < b$ " dinamai ketaksamaan sedangkan " $a < b \leq c$ " dinamai **ketaksamaan ganda**. [7] (Soemoenar)

1. Interval Ketaksamaan atau Pertidaksamaan

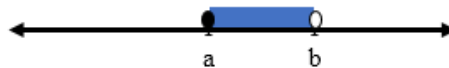
Himpunan semua bilangan riil di antara dua bilangan riil tertentu dinamai interval. Himpunan $\{x|a < x < b, x \in \text{bilangan riil}\}$ adalah interval dengan ujung-ujung interval a dan b. Kedua ujung interval bukan anggota interval maka interval tersebut dinamai **interval terbuka atau selang terbuka** dan ditulis (a, b). Dalam bentuk garis bilangan disajikan seperti pada Gambar dibawah ini.[8] (Purcell, 2010)



Jika ujung-ujung interval menjadi anggota maka interval tersebut dinamai **interval tertutup atau Selang tertutup**. Misal dalam bentuk himpunan $\{x|a \leq x \leq b, x \in \text{bilangan riil}\}$, ditulis [a, b]. Dalam bentuk garis bilangan disajikan seperti pada gambar dibawah ini. [8] (Purcell, 2010)



Interval $\{x|a \leq x < b, x \in \text{bilangan riil}\}$ dinamai **interval tertutup di kiri dan terbuka di kanan** dan ditulis [a,b). Dalam bentuk garis bilangan disajikan seperti pada Gambar dibawah ini.



Interval $\{x|a < x \leq b, x \in \text{bilangan riil}\}$ dinamai interval **terbuka di kiri dan tertutup di kanan** dan ditulis $(a, b]$. Dalam bentuk garis bilangan disajikan seperti gambar dibawah ini.



Jika ujung interval adalah $+\infty$ atau $-\infty$ maka interval tersebut dinamai **interval takhingga**, misalnya interval $\{x|x > a, x \in \text{bilangan riil}\}$ ditulis $(a, +\infty)$ dan digambarkan pada garis bilangan dibawah ini.



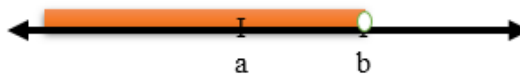
Garis Bilangan $[a, +\infty)$ atau $\{x|x \geq a, x \in \text{bilangan riil}\}$



Interval $\{x|x \leq b, x \in \text{bilangan riil}\}$ ditulis $(-\infty, b]$ dan digambarkan pada garis bilangan dibawah ini.











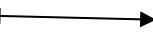
Garis bilangan $(-\infty, b)$ atau $\{x|x < b, x \in \text{bilangan riil}\}$



Simbol $+\infty$ menunjukkan bahwa nilai x menanjak menjadi besar sekali melampaui bilangan positif besar mana pun, dan simbol $-\infty$ menunjukkan bahwa nilai x merosot menjadi kecil sekali

melampaui bilangan negatif kecil mana pun. Himpunan bilangan riil disajikan dalam bentuk interval sebagai $\{x | -\infty < x < +\infty\}$ atau $(-\infty, +\infty)$. Interval dapat digunakan sebagai himpunan penyelesaian pertaksamaan.

Dari penjelasan diatas dapat disimpulkan terdapat macam-macam interval sebagai berikut: [8] (Purcell, 2010)

Himpunan	Selang	Grafik
$\{x x < a\}$	$(-\infty, a)$	
$\{x x \leq a\}$	$(-\infty, a]$	
$\{x a < x < b\}$	(a, b)	
$\{x a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$	
$\{x a \leq x < b\}$	$[a, b)$	
$\{x a < x \leq b\}$	$(a, b]$	
$\{x x > b\}$	(b, ∞)	
$\{x x \geq b\}$	$[b, \infty)$	
$\{x x \in R\}$	$(-\infty, \infty)$	

Contoh 1

Tentukanlah himpunan penyelesaian pertaksamaan:

$2 - 3x < 5x + 6$, dengan x bilangan riil.

Penyelesaian

$$\Leftrightarrow 2 - 3x < 5x + 6$$

$$\Leftrightarrow 2 - 3x - 2 < 5x + 6 - 2 \quad \text{sifat 3}$$

$$\Leftrightarrow -3x < 5x + 4$$

$$\Leftrightarrow -3x - 5x < 5x + 4 - 5x \quad \text{sifat 3}$$

$$\Leftrightarrow -8x < 4$$

$$\Leftrightarrow x > -\frac{1}{2} \quad \text{sifat 5}$$

Himpunan penyelesaian $(-\frac{1}{2}, +\infty)$

Contoh 2

Tentukanlah himpunan penyelesaian pertaksamaan:

$4 \leq 2x - 1 \leq 7$

Penyelesaian:

$$4 \leq 2x - 1 \leq 7$$

$$\Leftrightarrow 4 + 1 \leq 2x \leq 7 + 1 \quad \text{sifat 3}$$

$$\Leftrightarrow 5 \leq 2x \leq 8$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{2} \leq x \leq 4 \quad \text{sifat 4}$$

Himpunan penyelesaian $\left[\frac{5}{2}, 4\right]$

Contoh 3:

Tentukanlah himpunan penyelesaian pertaksamaan:

$$x^2 - 6x < -8$$

Penyelesaian:

$$x^2 - 6x < -8$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 < -8 + 8 \quad \text{sifat 3}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 < 0$$

Pertaksamaan yang akan diselesaikan merupakan pertaksamaan kuadrat. Cara menyelesaikannya memerlukan cara khusus.

- a. Tentukanlah titik pemisah Titik pemisah adalah akar-akar

$$x^2 - 6x + 8 = 0.$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)(x - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ atau } x = 4$$

- b. Gambarlah titik-titik pemisah pada garis bilangan



Oleh titik pemisah garis bilangan dipisahkan menjadi tiga daerah interval, yaitu $(-\infty, 2)$, $(2, 4)$, dan $(4, +\infty)$. Selanjutnya, diselidiki tanda setiap daerah interval dengan cara menentukan titik uji.

- c. Dipilih titik uji $x = 0$ yang terletak di daerah interval $(-\infty, 2)$.

$x = 0$ disubstitusikan ke $x^2 - 6x + 8$ didapat 8 yang merupakan bilangan positif. Berarti $(-\infty, 2)$ bertanda

positif. Daerah interval lainnya diberi tanda berseling + dan -.



- d. Himpunan penyelesaian adalah interval yang bertanda negatif sesuai dengan tanda soal yang harus diselesaikan. Pertaksamaan yang harus diselesaikan $x^2 - 6x + 8 < 0$. Himpunan penyelesaian adalah interval yang bertanda negatif, yaitu (2, 4).

Contoh 4:

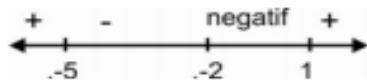
Tentukanlah himpunan penyelesaian pertaksamaan:

$$(x + 5)(x + 2)^2(x - 1) > 0$$

Penyelesaian:

- Tentukanlah titik pemisah $(x + 5)(x + 2)^2(x - 1) = 0$
 $\Leftrightarrow x = -5; x = -2; x = -2, \text{ atau } x = 1$
- Gambarlah titik-titik pemisah pada garis bilangan. Garis bilangan dipisahkan oleh titik-titik pemisah menjadi empat daerah interval, yaitu $(-\infty, -5)$, $(-5, -2)$, $(-2, 1)$, dan $(1, +\infty)$. Di titik $x = -2$ ada dua titik yang berimpit.
- Dipilih titik uji yang terletak pada interval $(-2, 1)$, yaitu titik $x = 0$.
 $x = 0$ disubstitusikan ke $(x + 5)(x + 2)^2(x - 1)$ didapat -20 yang merupakan bilangan negatif. Berarti interval $(-2, 1)$ bertanda negatif. Interval yang lain diberi tanda berseling +

dan $-$. Tetapi ingat bahwa titik $x = -2$ adalah titik rangkap dua sehingga interval $(-5, -2)$ bertanda negatif juga.



d. Himpunan penyelesaian adalah interval yang bertanda positif, yaitu $(-\infty, 5)$, atau $(1, +\infty)$.

Contoh 5

Diketahui : $A = \{x | 2 < x \leq 18\}$, dengan x bilangan bulat

$B = \{x | 7 \leq x < 25\}$, dengan x bilangan bulat

Lukislah A dan B pada garis bilangan kemudian tentukanlah

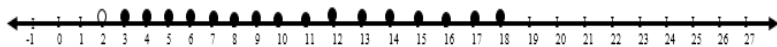
a) $A \cup B$

b) $A \cap B$

c) $A - B$

Penyelesaian

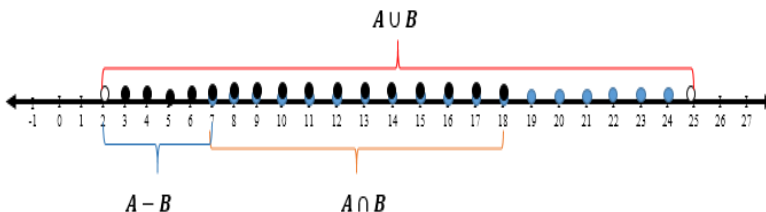
Garis bilangan $A = \{x | 2 < x \leq 18\}$, dengan x bilangan bulat



Garis bilangan $B = \{x | 7 \leq x < 25\}$, dengan x bilangan bulat



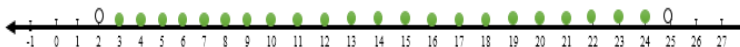
Garis bilangan A dan B digabungkan



a. $A \cup B = \{x | 2 < x < 25\}$, dengan x bilangan bulat

$$A \cup B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24\}$$

Sehingga diperoleh garis bilangan $A \cup B$, pada garis bilangan dibawah ini



b. $A \cap B = \{x | 7 \leq x \leq 18\}$, dengan x bilangan bulat

$$\text{Anggota } A \cap B = \{7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$$

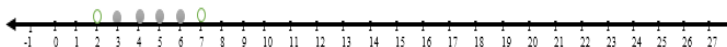
Sehingga diperoleh garis bilangan $A \cap B$, pada garis bilangan dibawah ini



c. $A - B = \{x | 2 < x < 7\}$, dengan x bilangan bulat

$$\text{Anggota } A - B = \{3, 4, 5, 6\}$$

Sehingga diperoleh garis bilangan $A - B$, pada garis bilangan dibawah ini



Contoh 6

Diketahui : $A = \{x|2 < x \leq 18\}$, dengan x bilangan riil

$B = \{x|7 \leq x < 25\}$, dengan x bilangan riil

Lukislah A dan B pada garis bilangan kemudian tentukanlah

a. $A \cup B$

b. $A \cap B$

c. $A - B$

Penyelesaian

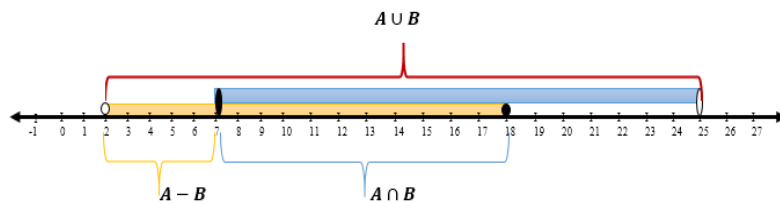
Garis bilangan $A = \{x|2 < x \leq 18\}$, dengan x bilangan riil



Garis bilangan $B = \{x|7 \leq x < 25\}$, dengan x bilangan riil

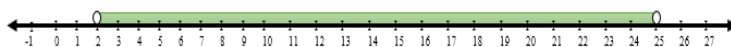


Gabungan dari garis bilangan A dan B



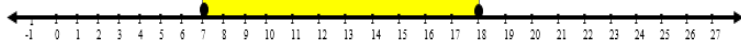
a. $A \cup B = \{x|2 < x < 25\}$, dengan x bilangan riil

Sehingga diperoleh garis bilangan $A \cup B$, pada garis bilangan dibawah ini



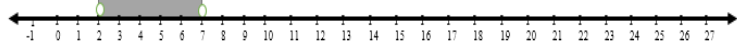
b. $A \cap B = \{x | 7 \leq x \leq 18\}$, dengan x bilangan riil

Sehingga diperoleh garis bilangan $A \cap B$, pada garis bilangan dibawah ini



c. $A - B = \{x | 2 < x < 7\}$, dengan x bilangan riil

Sehingga diperoleh garis bilangan $A - B$, pada garis bilangan dibawah ini



2. Pertidaksamaan Rasional [9]

Pertidaksamaan rasional adalah suatu bentuk pertidaksamaan yang memuat fungsi rasional, yaitu fungsi yang dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{f(x)}{g(x)}$ dengan syarat $g(x) \neq 0$.

Bentuk umum pertidaksamaan rasional :

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0 \quad \text{atau} \quad \frac{f(x)}{g(x)} \geq 0 ; g(x) \neq 0$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} < 0 \quad \text{atau} \quad \frac{f(x)}{g(x)} \leq 0 ; g(x) \neq 0.$$

Berikut hal-hal yang tidak dibenarkan dalam menyederhanakan bentuk pertidaksamaan rasional karena akan merubah domain fungsi tersebut :

1. Kali silang

$$\frac{f(x)}{g(x)} > c \neq f(x) > c \cdot g(x)$$

2. Mencoret fungsi ataupun faktor yang sama pada pembilang dan penyebut

$$\frac{f(x) \cdot g(x)}{g(x)} > c \neq f(x) > c.$$

Himpunan penyelesaian suatu pertidaksamaan rasional dapat ditentukan dengan langkah-langkah sebagai berikut :

1. Nyatakan dalam bentuk umum.
2. Tentukan pembuat nol pada pembilang dan penyebut.
3. Tulis pembuat nol pada garis bilangan dan tentukan tanda untuk tiap-tiap interval pada garis bilangan.
4. Tentukan daerah penyelesaian. Untuk pertidaksamaan ">" atau "≥" daerah penyelesaian berada pada interval yang bertanda positif dan untuk pertidaksamaan "<" atau "≤" daerah penyelesaian berada pada interval yang bertanda negatif.
5. Dengan memperhatikan syarat bahwa penyebut tidak sama dengan nol, tulis himpunan penyelesaian yaitu interval yang memuat daerah penyelesaian.

Contoh 1

Tentukan Himpunan Penyelesaian dari $\frac{x-5}{x^2+6x+9} \leq 0$

Penyelesaian :

$$\frac{x-5}{x^2+6x+9} \leq 0$$

Pembuat nol :

$$x-5=0 \Rightarrow x=5 \quad \text{dan} \quad (x+3)(x+3)=0 \Rightarrow x=-3$$

Syarat Penyebut :

$$(x + 3)(x + 3) \neq 0 \Rightarrow x \neq -3$$



Karena pertidaksamaan bertanda " \leq ", maka daerah penyelesaian berada pada interval yang bertanda (-).

$$\therefore \text{HP} = \{x < -3 \text{ atau } -3 < x \leq 5\} \text{ atau } \text{HP} = \{x \leq 5 \text{ dan } x \neq -3\}$$

Contoh 2:

Tentukanlah himpunan penyelesaian pertaksamaan

$$\frac{x}{x-2} \leq 5$$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} & \frac{x}{x-2} \leq 5 \\ \Leftrightarrow & \frac{x}{x-2} - 5 \leq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{x}{x-2} - \frac{5(x-2)}{x-2} \leq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{x-5x+10}{x-2} \leq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{-4x+10}{x-2} \leq 0 \end{aligned}$$

Pembuat nol

$$-4x + 10 = 0$$

$$x = \frac{5}{2}$$

dan

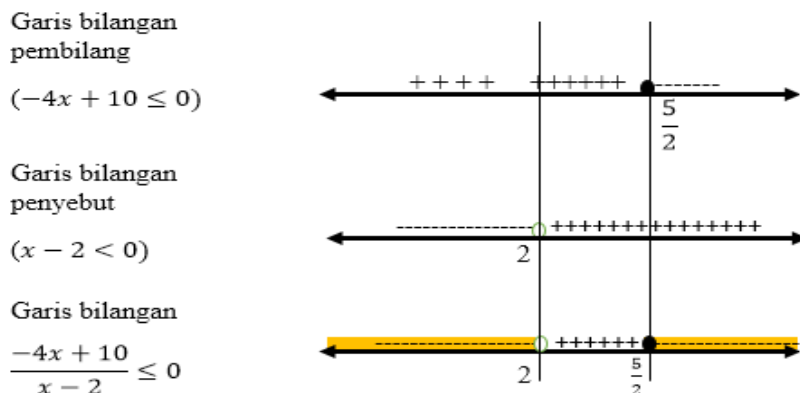
$$x - 2 = 0$$

$$x = 2$$

Syarat Penyebut

$$x - 2 \neq 0$$

$$x \neq 2$$



Himpunan penyelesaian adalah interval yang bertanda negatif. Ujung interval $x = \frac{5}{2}$ termasuk, tetapi ujung interval $x = 2$ tidak termasuk karena untuk $x = 2$ menyebabkan penyebut dari pecahan $\frac{-4x+10}{x-2}$ bernilai nol sehingga pecahan tersebut kehilangan arti.

Jadi, himpunan penyelesaian adalah $(-\infty, 2)$ atau $\left[\frac{5}{2}, +\infty\right)$

3. Pertidaksamaan Rasional yang Memuat Fungsi Definit

Fungsi definit positif dalam suatu pertidaksamaan rasional dapat diabaikan tanpa harus membalik tanda pertidaksamaan. [9]

Contoh :

Tentukan Himpunan Penyelesaian dari $\frac{x-4}{x^3+x} \leq 0$

Penyelesaian :

$$\frac{x - 4}{x(x^2 + 1)} \leq 0$$

$x^2 + 1$ merupakan fungsi definit positif,

dapat dibuktikan dengan syarat definit positif yaitu : $a > 0$

dan $D < 0$.

Jadi, $x^2 + 1$ dapat diabaikan tanpa harus membalik tanda pertidaksamaan, sehingga pertidaksamaan diatas setara dengan :

$$\frac{x - 4}{x} \leq 0$$

Pembuat nol :

$$x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$$

$$x = 0$$

Syarat : $x \neq 0$



Karena pertidaksamaan bertanda " \leq ", maka daerah penyelesaian berada pada interval yang bertanda (-). Diperoleh Himpunan Penyelesaian $\{0 < x \leq 4\}$

Fungsi definit negatif dalam suatu pertidaksamaan rasional dapat diabaikan dengan syarat tanda pertidaksamaan harus diubah atau dibalik. [9]

Contoh :

Tentukan Himpunan Penyelesaian dari $\frac{-x^2+x-2}{x^2-4x+3} \leq 0$

Penyelesaian: :

$$\frac{-x^2 + x - 2}{(x - 1)(x - 3)} \leq 0$$

$-x^2 + x - 2$ merupakan fungsi definit negatif,

Dapat dibuktikan dengan syarat definit negatif yaitu : $a < 0$ dan $D < 0$.

Jadi, $-x^2 + x - 2$ dapat diabaikan dengan syarat tanda pertidaksamaan harus diubah atau dibalik, sehingga pertidaksamaan diatas setara dengan :

$$\frac{1}{(x - 1)(x - 3)} \leq 0$$

Pembuat nol :

$$(x - 1)(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ atau } x = 3$$

Syarat :

$$(x - 1)(x - 3) \neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \text{ atau } x \neq 3$$



Karena pertidaksamaan bertanda " \geq ", maka daerah penyelesaian berada pada interval yang bertanda (+).

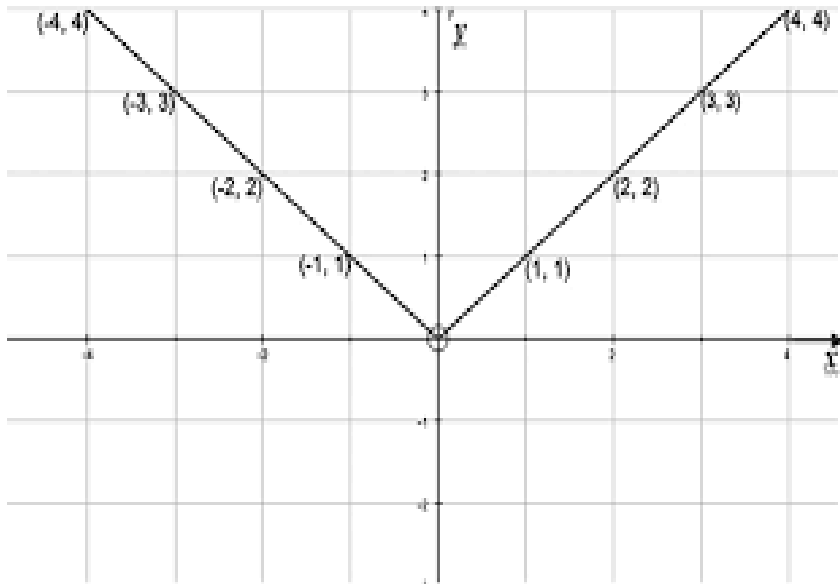
$$\therefore \text{HP} = \{x < 1 \text{ atau } x > 3\}$$

C. NILAI MUTLAK

Fungsi nilai mutlak adalah suatu fungsi yang aturannya memuat nilai mutlak. Nilai mutlak suatu bilangan real x , dinyatakan dengan $|x|$, didefinisikan sebagai berikut.[10]

$$|x| = \begin{cases} x & \text{jika } x \geq 0 \\ -x & \text{jika } x < 0 \end{cases}$$

Misalkan $|5| = 5$, $|0| = 0$, dan $|-3| = 3$. Salah satu cara terbaik untuk membayangkan nilai mutlak adalah sebagai jarak (tak berarah). Khususnya, $|x|$ adalah jarak antara x dengan titik asal, demikian juga $|x - a|$ adalah jarak antara x dengan a . [10] Grafik fungsi $f(x) = |x|$ ditunjukkan pada Gambar dibawah ini.



Jika $x = 0$, maka $y = 0$

$x = 1$, maka $y = 1$

$x = 2$, maka $y = 2$

$x = 3$, maka $y = 3$

jika $x = -1$, maka $y = 1$

$x = -2$, maka $y = 2$

$x = -3$, maka $y = 3$

$x = -4$, maka $y = 4$

Adapun sifat-sifat nilai mutlak berperilaku manis pada perkalian dan pembagian, tetapi tidak begitu baik dalam penambahan dan pengurangan, yaitu: [10]

1. $|xy| = |x| |y|$
2. $|x/y| = |x|/|y|$
3. $|x + y| \leq |x| + |y|$ (ketaksamaan segitiga)
4. $|x - y| \geq |x| - |y|$ 5. $a|x| = |ax|$; a adalah konstanta.

Contoh:

1. $|x - 9|$ dapat ditulis sebagai $x - 9$ jika $x \geq 9$

$|x - 9|$ dapat ditulis sebagai $-(x - 9) = 9 - x$ jika $x < 9$

2. $|x + 5y|$ dapat ditulis sebagai $x + 5y$ jika $x + 5y \geq 0$

$|x + 5y|$ dapat ditulis sebagai $-(x + 5y)$ jika $x + 5y < 0$

Dari definisi harga mutlak di atas dapat disimpulkan bahwa harga mutlak suatu bilangan adalah bilangan positif atau nol. Di bawah ini disajikan beberapa dalil tentang sifat mutlak bilangan real.

Dalil 1.1: [7] (Soemoenar)

$|x| < a$ jika dan hanya jika $-a < x < a$, untuk $a > 0$

Bukti:

Bukti dalil ini terdiri atas dua bagian, yaitu:

Jika $-a < x < a$ maka $|x| < a$, untuk $a > 0$, dan

Jika $|x| < a$ maka $-a < x < a$, untuk $a > 0$.

Bagian 1:

Akan dibuktikan jika $-a < x < a$ maka $|x| < a$, untuk $a > 0$. Untuk membuktikannya perlu ditinjau dua kemungkinan, yaitu untuk $x \geq 0$ dan untuk $x < 0$.

1. Untuk $x \geq 0$

Menurut definisi $|x| = x$, jadi jika $x < a$ maka $|x| < a$. Terbukti.

2. Untuk $x < 0$

Menurut definisi $|x| = -x$, jadi jika $-a < x$ maka $a > -x$ dengan demikian $|x| < a$. **Terbukti.**

Terbuktilah bagian 1: Jika $-a < x < a$ maka $|x| < a$.

Bagian 2:

Akan dibuktikan jika $|x| < a$ maka $-a < x < a$, untuk $a > 0$. Seperti pembuktian pada bagian 1, di sini ditinjau juga untuk dua kemungkinan, yaitu untuk $x \geq 0$ dan $x < 0$.

1. Untuk $x \geq 0$

Menurut definisi $|x| = x$, jadi jika $|x| < a$ maka $x < a$ untuk $a > 0$. Jika berlaku untuk $a > 0$ maka berlaku juga untuk $-a < 0$. Jadi, berlaku untuk $-a < 0 < x < a$ atau $-a < x < a$.

2. Untuk $x < 0$.

Menurut definisi $|x| = -x$, jadi jika $|x| < a$ maka $-x < a$. Tetapi karena $x < 0$ maka $-x > 0$ sehingga $-a < 0 < -x < a$ atau $-a < -x < a$ atau $a > x > -a$.

Terbuktilah bagian 2, jika $|x| < a$ maka $-a < x < a$ untuk $a > 0$.

❖ Maka lengkaplah pembuktian dalil: $|x| < a$ jika dan hanya jika $-a < x < a$ untuk $a > 0$.

Akibat:

Sebagai akibat dalil 1.1 di atas.

$|x| \leq a$ jika dan hanya jika $-a \leq x \leq a$, untuk $a > 0$.

Dalil 1.2: [7] (Soemoenar)

$|x| > a$ jika dan hanya jika $x > a$ atau $x < -a$, untuk $a > 0$.

Bukti:

Bukti terdiri atas dua bagian, yaitu:

Jika $x > a$ atau $x < -a$ maka $|x| > a$, untuk $a > 0$, dan

Jika $|x| > a$ maka $x > a$ atau $x < -a$, untuk $a > 0$.

Bagian 1:

Akan dibuktikan, jika $x > a$ atau $x < -a$ maka $|x| > a$, untuk $a > 0$.

Ditinjau untuk harga $x \geq 0$ dan $x < 0$.

1. Untuk $x \geq 0$

Menurut definisi $|x| = x$ jadi jika $x > a$ maka $|x| > a$. Terbukti.

2. Untuk $x < 0$

Menurut definisi $|x| = -x$ jadi jika $x < -a$ maka $-x > a$ dengan demikian $|x| > a$. **Terbukti.**

Terbuktilah jika $x > a$ atau $x < -a$ maka $|x| > a$, untuk $a > 0$.

Bagian 2:

Akan dibuktikan jika $|x| > a$ maka $x > a$ atau $x < -a$, untuk $a > 0$.

Ditinjau untuk harga $x \geq 0$ dan $x < 0$.

1. Untuk $x \geq 0$

Menurut definisi $|x| = x$ jadi jika $|x| > a$ maka $x > a$. Terbukti.

2. Untuk $x < 0$

Menurut definisi $|x| = -x$ jadi jika $|x| > a$ maka $-x > a$ atau $x < a$, untuk $a > 0$. **Terbukti.**

Terbuktilah jika $|x| > a$ maka $x > a$ atau $x < a$, untuk $a > 0$.

Maka lengkaplah pembuktian dalil: $|x| > a$ jika dan hanya jika $x > a$ atau $x < a$, untuk $a > 0$.

Akibat:

Sebagai akibat dalil 1.2 di atas.

$|x| \geq a$ jika dan hanya jika $x \geq a$ atau $x \leq -a$, untuk $a > 0$.

Contoh 1:

Selesaikanlah $|3x + 2| = 5$

Penyelesaian:

$$|3x + 2| = 5$$

Menurut definisi

$$|3x + 2| = 3x + 2 \quad \text{untuk } (3x + 2) \geq 0$$

$$|3x + 2| = -(3x + 2) \quad \text{untuk } (3x + 2) < 0$$

Untuk $(3x + 2) \geq 0$

$$|3x + 2| = 5$$

$$\Leftrightarrow 3x + 2 = 5$$

$$\Leftrightarrow 3x = 3$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

Untuk $(3x + 2) < 0$

$$\begin{aligned}
& |3x + 2| = 5 \\
\Leftrightarrow & -(3x + 2) = 5 \\
\Leftrightarrow & -3x - 2 = 5 \\
\Leftrightarrow & -3x = 7 \\
\Leftrightarrow & x = -\frac{7}{3}
\end{aligned}$$

Penyelesaian : $x = 1$ atau $x = -\frac{7}{3}$

Contoh 2:

Tentukanlah himpunan penyelesaian: $|x - 5| < 4$

Penyelesaian:

Menurut dalil, $|x| < a$ jika dan hanya jika $-a < x < a$ untuk $a > 0$.

Jadi, $|x - 5| < 4$ jika dan hanya jika:

$$-4 < x - 5 < 4$$

$$1 < x < 9$$

Himpunan penyelesaian $\{x \mid 1 < x < 9\}$.

Contoh 3:

Tentukanlah himpunan penyelesaian: $|3x + 2| > 5$

Penyelesaian:

Menurut dalil $|x| > a$ jika dan hanya jika $x > a$ atau $x < -a$.

Jadi, $|3x + 2| > 5$ jika dan hanya jika

$$(3x + 2) > 5 \text{ atau } (3x + 2) < -5.$$

Untuk $3x + 2 > 5$

$$\Leftrightarrow 3x > 3$$

$$\Leftrightarrow x > 1$$

Untuk $3x + 2 < -5$

$$\Leftrightarrow 3x < -7$$

$$\Leftrightarrow x < -\frac{7}{3}$$

Himpunan penyelesaian $\{x|x > 1\}$ atau $\{x|x < -\frac{7}{3}\}$

Akar Kuadrat.

Penyelesaian $x^2 = 9$ adalah $x = \pm 9$ atau $x = \pm 3$. Jelaslah bahwa $\sqrt{9} = 3$ bukan ± 3 . Jadi, simbol a , untuk $a \geq 0$ adalah akar tak negatif dari a yang disebut akar kuadrat utama dari a . Secara umum, ditulis $\sqrt{x^2} = |x|$

Dalil 1.3: [7] (Soemoenar)

Jika a dan b adalah bilangan real maka:

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

Bukti:

$$|a \cdot b| = \sqrt{(a \cdot b)^2}$$

$$= \sqrt{a^2 \cdot b^2}$$

$$= \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b^2}$$

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

Dalil 1.4: [7] (Soemoenar)

Jika a dan b adalah bilangan real:

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$$

Bukti:

$$\begin{aligned} \left| \frac{a}{b} \right| &= \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{a^2}{b^2}} \\ &= \frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{b^2}} \\ \left| \frac{a}{b} \right| &= \frac{|a|}{|b|} \end{aligned}$$

Dalil 1.5: [7] (Soemoenar)

Jika a dan b adalah bilangan real maka:

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

Bukti:

Menurut definisi

$|a| = a$ untuk $a \geq 0$, berarti $a = |a|$ dan $|a| \geq 0$.

$|a| = -a$ untuk $a < 0$, berarti $a = -|a|$ dan $-|a| < 0$.

Maka untuk setiap bilangan real a dan b berlaku hubungan:

$$-|a| \leq a \leq |a| \text{ dan } -|b| \leq b \leq |b|$$

Dari dua ketaksamaan ini dapat dibentuk ketaksamaan:

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$$

Akibat dalil 1

menyebutkan $|x| \leq a$ jika dan hanya jika $-a \leq x \leq a$, jadi sesuai dengan akibat dalil 1 didapat kesimpulan $|a + b| \leq |a| + |b|$. Terbukti.

Akibat:

Jika a dan b adalah bilangan real sebarang maka:

$$|a - b| \leq |a| + |b|$$

Bukti:

$$|a - b| = |a + (-b)|$$

Karena $|a + (-b)| \leq |a| + |(-b)|$ maka

$$|a - b| \leq |a| + |(-b)|$$

$$|a - b| \leq |a| + |b|.$$

Akibat

Jika a dan b adalah bilangan real sebarang maka:

$$|a| - |b| \leq |a - b|$$

Bukti:

$$|a| = |a - b + b|$$

$$|a| = |(a - b) + b|$$

Karena $|(a - b) + b| \leq |a - b| + |b|$ maka:

$$|a| \leq |a - b| + |b|$$

Jika ruas kiri dan ruas kanan dikurangi dengan $|b|$ maka:

$$|a| - |b| \leq |a - b|$$

Dalil 1.6: [7] (Soemoenar)

$|a| < |b|$ jika dan hanya jika $a^2 < b^2$.

Bukti:

Bukti terdiri atas dua bagian, yaitu:

jika $|a| < |b|$ maka $a^2 < b^2$, dan

jika $a^2 < b^2$ maka $|a| < |b|$.

Bagian 1:

$$|a| < |b|$$

$$|a| |a| < |b| |a| \text{ dan } |a| |b| < |b| |b|$$

$$|a|^2 < |a| |b| \text{ dan } |a| |b| < |b|^2$$

$$|a|^2 < |b|^2$$

$$a^2 < b^2. \text{ Terbukti.}$$

Bagian 2:

$$a^2 < b^2$$

$$|a|^2 < |b|^2$$

$$|a|^2 - |b|^2 < 0$$

$(|a| - |b|)(|a| + |b|) < 0$. Karena $|a| + |b| > 0$ maka:

$$|a| - |b| < 0$$

$$|a| < |b|. \text{ Terbukti.}$$

Maka lengkaplah bukti dalil $|a| < |b|$ jika dan hanya jika $a^2 < b^2$.

Contoh 4:

Tentukanlah himpunan penyelesaian: $|x - 2| < 3|x + 7|$

Penyelesaian:

$$|x - 2| < 3|x + 7|$$

$$\Leftrightarrow |x - 2| < |3x + 21|$$

Menurut dalil 1.6

$$|a| < |b| \text{ jika dan hanya jika } a^2 < b^2$$

Jadi $|x - 2| < |3x + 21|$ jika dan hanya jika $(x - 2)^2 < (3x + 21)^2$

$$(x - 2)^2 < (3x + 21)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 < 9x^2 + 126x + 441$$

$$\Leftrightarrow 8x^2 + 130x + 437 > 0$$

$$\Leftrightarrow (4x + 19)(2x + 23) > 0$$

1. Tentukanlah titik pemisah:

$$(4x + 19)(2x + 23) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{19}{4} \text{ atau } x = -\frac{23}{2}.$$

2. Gambarlah titik-titik pemisah pada garis bilangan



Garis bilangan dipisahkan oleh titik-titik pemisah menjadi tiga daerah interval, yaitu

$$\left(-\infty, -\frac{23}{2}\right), \left(-\frac{19}{4}, -\frac{23}{2}\right) \text{ dan } \left(-\frac{19}{4}, +\infty\right)$$

3. Titik uji dipilih titik yang terletak di daerah interval

$$\left(-\frac{19}{4}, +\infty\right), \text{ yaitu titik } x = 0.$$

$x = 0$ disubstitusikan ke $(4x + 19)(2x + 23)$ didapat 437 suatu bilangan positif. Jadi interval $\left(-\frac{19}{4}, +\infty\right)$

bertanda positif. Daerah interval yang lain diberi tanda berseling + dan -.

4. Himpunan penyelesaian adalah daerah interval yang bertanda positif, yaitu $(-\infty, -\frac{23}{2})$, atau $(-\frac{19}{4}, +\infty)$

Contoh 5

Selesaikanlah $|x - 2| = |3 - 2x|$

Penyelesaian

Menurut definisi $|x - 2| = |3 - 2x|$

$$|x - 2| = \begin{cases} (x-2) & \text{untuk } (x - 2) \geq 0 \\ (x-2) & \text{untuk } (x - 2) < 0 \end{cases}$$

$$x - 2 = 3 - 2x \text{ atau } -(x - 2) = 3 - 2x$$

$$\diamond x - 2 = 3 - 2x \text{ untuk } (x - 2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 3x = 5$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$$

$$\diamond -(x - 2) = 3 - 2x \text{ untuk } (x - 2) < 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1.$$

Jadi nilai x yang memenuhi adalah $x = 1$ atau $x = \frac{5}{3}$

Contoh 6:

Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan

$|9 - 2x| > |4x|$, dengan x bilangan riil.

Penyelesaian

Gunakanlah Dalil 1.6. $|a| < |b|$ jika dan hanya jika $a^2 < b^2$

$$|9 - 2x| > |4x| \text{ jika dan hanya jika } (9 - 2x)^2 > (4x)^2$$

$$\Leftrightarrow (9 - 2x)^2 > (4x)^2$$

$$\Leftrightarrow 81 - 36x + 4x^2 > 16x^2$$

$$\Leftrightarrow -12x^2 - 36x + 81 > 0$$

$$\Leftrightarrow 12x^2 + 36x - 81 < 0$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 12x - 27 < 0$$

$$\Leftrightarrow (2x + 9)(2x - 3) < 0$$

Titik pemisah $x = -\frac{9}{2}$ atau $x = \frac{3}{2}$.

Setelah diuji dengan titik uji diperoleh: $-\frac{9}{2} < x < \frac{3}{2}$

Jadi himpunan penyelesaiannya diperoleh

$$\{x \mid -\frac{9}{2} < x < \frac{3}{2}, x \in \mathbb{R}\} \text{ atau } (-\frac{9}{2}, \frac{3}{2})$$

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Purfini, A Puti. 2018. Sistem Bilangan Real. <https://repository.unikom.ac.id/56571/1/BAB%201%20sistem%20bilangan%20real.pdf>.
- [2] <https://ditamatematika.blogspot.com/2020/08/sistem-bilangan-real.html> [Diakses 23/01/2021]
- [3] Sudihartinih, Eyus. 2014. Operasi Hitung Pada Bilangan. Bandung: Universitas Pendidikan Indonesia.
- [4] Sugiarto & Isti Hidayah. 2011. *Pengantar Dasar Matematika (PDM)*. Semarang: Universitas Negeri Semarang.
- [5] Gunawan, H & Pratama, E. 2016. *Pengantar Analisis Real*. Bandung: Institut Teknologi Bandung.
- [6] Subekti, Tri dan winahyu arif wicaksono. 2013. Bilangan Real dan Rasional. Surakarta: Universitas sebelas maret.
- [7] Drs. Soemoenar .Modul 1 Bilangan Real. <http://repository.ut.ac.id/4696/1/PEMA4108-M1.pdf> [Diakses, 20/12/2020]
- [8] Purcell, Edwin J. dan Dale Varbeg. 2010. “Kalkulus dan Geometri Analitis Jilid 1. Ed 9”. Jakarta: Erlangga.
- [9] <https://smatika.blogspot.com/2016/11/pertidaksamaan-rasional-atau-pecahan.html#:~:text=Pertidaksamaan%20rasional%20ad>

alah%20suatu%20bentuk,g(x)%20%E2%89%A0%200.&tex
t=Mencoret%20fungsi%20ataupun%20faktor%20yang,da
n%20penyebut%20f(x). [Diakses, 21/12/2020]

- [10] Indrawati dan Cinta Sembiring. Kajian Fungsi Nilai Mutlak dan Grafiknya. Jurusan Matematika FMIPA, Universitas Sriwijaya. Jurnal Penelitian Sains Volume 14 Nomer 1(A) 14102.

BAB II

BILANGAN BULAT

(Oleh : Muhammad Yogi Ramadhan)

A. PENDAHULUAN

Bilangan bulat adalah bilangan yang terdiri dari bilangan asli, nol, dan bilangan asli negatif. Tanda negatif merupakan ciri utama dari bilangan bulat.

Tahun 1890, matematikawan Jepang bekerja pada bilangan itu dan menyebutkannya sebagai Bilangan Bulat (integers). Dalam Bahasa Latin disebut “tidak tersentuh” (untouched). Simbol bilangan bulat menggunakan huruf ‘Z’ dari Bahasa Jerman ‘Zahlen’, yang artinya bilangan.

Nol ditemukan sebelumnya oleh bangsa Babylonia, Mayan, dan India. Matematikawan Hindu India yang pertama menyebut bilangan “nol”. Negara atau bangsa lain belum pernah menyebut “nol” sebagai suatu bilangan hingga ditemukannya wilayah India. Sebelum nol digunakan dalam perhitungan, matematikawan menggunakan suatu ruang hitam untuk menentukan sesuatu yang tidak ada.

Bilangan negatif akhirnya diterima sebagai sistem bilangan pada abad 19. Bilangan negatif diperlukan untuk menyelesaikan persamaan-persamaan yang rumit seperti persamaan kubik atau persamaan kuartik.

Brahmagupta yang hidup sekitar tahun 630 SM di India menggunakan bilangan positif untuk menyatakan sesuatu yang dimiliki (aset), dan bilangan negatif digunakan untuk menyatakan hutang.

Cina terkenal sebagai budaya pertama yang memperkenalkan dan menggunakan bilangan negatif. Bilangan negatif disajikan dalam batang-batang merah.

Di Eropa bilangan negatif mulai digunakan pada tahun 1545. Sebelum sistem bilangan digunakan, seseorang menggunakan batu, stik, atau jari-jari untuk menghitung.

Girolamo Cardano (1501-1576) adalah matematikawan Itali yang mendeskripsikan bilangan negatif yang sistematis. Bilangan negatif merupakan penyelesaian dari persamaan kuadrat maupun kubik.[1]

B. PEMBAHASAN

1) Bilangan Bulat

- a. Bilangan bulat adalah bilangan yang tidak mempunyai pecahan desimal, misalnya 8, 21, 8765, -34, 0.
- b. Berlawanan dengan bilangan bulat adalah bilangan riil yang mempunyai titik desimal, seperti 8.0, 34.25, 0.02.

[2]

2) Jenis-Jenis Bilangan Bulat

- a. Bilangan bulat dibagi menjadi 3 yaitu bilangan bulat negatif (-), bilangan nol (0) dan bilangan bulat positif (+)
- b. Bilangan bulat negatif (-) merupakan bilangan yang terletak disebelah kiri angka nol (0) pada sebuah garis bilangan. Contoh bilangan bulat negatif (-) adalah -1, -2, -3, -4, -5...dst.
- c. Bilangan nol (0) merupakan bilangan yang berdiri sendiri yang letaknya berada tepat ditengah-tengah garis bilangan.
- d. Bilangan bulat positif (+) merupakan bilangan yang terletak disebelah kanan angka nol pada sebuah garis bilangan. Contoh bilangan bulat positif (+) adalah 1, 2, 3, 4, 5...dst.[3]

3) Notasi Bilangan Bulat

Notasi himpunan bilangan bulat adalah Z atau B . Notasi sistem bilangan bulat adalah $(Z, +)$ atau $(Z, +)$ atau $(B, +)$ atau $(B, +)$. [4]

Definisi 1

Jika n bilangan bulat, maka $-n$ didefinisikan tunggal .

sehingga $n + -n = -n + n = 0$ atau jika n bilangan bulat, maka $n + (-n) = (-n) + n = 0$. $(-n)$ disebut lawan dari (invers penjumlahan dari) n dan 0 disebut elemen identitas terhadap penjumlahan.

Contoh :

$$7 + -7 = -7 + 7$$

$$0 = 0,$$

maka 7 adalah invers dari -7 dan -7 adalah invers dari 7.[5]

Definisi 1 menyatakan bahwa untuk setiap bilangan bulat n ada dengan tunggal bilangan bulat $(-n)$ sedemikian hingga $n + (-n) = (-n) + n = 0$. Lawan dari $-n$ adalah $-(-n)$ sehingga $(-n) + (-(-n)) = (-(-n)) + (-n) = 0$. Karena $(-n) + n = n + (-n) = 0$ dan mengingat ketunggalan dari n , maka $(-(-n)) = n$. jadi lawan dari $(-n)$ adalah n . Secara umum $-n$ adalah satu-satunya bilangan yang mana bila ditambah n memberikan 0, dimana n adalah suatu bilangan asli. Bilangan $-n$ disebut invers penjumlahan (aditif) dari n . Contoh: 7 adalah invers penjumlahan dari -7 dan -7 adalah inverspenjumlahan dari 7 sebab $7 + (-7) = (-7) + 7 = 0$.

Himpunan bilangan bulat adalah gabungan dari himpunan bilangan cacah dan himpunan $(-n)$ dengan n bilangan asli, sehingga untuk setiap bilangan cacah n adalah bilangan $-n$ yang bersifat $n + -n = -n + n = 0$

Definisi 2 :

Sistem bilangan bulat terdiri atas himpunan bilangan bulat $B = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ dengan dua operasi biner yaitu penjumlahan (+) dan perkalian (\times), dan mempunyai sifat-sifat.[5]

a. Sifat Tertutup

Sifat tertutup terhadap operasi penjumlahan (+) dan perkalian (x) ada dengan tunggal a, b ∈ B maka a + b dan a x b berlaku sifat tertutup;

- Jumlah bilangan bulat sebarang adalah bilangan bulat

Contoh:

$$3 + -7 = -4$$

- Hasil kali bilangan bulat sebarang adalah bilangan bulat.

Contoh:

$$-5 \times -3 = 15$$

b. Sifat *Komutatif* (sifat pertukaran)

Sifat Komutatif terhadap operasi penjumlahan (+) dan perkalian (x) Untuk semua elemen a dan b dari bilangan bulat B berlaku;

- $a + b = b + a$

Tidak masalah bagaimana urutan penjumlahan, hasilnya tetap sama.

Contoh:

$$4 + -5 = -5 + 4$$

$$-1 = -1.$$

- $a \times b = b \times a$

Tidak masalah bagaimana urutan perkalian, hasilnya tetap sama.

Contoh:

$$2 \times -5 = -5 \times 2$$

$$-10 = -10$$

c. Sifat *Asosiatif* (sifat pengelompokan)

Sifat asosiatif terhadap operasi penjumlahan (+) dan perkalian (x) Untuk semua elemen a, b dan c $\in B$ berlaku;

- $(a + b) + c = a + (b + c)$

Saat menambahkan tiga bilangan bulat, tidak masalah kita menambah pasangan pertama atau pasangan terakhir, jawabannya tetap sama.

Contoh :

$$(4 + -2) + -5 = 4 + (-2 + -5)$$

$$2 + -5 = 4 + -7$$

$$-3 = -3$$

- $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

Saat mengalikan tiga bilangan bulat, tidak masalah kita mengalikan pasangan pertama atau pasangan terakhir, jawabannya tetap sama.

Contoh ;

$$(4 \times -2) \times -5 = 4 \times (-2 \times -5)$$

$$-8 \times -5 = 4 \times 10$$

$$40 = 40.$$

d. Sifat *Distributif* (sifat penyebaran)

Distributif kiri dan kanan operasi perkalian (\times) terhadap penjumlahan ($+$), Untuk semua elemen a, b dan $c \in B$ berlaku;

- Distributif kiri : $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$

Kita mengalikan tiap bilangan didalam kurung dengan bilangan di luarnya, tambah tetap di tengah.

Contoh ;

$$2 \times (3 + -4) = (2 \times 3) + (2 \times -4)$$

$$2 \times -1 = 6 + -8$$

$$-2 = -2$$

- Distributif kanan : $(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$ Kita mengalikan tiap bilangan didalam kurung dengan bilangan di luarnya, tambah tetap di tengah.

Contoh:

$$(2 + -3) \times 4 = (2 \times 4) + (-3 \times 4)$$

$$-1 \times 4 = 8 + -12$$

$$-4 = -4.$$

e. Ketunggalan invers penjumlahan

Untuk masing-masing $a \in B$ dan invers penjumlahan yang tunggal $-a$ sehingga: $a + (-a) = 0$. Jika $a = -x$ maka $-a = -(-x)$ dan $-x + -(-x) = 0$ karena $-x + x = 0$ dan invers penjumlahan adalah tunggal, maka $-(-x) = x$

Contoh:

$$2 + (-2) = 0$$

f. Elemen identitas

Ada elemen identitas penjumlahan (+) dan perkalian (x)

- Jika a bilangan bulat maka ada bilangan bulat 0 sehingga berlaku $a + 0 = 0 + a = a$. 0 disebut elemen identitas penjumlahan.

Nol adalah unsur identitas penjumlahan. Dengan menambahkan nol, kita tidak mengubah bilangannya.

Contoh:

$$-5 + 0 = 0 + -5 = -5$$

- Jika a bilangan bulat, maka ada bilangan bulat 1 sehingga berlaku $a \times 1 = 1 \times a = a$. disebut elemen identitas perkalian.

Satu adalah unsur identitas perkalian. Dengan mengalikan dengan 1, kita tidak mengubah bilangannya.

Contoh:

$$-3 \times 1 = 1 \times -3 = -3.$$

g. Perkalian dengan nol

Jika a adalah bilangan bulat maka $0 \times a = a \times 0 = 0$

Contoh

$$0 \times 2 = 2 \times 0 = 0$$

4) Penjumlahan bilangan bulat

Misalkan a dan b bilangan-bilangan cacah, bagaimanakah penjumlahan $(-a) + (-b)$?

Misalkan c adalah bilangan bulat yang menyatakan $(-a) + (-b)$, yaitu :

$$c = (-a) + (-b) \text{ maka}$$

$$c + b = ((-a) + (-b)) + b \quad \text{sifat penjumlahan pada kesamaan}$$

$$c + b = (-a) + ((-b) + b) \quad \text{sifat asosiatif penjumlahan}$$

$$c + b = (-a) + 0 \quad \text{invers penjumlahan}$$

$$(c + b) + a = (-a) + a \quad \text{sifat penjumlahan pada kesamaan}$$

$$(c + b) + a = 0 \quad \text{invers penjumlahan}$$

$$c + (b + a) = 0 \quad \text{sifat asosiatif penjumlahan}$$

$$c + (a + b) = 0 \quad \text{sifat komutatif penjumlahan}$$

$$(c + (a + b)) + (-(a + b)) = -(a + b) \quad \text{sifat penjumlahan pada kesamaan}$$

$$c + ((a + b) + (-(a + b))) = -(a + b) \quad \text{sifat asosiatif penjumlahan}$$

$$c + 0 = -(a + b) \quad \text{invers penjumlahan}$$

$$c = -(a + b)$$

karena $c = (-a) + (-b) = -(a + b)$, maka $(-a) + (-b) = -(a + b)$.

Jadi, jika a dan b bilangan-bilangan bulat positif,

$$\text{maka } (-a) + (-b) = -(a + b)$$

Contoh:

$$(-2) + (-3) = -(2 + 3) = -5$$

Misalkan a dan b bilangan-bilangan cacah dengan $a < b$, bagaimanakah $a + (-b)$?

Menurut definisi bilangan-bilangan cacah $a < b$ berarti ada bilangan asli c sedemikian hingga $a + c = b$, dan menurut definisi pengurangan bilangan-bilangan cacah $a + c = b$ sama artinya dengan $b - a = c$.

$$\text{Jadi } a + (-b) = a + (-(a + c))$$

$$= a + ((-a) + (-c)) \quad \begin{array}{l} \text{penjumlahan dua bilangan} \\ \text{bulat negatif} \end{array}$$

$$= (a + (-a)) + (-c) \quad \text{sifat asosiatif penjumlahan}$$

$$= 0 + (-c) \quad \text{invers penjumlahan}$$

$$= -c \text{ karena } c = b - a, \text{ maka } a + (-b) = -(b - a)$$

Jadi, jika a dan b bilangan-bilangan bulat positif dengan $a < b$, maka $a + (-b) = -(b - a)$

Contoh:

$$1. 2 + (-5) = -(5 - 2) = -3$$

$$2. 3 + (-6) = -(6 - 3) = -3$$

Sekarang, jika a dan b bilangan-bilangan bulat positif dengan $b < a$, bagaimanakah penjumlahan $a + (-b)$?

Menurut definisi bilangan-bilangan cacah $b < a$ berarti ada bilangan asli c sedemikian hingga $b + c = a$, dan menurut definisi

pengurangan bilangan-bilangan cacah $b + c = a$ sama artinya dengan $a - b = c$.

$$\begin{aligned} \text{Jadi } a + (-b) &= (b + c) + (-b) \\ &= (c + b) + (-b) \quad \text{sifat komutatif penjumlahan} \\ &= c + (b + (-b)) \quad \text{sifat asosiatif penjumlahan} \\ &= c + 0 \quad \text{invers penjumlahan} \\ &= c \end{aligned}$$

karena $c = a - b$, maka $a + (-b) = a - c$.

Jadi, jika a dan b bilangan-bilangan bulat positif dengan $b < a$, maka $a + (-b) = b - a$

Contoh:

1. $7 + -4 = 7 - 4 = 3$
2. $-7 + 9 = 9 + -7 = 9 - 7 = 2$

5) Pengurangan Bilangan Bulat

Definisi 3

Jika a , b dan k bilangan-bilangan bulat, maka $a - b = k$ bila dan hanya bila $a = b + k$. pengurangan bilangan-bilangan cacah tidak memiliki sifat tertutup, yaitu jika adan b bilangan-bilangan cacah, $(a - b)$ ada (bilangan cacah) hanya jika $a > b$. Apakah pengurangan bilangan-bilangan bulat memiliki sifat tertutup ?

Untuk menunjukkan bahwa pengurangan bilangan-bilangan bulat memilikisifat tertutup, maka harus ditunjukkan bahwa ubtuk setiap a dan b bilangan-bilangan bulat selalu ada tunggal bilangan

bulat $(a - b)$. pertama kita tunjukkan eksistensinya yaitu ada bilangan bulat k sedemikian hingga $a - b = k$.

Menurut definisi pengurangan

$$a - b = k \text{ bila dan hanya bila } a = b + k$$

$$\begin{aligned} a + (-b) &= (b + k) + (-b) && \text{sifat penjumlahan} \\ &= (k + b) + (-b) && \text{sifat komutatif penjumlahan} \\ &= k + (b) + (-b) && \text{sifat asosiatif penjumlahan} \\ &= k + 0 && \text{invers penjumlahan} \end{aligned}$$

$$a + (-b) = k$$

$k = a + (-b)$ ini menunjukkan bahwa ada bilangan bulat k sedemikian hingga $a - b = k$.

Selanjutnya akan diperlihatkan bahwa bilangan bulat k (yang sama dengan $a + (-b)$) itu tunggal. Andaikan ada bilangan bulat n dengan $n \neq k$ hingga $a = b + n$. karena $a = b + k$ maka $b + n = b + k$. jika kedua ruas kesamaan terakhir masing-masing ditambah $(-b)$ dan dengan sifat asosiatif penjumlahan dan invers penjumlahan maka diperoleh bahwa $n = k$ yang bertentangan dengan pengandaian. Jadi bilangan bulat k tertentu dengan tunggal sehingga $a = b + k$. [4]

Dengan demikian terbukti bahwa pengurangan bilangan-bilangan bulat memiliki sifat tertutup. Jadi $a - b = k = a + (-b)$.

Contoh

1. Buktikanlah bahwa $a - (-b) = a + b$
2. Buktikanlah bahwa $a - (b - c) = (a + c) - b$
3. Buktikanlah bahwa $(a - b) - (-c) = (a + c) - b$

4. Buktikanlah bahwa $a - b = (a - c) - (b - c)$.

Penyelesaian:

1. Harus dibuktikan bahwa $a - (-b) = a + b$

$a - (-b) = a + b$ dipandang sebagai kalimat pengurangan dengan a sebagai berkurang, $(-b)$ sebagai pengurangan dan $(a + b)$ sebagai hasil pengurangan. Sehingga kalimat yang harus dibuktikan sama artinya dengan $(a + b) + (-b) = a$. Ini yang kita akan buktikan.

$$\begin{aligned} \text{Ki} &= (a + b) + (-b) \\ &= a + (b + (-b)) && \text{sifat asosiatif penjumlahan} \\ &= a + 0 && \text{invers penjumlahan} \\ &= a \\ &= \text{Ka} && \text{ruas kiri} = \text{ruas kanan} \end{aligned}$$

Terbukti pula bahwa $a - (-b) = a + b$.

2. Harus dibuktikan bahwa $a - (b - c) = (a + c) - b$

Kalimat yang harus dibuktikan itu dipandang sebagai pengurangan dengan a sebagai berkurang, $(b - c)$ sebagai pengurang dan $\{(a + c) - b\}$ sebagai hasil pengurangan. Sehingga kalimat yang harus dibuktikan itu sama artinya dengan :

$$\begin{aligned} &\{(a + c) - b\} + (b - c) = a \\ \text{Ki} &= \{(a + c) - b\} + (b - c) \\ &= \{(a + c) + (-b)\} + (b + (-c)) \\ &\hspace{10em} \text{definisi pengurangan bilangan bulat} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a + c + (-c) + b + (-b) && \text{sifat asosiatif umum penjumlahan} \\
&= a + c + (-b) + b + (-c) && \text{sifat komutatif umum penjumlahan} \\
&= (a + (c + (-c))) + (b + (-b)) && \text{sifat asosiatif umum penjumlahan} \\
&= a + 0 + 0 && \text{invers penjumlahan} \\
&= a \\
&= \mathbf{Ka} && \text{Ruas Kiri} = \text{Ruas kanan}
\end{aligned}$$

Terbukti pula bahwa $a - (b - c) = (a + c) - b$

3. Harus dibuktikan bahwa $(a - b) - (-c) = (a + b) - b$

Bukti :

$$\begin{aligned}
(a - b) - (-c) &= (a + (-b)) + (-(-c)) && \text{definisi pengurangan bilangan} \\
&&& \text{bulat} \\
&= (a + (-b)) + c \\
&= a + ((-b) + c) && \text{sifat asosiatif penjumlahan} \\
&= a + (c + (-b)) && \text{sifat komutatif penjumlahan} \\
&= (a + c) + (-b) && \text{sifat asosiatif penjumlahan} \\
&= (a + c) - b \\
&&& \text{definisi pengurangan bilangan bulat}
\end{aligned}$$

Terbukti bahwa $(a - b) - (-c) = (a + b) - b$

4. Harus dibuktikan bahwa $a - b = (a - c) - (b - c)$

Bukti:

Cara 1:

$$\begin{aligned} a - b &= a + (-b) \\ &= (a + (-b)) + 0 \\ &= (a + (-b)) + (c + (-c)) \\ &= a + (-b) + c + (-c) \\ &= (a + (-c)) + ((-b) + c) \\ &= (a - c) - ((-b) + c) \\ &= (a - c) - (b + (-c)) \\ &= (a - c) - (b - c) \end{aligned}$$

Cara 2:

$$\begin{aligned} (a - c) - (b - c) &= (a + (-c)) + (-(b + (-c))) \\ &= (a + (-c)) + ((-b) + (-(-c))) \\ &= (a + (-c)) + ((-b) + c) \\ &= a + (-c) + (-b) + c \\ &= (a + (-b)) + ((-c) + c) \\ &= (a + (-b)) + 0 \\ &= a + (-b) \\ &= a - b [4] \end{aligned}$$

6) Pembagian pada Bilangan Bulat [2]

1. Misalkan a dan b adalah dua buah bilangan bulat dengan syarat $a \neq 0$. Kita menyatakan bahwa a habis membagi b (a

divides b) jika terdapat bilangan bulat c sedemikian sehingga $b = ac$.

2. Notasi: $a \mid b$ jika $b = ac$, $c \in \mathbb{Z}$ dan $a \neq 0$. (\mathbb{Z} = himpunan bilangan bulat)

3. Kadang-kadang pernyataan “ a habis membagi b ” ditulis juga “ b kelipatan a ”.

Contoh :

$4 \mid 12$ karena $12 \div 4 = 3$ (bilangan bulat) atau $12 = 4 \times 3$. Tetapi

$$4 \nmid 13$$

karena $13 \div 4 = 3.25$ (bukan bilangan bulat).

Teorema 1 (Teorema Euclidean).

Misalkan m dan n adalah dua

buah bilangan bulat dengan syarat $n > 0$. Jika m dibagi dengan n maka terdapat dua buah bilangan bulat unik q (*quotient*) dan r (*remainder*), sedemikian sehingga $m = nq + r$ (1)

dengan $0 \leq r < n$. [2]

Contoh :

(i) 1987 dibagi dengan 97 memberikan hasil bagi 20

$$\text{dan sisa } 47 : 1987 = 97 \times 20 + 47$$

(ii) -22 dibagi dengan 3 memberikan hasil bagi -8 dan

$$\text{sisa } 2 : -22 = 3(-8) + 2 \text{ tetapi } -22 = 3(-7) - 1 \text{ salah}$$

karena $r = -1$ tidak memenuhi syarat $0 \leq r < n$

7) Basis Bilangan Bulat

Di bagian ini, menjelaskan bagaimana bilangan bulat positif dapat ditulis dalam bentuk bagian bilangan bulat positif yang lain. Dengan menggunakan lambang bilangan untuk mewakili bilangan bulat, Dalam hal ini akan membuktikan cara mengubah bilangan bulat dari lambang bilangan menjadi lambang bilangan bulat positif lainnya dan begitu juga sebaliknya. Penggunaan lambang 1 dalam kehidupan sehari-hari lebih baik karena memiliki sepuluh jari yang mana menyelesaikan semua operasi matematika.[6]

Lambang : Sebuah bilangan bulat a yang ditulis dalam basis b dilambangkan dengan $(a)_b$.

Teorema 2.

Misalkan b adalah bilangan bulat positif dengan $b > 1$. Ada sembarang bilangan bulat positif m . Dapat ditulis tunggal dalam bentuk

$$m = a_{1b}^1 + a_{1-b}^{1-1} + \dots + a_{1b} + a_0$$

ada 1 satu bilangan bulat positif, $0 \leq a_j < b$ untuk $j = 0, 1, \dots, l$ dan $a_l \neq 0$.

Bukti.

Pertama dengan membagi m dengan b dan kita dapatkan

$$m = bq_0 + a_0, \quad 0 \leq a_0 < b.$$

Jika $q_0 \neq 0$, membagi q_0 dengan b mendapatkan bahwa

$$q_0 = bq_1 + a_1, \quad 0 \leq a_1 < b.$$

kita lanjutkan proses itu untuk memperoleh:

$$q_{1,1} = bq_2 + a_2, \quad 0 \leq a_2 < b,$$

.

.

$$q_{l-2} = bq_{l-1} + a_{l-1}, \quad 0 \leq a_{l-1} < b,$$

$$q_{l-1} = b \cdot 0 + a_l, \quad 0 \leq a_l < b.$$

Karena barisan q_0, q_1, \dots adalah adalah suatu barisan turunan dari bilangan –bilangan bulat tak negatif, maka barisan q_l berakhir pada suku 0. Dari persamaan pertama q_0 disubstitusikan dalam persamaan kedua diperoleh

Substitusikan persamaan $q_0 = bq_1 + a_1$ pada $m = bq_0 + a_0$, didapatkan $m = b(bq_1 + a_1) + a_0 = b^2q_1 + a_1b + a_0$,

Proses substitusi diteruskan ke dalam persamaan m , diperoleh

$$m = b^3q_2 + a_2b^2 + a_1b + a_0,$$

:

:

$$= b^l q_{l-1} + a_{l-1} b^{l-1} + \dots + a_1 b + a_0,$$

$$= a_l b^l + a_{l-1} b^{l-1} + \dots + a_1 b + a_0.$$

sehingga harus dibuktikan adalah secara terinci. Misalkan

$$m = a_l b^l + a_{l-1} b^{l-1} + \dots + a_1 b + a_0 = c_l b^l + c_{l-1} b^{l-1} + \dots + c_1 b + c_0$$

dimana jika jumlah kedua suku berbeda, maka tambahkan koefisien nol sehingga memenuhi syarat. Dengan mengurangkan kedua bagian, didapatkan

$$(a_1 - c_1) b^1 + (a_{1-1} - c_{1-1}) b^{1-1} + \dots + (a_1 - c_1) b + (a_0 - c_0) = 0.$$

Jika kedua suku berbeda, maka ada $0 \leq j \leq 1$ sehingga $c_j \neq a_j$.

Hasilnya, didapatkan

$$b^j ((a_1 - c_1) b^{1-j} + \dots + (a_{j+1} - c_{j+1}) b + (a_j - c_j)) = 0$$

dan karena $b \neq 0$, didapat

$$(a_1 - c_1) b^{1-j} + \dots + (a_{j+1} - c_{j+1}) b + (a_j - c_j) = 0.$$

Maka diperoleh

$$a_j - c_j = (a_1 - c_1) b^{1-j} + \dots + (a_{j+1} - c_{j+1}) b,$$

dan didapat, $b \mid (a_j - c_j)$. Karena $0 \leq a_j < b$ dan $0 \leq c_j < b$, sehingga $a_j = c_j$. Ini adalah kontradiksi dan karena itu ruas sama.

Ditunjukkan penyelesaian bilangan bulat basis 2 disebut defenisi biner. Kedua-defenisi sangat peran penting dalam komputer. Operasi aritmatika dapat dilakukan pada bilangan bulat dengan basis bilangan bulat positif tetapi tidak akan dibahas di buku ini. Pembahasan ini contoh bagaimana mengubah dari dua basis bilangan bulat ditunjukkan ke basis lainnya dan begitu pula sebaliknya.

Contoh:

Buktikan bahwa 214 merupakan basis 3:

$$214 = 3 \cdot 71 + 1$$

$$71 = 3 \cdot 23 + 2$$

$$23 = 3 \cdot 7 + 2$$

$$7 = 3 \cdot 2 + 1$$

$$2 = 3 \cdot 0 + 2$$

Sehingga, diperoleh penyelesaian basis 3 dari 214, perhatikan kedua ruas dan diperoleh bahwa $(214)_{10} = (21221)_3$.[6]

C. LATIHAN SOAL

1. Ubah 150 ke basis 8
2. Ubah basis 57 ke basis 2
3. Ubah 116 ke basis 2
4. Ubah notasi $(7482)_{10}$ menjadi basis 6.[6]
5. Ubah notasi $(98156)_{10}$ menjadi basis 8.[6]

DAFTAR PUSTAKA

- [1] <https://tatagyes.wordpress.com/2017/09/05/sejarah-bilangan-bulat>.
- [2] Munir, Rinaldi. 2004. Bahan Kuliah ke-3 Teori Bilangan (Number Theory). Departement Teknik Informatika Institut teknologi Bandung.
- [3] https://id.wikipedia.org/wiki/Bilangan_bulat
- [4] Sukarman, Herry.2001. Teori Bilangan.Yogyakarta: Universitas Terbuka
- [5] <https://www.slideshare.net/fandyfama/sistem-bilangan-bulat-ma-kul-teori-bilangan>
- [6] Raji, Wissam. 2016. An Introductory Course in Elementary Number Theory.Published August 18th 2016 by Lulu.com

BAB III

PEMBAGI BERSAMA TERBESAR (PBB)

(Oleh : Latifa Nurliyan Hidayati)

A. PENDAHULUAN

Matematika diskrit adalah cabang ilmu matematika sebagai dasar dari informatika yang mempelajari obyek-obyek diskrit untuk dasar teori dari ilmu informatika. Matematika diskrit sangat diperlukan sebagai landasan untuk menguasai ilmu informatika/komputer, seperti Algoritma, Graf, Himpunan, Kriptografi, Sistem digital, dan lain-lain. Dalam matematika diskrit terdapat teori-teori yang diterapkan pada kehidupan sehari-hari sehingga dapat menginterpretasikan masalah yang terjadi dalam kehidupan nyata. Salah satu teorinya adalah teori bilangan, yaitu teori dasar pada setiap operasi perhitungan. Teori bilangan dikatakan sebagai ilmu dasar dari setiap teori yang ada, karena setiap teori memiliki minimal satu jenis bilangan.^[1] Teori bilangan adalah cabang dari matematika murni yang mempelajari sifat-sifat bilangan bulat dan mengandung berbagai masalah terbuka yang dapat dimengerti sekalipun bukan oleh ahli matematika.

Bahasan teori bilangan salah satunya adalah PBB banyak digunakan dalam membahas berbagai teori bilangan yang ada dan juga untuk kehidupan sehari-hari. Maka dari itu, mencari nilai PBB dari beberapa bilangan sangat penting untuk diketahui dan

dipelajari.^[3] Dalam menentukan PBB (Pembagi Bersama Terbesar) berbagai metode seperti Euclid, pohon faktor, dalam memecahkan masalah, dll yang akan dibahas dalam pembahasan. Pembagi Bersama Terbesar (PBB) adalah suatu bilangan terbesar yang merupakan pembagi (faktor) dua atau lebih bilangan. Masalah yang ada adalah masalah sehari-hari seperti masalah membagi kue, menentukan barang yang isinya sama banyak, dll.^[1]

B. PEMBAHASAN

1. PEMBAGI BERSAMA TERBESAR (PBB)

Dua bilangan bulat a dan b , keduanya tidak sama dengan 0, dapat memiliki banyak pembagi tak terhingga, dan dengan demikian hanya dapat memiliki banyak pembagi persekutuan tak terhingga. Pada bagian ini, kita tertarik pada pembagi persekutuan terbesar dari a dan b . Perhatikan bahwa pembagi dari a dan $|a|$ adalah sama.^[5]

Misalkan a dan b adalah dua bilangan tidak nol. Pembagi bersama terbesar (PBB – greatest common divisor atau gcd) dari a dan b adalah bilangan bulat terbesar d sedemikian sehingga $d | a$ dan $d | b$. Dalam hal ini dinyatakan bahwa $\text{PBB}(a,b) = d$.^[4]

Definisi 1. *Pembagi persekutuan terbesar dari dua bilangan bulat a dan b adalah bilangan terbesar yang membagi a dan b .*^[5]

Definisi 2. Misalkan a_1, a_2, \dots, a_n adalah bilangan bulat, tidak sama dengan 0. Pembagi persekutuan terbesar dari bilangan bulat ini adalah bilangan bulat yang membagi semua himpunan bilangan bulat. Pembagi persekutuan terbesar dari a_1, a_2, \dots, a_n dilambangkan dengan (a_1, a_2, \dots, a_n) . [5]

Jika g Pembagi Bersama Terbesar dari b dan c , maka $g|b$ \wedge $g|c$ serta jika ada $h|b \wedge h|c$, maka $h \leq g$. [3]

Simbolik: $(b,c) = g \leftrightarrow ((g|b \wedge g|c) \wedge (\exists h \in \mathbb{Z}) (h|b \wedge h|c) \rightarrow h \leq g)$. [3]

Perhatikan bahwa setiap bilangan bulat memiliki pembagi positif dan negatif. Jika a pembagi positif dari m , maka $-a$ juga merupakan pembagi dari m . Oleh karena itu, dengan definisi kita tentang pembagi persekutuan terbesar, diperoleh bahwa $(a, b) = (|a|, |b|)$. Teorema berikutnya menunjukkan bahwa pembagi persekutuan terbesar dari dua bilangan bulat tidak berubah jika menambahkan kelipatan salah satu dari dua bilangan bulat ke yang lain. [5]

Teorema 1. Misalkan a, b dan c adalah bilangan bulat. Kemudian $(a, b) = (a + cb, b)$. [5]

Bukti.

Setiap pembagi a dan b juga merupakan pembagi $a + cb$ dan b dan sebaliknya. Karena memiliki pembagi yang persis sama. Jadi disimpulkan faktor persekutuan terbesar dari a dan b juga akan

menjadi faktor persekutuan terbesar dari $a + cb$ dan b . Misalkan k adalah faktor persekutuan dari a dan b . Maka, $k \mid (a + cb)$ dan k adalah faktor dari $a + cb$. Diasumsikan bahwa l adalah faktor persekutuan dari $a + cb$ dan b . Sehingga,

$$l \mid ((a + cb) - cb) = a.$$

maka, l adalah pembagi persekutuan dari a dan b sehingga hasilnya sama.

Berdasarkan teorema yang membuktikan bahwa pembagi persekutuan terbesar dari dua bilangan bulat dapat ditulis sebagai gabungan linier dari dua bilangan bulat.

Teorema 2. *Pembagi persekutuan terbesar dari dua bilangan bulat a dan b , keduanya adalah tidak sama dengan 0 sehingga bilangan bulat positif terkecil $ma + nb = d$ untuk semua bilangan bulat m dan n . [5]*

Bukti.

Asumsikan bahwa a dan b adalah bilangan bulat positif. Untuk setiap himpunan kosong b pembagi dari semua anggota bilangan bulat positif dari a dan b . Maka bukan dari himpunan kosong karena $a = 1 \cdot a + 0 \cdot b$ dan $b = 0 \cdot a + 1 \cdot b$ himpunan ini terdapat dikeduanya. Jadi himpunan bagian memiliki paling sedikit unsur d karena prinsip keteraturan. Jadi $d = ma + nb$ untuk bagian bilangan bulat m dan n . Oleh karena itu bukti bahwa d faktor dari a dan b merupakan faktor terbesar dari a dan b .

Berdasarkan algoritma pembagian, maka

$$a = dq + r, 0 \leq r < d.$$

Jadi

$$r = a - dq = a - q(ma + nb) = (1 - qm)a - qnb.$$

Sehingga membuktikan bahwa r adalah bagian dari a dan b . Karena $0 \leq r < d$ dan d adalah bilangan bulat positif terkecil yang merupakan himpunan bagian dari a dan b , maka $r = 0$ dan $a = dq$. Oleh karena itu $d \mid a$ sedemikian sehingga $d \mid b$. Sekarang perhatikan bahwa jika ada pembagi c yang membagi a dan b . Kemudian c membagi d dari a dan b berdasarkan Teorema 4. Oleh karena $c \mid d$. Ini membuktikan bahwa setiap bagian persekutuan dari a dan b membagi d . Oleh karena itu $c \leq d$, dan d adalah pembagi terbesar.

Hasilnya, kita menyimpulkan bahwa jika $(a, b) = 1$ maka terdapat bilangan bulat m dan n sedemikian rupa sehingga $ma + nb = 1$.

2. ALGORITMA EUCLIDEAN

Pada bagian ini kami menjelaskan metode sistematis yang menentukan pembagi persekutuan terbesar dari dua bilangan bulat. Metode ini disebut algoritma Euclidean.

Lemma 1. *Jika a dan b adalah dua bilangan bulat dan $a = bq + r$ di mana juga q dan r adalah bilangan bulat, maka $(a, b) = (r, b)$. [5]*

Lemma di atas akan mengarah ke versi yang lebih umum. Kami sekarang menyajikan algoritma Euclidean dalam bentuk

umumnya. Ini menyatakan bahwa pembagi persekutuan terbesar dari dua bilangan bulat adalah sisa terakhir bukan nol dari pembagian yang berurutan.

Teorema 3. Misalkan $a = r_0$ dan $b = r_1$ adalah dua bilangan bulat positif di mana $a \geq b$. Jika kita menerapkan algoritma pembagian secara berurutan untuk mendapatkannya. $r_j = r_{(j+1)} + q_{(j+1)} r_{(j+2)}$ sehingga $0 \leq r_{(j+2)} < r_{(j+1)}$ untuk semua $j = 0, 1, \dots, n-2$ dan $r_{(j+1)} = 0$. Kemudian $(a, b) = r_n$. [5]

Bukti.

Dengan menggunakan algoritma pembagian kita melihat bahwa

$$\begin{aligned} r_0 &= r_1 q_1 + r_2 & 0 \leq r_2 < r_1, \\ r_1 &= r_2 q_2 + r_3 & 0 \leq r_3 < r_2, \\ &: \\ &: \\ r_{n-2} &= r_{n-1} q_{n-1} + r_n & 0 \leq r_n < r_{n-1}, \\ r_{n-1} &= r_n q_n. \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa, kita akan memiliki sisa 0 pada akhirnya karena semua sisa adalah bilangan bulat dan setiap sisa di langkah berikutnya kurang dari sisa di langkah sebelumnya.

Menurut Lemma , kita melihat bahwa

$$(a, b) = (b, r_2) = (r_2, r_3) = \dots = (r_n, 0) = r_n.$$

Contoh 1.

Kita akan mencari pembagi persekutuan terbesar dari 4147 dan 10672 . [5]

$$\begin{aligned}\text{Perhatikan bahwa } 10672 &= 4147 \cdot 2 + 2378 \\ 4147 &= 2378 \cdot 1 + 1769 \\ 2378 &= 1769 \cdot 1 + 609 \\ 1769 &= 609 \cdot 2 + 551 \\ 609 &= 551 \cdot 1 + 58 \\ 551 &= 58 \cdot 9 + 29 \\ 58 &= 29 \cdot 2\end{aligned}$$

Oleh karena itu $(4147, 10672) = 29$

Kami sekarang menggunakan langkah-langkah dalam algoritma Euclidean untuk menulis pembagi persekutuan terbesar dari dua bilangan bulat sebagai kombinasi linier dari dua bilangan bulat. Algoritma berikut dapat dijelaskan dengan bentuk umum tetapi demi kesederhanaan ekspresi, kami akan menyajikan contoh yang menunjukkan langkah-langkah untuk mendapatkan pembagi persekutuan terbesar dari dua bilangan bulat sebagai kombinasi linier dari dua bilangan bulat.

Contoh 2.

Tunjukkan 29 sebagai kombinasi linier dari 4147 dan 10672. [5]

$$\begin{aligned}29 &= 551 - 9 \cdot 58 \\ &= 551 - 9 (609 - 551 \cdot 1) \\ &= 10 \cdot 551 - 9 \cdot 609 ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
29 &= 10 \cdot (1769 - 609 \cdot 2) - 9 \cdot 609 \\
&= 10 \cdot 1769 - 29 \cdot 609, \\
&= 10 \cdot 1769 - 29 (2378 - 1769 \cdot 1) \\
&= 39 \cdot 1769 - 29 \cdot 2378 \\
&= 39 (4147 - 2378 \cdot 1) - 29 \cdot 2378, \\
&= 39 \cdot 4147 - 68 \cdot 2378 \\
&= 39 \cdot 4147 - 68 (10672 - 4147 \cdot 2) \\
&= 175 \cdot 4147 - 68 \cdot 10672
\end{aligned}$$

Hasilnya, kita melihat bahwa $29 = 175 \cdot 4147 - 68 \cdot 10672$.

3. METODE DALAM MENENTUKAN PEMBAGI BERSAMA TERBESAR

Dalam menentukan PBB, kita bisa memakai beberapa cara diantaranya yang akan dibahas disini yaitu dengan membagi bilangan dengan bilangan prima, mendaftar semua faktor bilangan, dengan pohon faktor, dan dengan algoritma Euclidean.

1. PBB Pada Bilangan Bulat

1) Membagi bilangan dengan bilangan prima[6]

Langkah-langkahnya:

- Bagi dengan bilangan prima hingga sekecil mungkin.
- Syaratnya semua bilangan **harus habis dibagi**.
- Pembagian berhenti ketika salah satu dari 3 bilangan tidak habis dibagi

Contoh 3:

Hitung PBB dari

48, 72, dan 96

Caranya

48 72 96 : 2

24 36 48 : 2

12 18 24 : 2

6 9 12 : 3

2 3 4

PBBnya adalah mengalikan pembagi bilangan prima .

Jadi FPBnya $2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24$

2) Mendaftar semua faktor Bilangan[3]**Contoh 4:**

Tentukan PBB dari 60 dan 72

Penyelesaian :

Faktor dari 60 : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60

Faktor dari 72 : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72

Faktor pembagi PBB(60, 72) = 1, 2, 3, 4, 6, 12..

PBB(60, 72) = 12.

Contoh 5:

Tentukan PBB dari 126, 240, dan 180.

Penyelesaian :

Faktor dari 126 : 1, 2, 3, 6, 7, 9, 14, 18, 21, 42, 63, 126

Faktor dari 240 : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 20, 24, 30, 40, 48, 60, 80, 120, 240

Faktor dari 180 : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 30, 36, 45, 60, 90, 180

Faktor pembagi (126, 240, 180) = 1, 2, 3, 6

Maka PBB(126,240,180) adalah 6

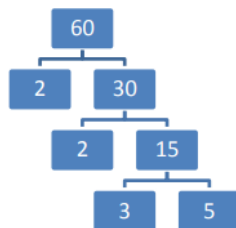
3) Pohon Faktor[3]

Contoh 6:

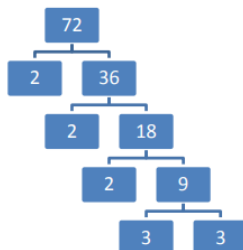
Tentukan PBB dari 60 dan 72

Penyelesaian :

Pohon faktor 60:



Pohon faktor 72:



Dari pohon faktor tersebut didapat hasil sebagai berikut

$$60 = 2^2 \times 3 \times 5$$

$$72 = 2^3 \times 3^2$$

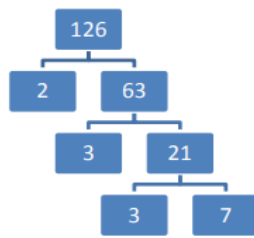
$$\text{PBB}(60, 72) = 2^2 \times 3 = 12.$$

Contoh 7:

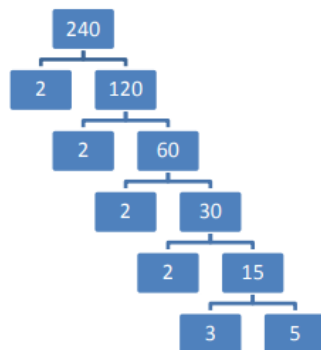
Tentukan PBB dari 126, 240, dan 180.

Penyelesaian :

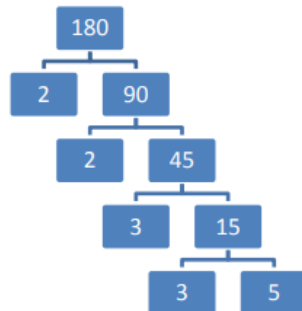
Pohon faktor 126:



Pohon faktor 240



Pohon faktor 180



Dari pohon faktor tersebut didapat hasil sebagai berikut

$$126 = 2 \times 3^2 \times 7$$

$$240 = 2^4 \times 3 \times 5$$

$$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$$

$$\text{PBB}(60, 72) = 2 \times 3 = 6.$$

4) Algoritma Euclidean[4]

Langkah-langkah:

1. Jika $n = 0$ maka
m adalah $\text{PBB}(m, n)$;
stop.
tapi jika $n \neq 0$, lanjutkan ke langkah 2.
2. Bagilah m dengan n dan misalkan r adalah sisanya.
3. Ganti nilai m dengan nilai n dan nilai n dengan nilai r,
lalu ulang kembali ke langkah 1.

Contoh 8:

Tentukan PBB dari $m = 80$ dan $n = 12$ dan memenuhi $m \geq n$

Penyelesaian :

$$80 = 6 \cdot 12 + 8$$

$$12 = 1 \cdot 8 + 4$$

$$8 = 2 \cdot 4 + 0$$

Sisa pembagian terakhir sebelum 0 adalah 4, maka

$$\text{PBB}(80, 12) = 4$$

5) Metode Diopantin[2]**Contoh 9:**

Tentukan PBB dari 72 dan 54

Penyelesaian:

$$(72, 54) = (72 - 54, 54)$$

$$= (18, 54 - 18)$$

$$= (18, 36)$$

$$= (18, 36 - 18)$$

$$= (18, 18)$$

$$= 18$$

Contoh 10:

Carilah nilai $(207, 306)$

Penyelesaian :

$$\begin{aligned}(207,306) &= (207,306-207) \\ &= (207,99) \\ &= (207-99,99) \\ &= (108-99,99) \\ &= (9,99-9.10) \\ &= (9,9) \\ &= 9\end{aligned}$$

Contoh 11:

Carilah nilai PBB dari 2497 dan 3997

Penyelesaian :

$$\begin{aligned}(2497,3997) &= (3997-2497,2497) \\ &= (1500,2497-1500) \\ &= (1500-997,997) \\ &= (503,997-503) \\ &= (503-494,494) \\ &= (9,494-9.54) \\ &= (9,8)\end{aligned}$$

2. PBB Pada Bilangan Pecahan[6]

Contoh 12:

Berapa FPB dari 16,5; 0,45; dan 15?

Penyelesaian :

Untuk menghitung FPB pecahan desimal kita jadikan bilangan

bulat lebih dulu dengan mengalikannya dengan suatu bilangan.
Kemudian hasilnya dibagi blangan itu.

- Kita kalikan 100, sehingga kita cari FPB dari 1.650, 45, dan 1.500
- FPB dari 1.650, 45, dan 1.500 dapat dicari hasilnya 15
- FPB yang dicari adalah $\frac{15}{100} = 0,15$

Contoh 13:

Berapa FPB dari $\frac{54}{9}$, $3\frac{9}{17}$, dan $\frac{36}{51}$?

Penyelesaian :

Untuk menghitung FPB pecahan, kita jadikan pecahan itu semua menjadi bilangan bulat dengan mengalikannya dengan suatu bilangan. Kemudian hasilnya dibagi bilangan itu

- Kita sederhanakan lebih dulu pecahan itu dari $\frac{54}{9} = 6$, $3\frac{9}{17} = \frac{60}{17}$, dan $\frac{36}{51} = \frac{12}{17}$
- Kalikan 17 sehingga pecahan di atas menjadi bilangan bulat yaitu $6 \times 17 = 102$, $\frac{60}{17} \times 17 = 60$, dan $\frac{12}{17} \times 17 = 12$
- Jadi kita cari FPB dari 102, 60, dan 12. Hasilnya adalah 6
- Jadi FPB yang dicari adalah 6 dibagi 17 yaitu $\frac{6}{17}$

Contoh 14:

Hitung ukuran pita pengukur terbesar yang dapat mengukur pita yang panjangnya 6 m dan $7\frac{1}{2}$ m.

Penyelesaian :

Untuk menghitung FPB pecahan, kita jadikan pecahan itu semua menjadi bilangan bulat dengan mengalikannya dengan suatu bilangan. Kemudian hasilnya dibagi bilangan itu

- Kita sederhanakan lebih dulu pecahan itu dari 6 m dan $7\frac{1}{2} = \frac{15}{2}$ m
- Kalikan 2 sehingga pecahan di atas menjadi bilangan bulat yaitu $6 \times 2 = 12$, dan $\frac{15}{2} \times 2 = 15$
- Jadi kita cari FPB dari 12, 60, dan 12. Hasilnya adalah 6
- Jadi FPB yang dicari adalah 6 dibagi 2 yaitu $\frac{6}{2}$
- Jadi kita cari FPB dari 12 dan 15 yaitu 3
- Jadi FPB sebenarnya adalah 3 dibagi 2 yaitu $\frac{3}{2}$
- Ukuran pita terbesar $\frac{3}{2}$ m

**4. PENERAPAN PEMBAGI BERSAMA TERBESAR (PBB)
DALAM KEHIDUPAN SEHARI-HARI[1]****Permasalahan 1:**

Seorang penjual buku ingin merapikan tempat (rak buku) berdagangnya agar terlihat bagus oleh pembeli. Penjual itu

memiliki 180 novel dan 64 majalah. Masing-masing rak buku berisi sama banyak. Ada berapa buku novel dan majalah tersebut? Dari permasalahan diatas kita dapat mencari pembagi bersama terbesar yang sudah diketahui dengan cara algoritma euclid.

PBB $|120|, |64|$

$120 \div 64 = 1$ dengan sisa 56

$64 \div 56 = 1$ dengan sisa 8

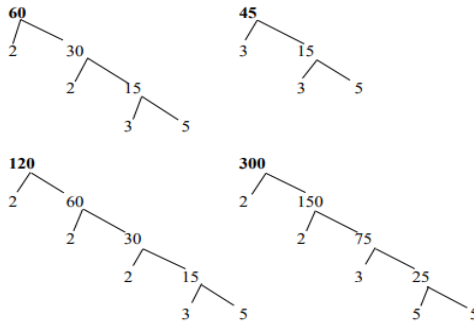
$56 \div 8 = 7$ dengan sisa 0

Kita berhenti disini karena sudah mendapat sisa 0. Bilangan terakhir yang digunakan untuk membagi adalah 8, jadi PBB dari 120 dan 64 adalah 8. Jadi ada 8 buku pada rak tersebut yang isinya sama banyak.

Permasalahan 2:

Misalkan seseorang donatur akan menyumbangkan barang – barang ke panti asuhan. Donatur tersebut memiliki barang untk disumbangkan yaitu 60 baju, 45 celana, 120 air mineral, dan 300 mie instan. Donatur itu lalu menyiapkan kantong plastik untuk membaginya pada setiap orang. Setiap kantong plastik isinya sama banyak. Ada berapa bungkus kantong plastik untuk baju, celana, air mineral, dan mie instan tersebut? Pada masalah diatas kita selesaikan dengan pohon faktor.

Penyelesaian :



Dari pohon faktor diatas dapat hasil sebagai berikut.

$$60 = 2^2 \times 3$$

$$45 = 3^2 \times 5$$

$$120 = 2^3 \times 3 \times 5$$

$$300 = 2^2 \times 3 \times 5$$

$$\text{Maka PBB}(60,45,120,300) = 3 \times 5 = 15$$

Jadi ada 15 bungkus kantong plastik untuk baju, celana, air mineral, dan mie instan yang isinya sama banyak.

Permasalahan 3:

Misalkan seseorang sedang liburan ke luar kota lalu ia hendak membelikan saudaranya oleh – oleh. Ia membeli barang tersebut di pusat oleh – oleh diantaranya yaitu 96 gantungan kunci, 144 gelang tangan, 180 kalung. Lalu ia akan membaginya dengan sama banyak. Ada berapa gantungan kunci, gelang tangan, dan kalung tersebut?

Pada masalah diatas kita akan menyelesaikan dengan faktor.

$$96 = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 96$$

$$144 = 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 16, 18, 24, 36, 48, 72, 144$$

150 = 1, 2, 3, 5, 10, 15, 25, 50, 75, 150

Maka $PBB(96,144,150) = 3$

Jadi, setelah menghitung bilangan – bilangan tersebut dengan tabel faktor kita dapat mengetahui Pembagi Bersama Terbesar.

Maka , ada 3 bungkus oleh – oleh yang isinya sama banyak.

C. LATIHAN SOAL

1. Gunakan cara membagi dengan bilangan prima untuk menentukan pembagi persekutuan terbesar dari 15 dan 35.
2. Gunakan cara mendaftarkan faktor-faktor dari setiap bilangan untuk menentukan pembagi persekutuan terbesar dari 100 dan 104.
3. Gunakan cara pohon faktor pembagi persekutuan terbesar dari -30 dan 95.
4. Gunakan algoritma Euclidean untuk mencari pembagi persekutuan terbesar dari 412 dan 32 dan nyatakan dalam dua bilangan bulat.
5. Gunakan metode diopantine untuk mencari pembagi persekutuan terbesar dari 780 dan 150 dan nyatakan dalam dua bilangan bulat.
6. Temukan pembagi persekutuan terbesar dari 70 , 98 , 108
7. Misalkan m bilangan bulat positif. Tentukan pembagi persekutuan terbesar dari m dan $m + 1$.
8. Misalkan m adalah bilangan bulat positif, carilah pembagi persekutuan terbesar dari m dan $m + 2$.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Aidul, Abimanyu Kurnia dan Arizal Muhammad Fadhil. 2019. *Penerapan Pembagi Bersama Terbesar (Pbb) Dalam Kehidupan Sehari – Hari*.
[https://www.academia.edu/41298850/PENERAPAN PEMBA
GI BERSAMA TERBESAR PBB DALAM KEHIDUPAN SEHARI
HARI](https://www.academia.edu/41298850/PENERAPAN_PEMBA_GI_BERSAMA_TERBESAR_PBB_DALAM_KEHIDUPAN_SEHARI_HARI).
- [2] Dr.Nanang.2010.*Teori Bilangan*.STKIP Garut.
- [3] M, Henry Marcelinus. 2011. *Menentukan Pembagi Bersama Terbesar dengan Algoritma*. Institut Tekonlogi Bandung:
13512082@std.stei.itb.ac.id.
- [4] Munir, Rinaldi. 2004. *Teori Bilangan (Number Theory)*. Departemen Teknik Informatika Institut Teknologi Bandung.
- [5] Raji, Wissam. 2013. *An Introductory Course in Elementary Number Theory*. American University of Beirut: Saylor Foundation- Textbook Released under CC BY.
- [6] Yuniati,Suci. 2012. *Menentukan Kelipatan Persekutuan Terkecil (Kpk) Dan Faktor Persekutuan Terbesar (Fpb) Dengan Menggunakan Metode “Pebi”*. p-ISSN: 2085-5893 / e-ISSN: 2541-0458: <http://jurnalbeta.ac.id>.

BAB IV

RELATIF PRIMA

(Oleh : Eka Yulitasari)

A. PENDAHULUAN

Teori bilangan menjadi salah satu dasar matematika. Teori bilangan merupakan cabang dari matematika dimana yang dipelajari adalah sifat dan hubungan antara beberapa tipe bilangan. Teori bilangan menjadi salah satu dari banyak materi dalam matematika yang cukup penting dalam matematika yang biasanya diaplikasikan di dalam kehidupan sehari-hari.

Teori bilangan merupakan cabang matematika yang mempelajari tentang sifat-sifat bilangan bulat dan penerapannya dalam kehidupan. Pada awalnya bilangan hanya digunakan untuk mengingat jumlah. Bilangan merupakan suatu konsep matematika yang digunakan untuk pencacahan dan pengukuran. Simbol atau lambang yang digunakan untuk mewakili suatu bilangan disebut angka atau lambang bilangan. Bilangan dapat juga dikatakan suatu ide yang bersifat abstrak yang akan memberikan keterangan mengenai banyaknya suatu kumpulan benda.

Pada perkembangannya, bilangan menjadi hal yang penting bagi kehidupan. Dalam kehidupan sehari-hari kita selalu bertemu dengan bilangan. Pada sistem bilangan real, kita mengenal berbagai jenis bilangan. Lebih spesifiknya, pada bilangan bulat, terdapat bilangan yang kita kenal sebagai bilangan prima.

Bilangan prima merupakan bilangan yang hanya dapat dibagi oleh bilangan itu sendiri dan 1 (satu). Apakah prima disini sama dengan relatif prima? Pada makalah ini, saya akan membahas tentang relatif prima.

B. PEMBAHASAN

Dua buah bilangan bulat a dan b dikatakan relatif prima jika $PBB(a, b) = 1$.

Contoh

20 dan 3 adalah relatif prima sebab $PBB(20,3) = 1$. Begitu juga 7 dan 11 relatif prima karena $PBB(7,11) = 1$. Tetapi 20 dan 5 tidak relatif prima sebab $PBB(20,5) = 5^1$[1]

Dari contoh yang sebelumnya diberikan 20 dan 3 adalah relatif prima. Penjabarannya adalah sebagai berikut :

- Faktor Pembagi 20 = 1, 2, 4, 5, 10, 20
- Faktor Pembagi 3 = 1, 3
- Faktor pembagi bersama dari 20 dan 3 adalah 1 sehingga $PBB = 1$

Karena $PBB(20, 3) = 1$, maka 20 dan 3 relatif prima.

Jadi agar lebih memahami relatif prima, maka kita juga harus mengetahui PBB (Pembagi Bersama Terbesar) atau sering kita kenal dengan FPB (Faktor Persekutuan Terbesar).

- **Faktor Persekutuan Terbesar (FPB)**

Definisi 1

1. Bilangan c disebut faktor persekutuan bilangan bulat a, b jika c membagi a dan b sekaligus.
2. Bilangan bulat positif d disebut faktor persekutuan terbesar bilangan a dan b jika
 - a. d faktor persekutuan a dan b .
 - b. untuk setiap faktor persekutuan e dari bilangan a dan b , maka $e|d$.

Bilangan d ditulis sebagai $FPB(a, b)$ atau (a, b) .

3. Jika $d|a$ dan $d|b$, maka $d|(a, b)$.
4. Dua *bilangan* bulat a dan b disebut relatif prima jika bilangan $FPB(a, b) = 1$...[2]

Selain dengan mencari faktor pembagi dari kedua bilangan dengan cara umum yang sering kita pelajari, kita juga bisa menentukan PBB atau FPB dari suatu bilangan dengan Algoritma Pembagian.

- **Teorema (Algoritma Pembagian)**

Jika a dan b bilangan-bilangan bulat dengan $b > 0$, maka ada dengan tunggal pasangan bilangan-bilangan bulat q dan r yang memenuhi $a = qb + r$, dengan $0 \leq r < b$. Selanjutnya FPB dari a dan b dapat dicari dengan mengulang-ulang algoritma pembagian ini.

Contoh.

Tentukan $FPB(4840,1512)$

Penyelesaian :

$$4840 = 3 \times 1512 + 304$$

$$1512 = 4 \times 304 + 296$$

$$304 = 1 \times 296 + 8$$

$$296 = 37 \times 8 + 0$$

$$\text{Jadi } FPB(4840,1512) = 8 \qquad \dots[3]$$

Selain disebut Algoritma Pembagian, cara menentukan FPB atau PBB dengan cara ini disebut juga Aritmatika Euclidean. Lebih jelasnya langkah-langkah menentukan PBB atau FPB dengan Algoritma Pembagian atau Aritmatika Euclidean adalah sebagai berikut.

• **Algoritma Euclidean**

Misalkan akan ditentukan $FPB(a, b)$, $a > b$

1. Tuliskan a dan b dalam bentuk $a = b \cdot q + r$
2. Substitusikan nilai $a = b$ dan $b = r$
3. Ulangi langkah 1, sampai r bernilai 0
4. $FPB = r$ sebelum $r = 0$

Contoh :

Tentukan $FPB(414,662)$ menggunakan Algoritma Euclidean

Penyelesaian :

$$662 = 1 \times 414 + 248$$

$$414 = 1 \times 248 + 166$$

$$248 = 1 \times 166 + 82$$

$$166 = 2 \times 82 + 2$$

$$82 = 41 \times 2 + 0$$

$FPB(414,662)$ adalah nilai r terakhir sebelum $r = 0$ yaitu 2.

Jadi $FPB(414,662) = 2$...[4]

- Jika a dan b relatif prima, maka terdapat bilangan bulat m dan n sedemikian sehingga **$ma + nb = 1$**

Contoh

Bilangan 20 dan 3 adalah relatif prima karena $PBB(20, 3) = 1$, atau dapat ditulis $2 \cdot 20 + (-13) \cdot 3 = 1$

dengan $m = 2$ dan $n = -13$. Tetapi 20 dan 5 tidak relatif prima karena $PBB(20, 5) = 5 \neq 1$ sehingga 20 dan 5 tidak dapat dinyatakan dalam $m \cdot 20 + n \cdot 5 = 1$[1]

Penjelasan dari contoh yang sebelumnya diberikan yaitu 20 dan 3 adalah relatif prima karena $PBB(20,3) = 1$. Maka akan ada bilangan bulat m dan n sedemikian sehingga yang memenuhi $m \cdot a + n \cdot b = 1$. Dapat dibuktikan untuk $m = 2$ dan $n = -13$ berlaku

$$m \cdot a + n \cdot b = (2)(20) + (-13)(3)$$

$$m \cdot a + n \cdot b = 40 - 39$$

$$m \cdot a + n \cdot b = 1$$

Teorema 9. *Pembagi persekutuan terbesar dari dua bilangan bulat a dan b , keduanya adalah tidak sama dengan 0 sehingga bilangan bulat positif terkecil $ma + nb = d$ untuk semua bilangan bulat m dan n .*

Bukti.

Asumsikan tanpa menghilangkan keumuman, bahwa a dan b adalah bilangan bulat positif. Pertimbangkan himpunan semua kombinasi linear bilangan bulat positif dari a dan b . Himpunan ini tidak kosong karena $a = 1.a + 0.b$ dan $b = 0.a + 1.b$ keduanya ada dalam himpunan ini. Jadi himpunan ini memiliki paling sedikit elemen d berdasarkan prinsip keteraturan. Jadi $d = m.a + n.b$ untuk beberapa bilangan bulat m dan n . Kita harus membuktikan bahwa d membagi a dan b dan itu adalah pembagi terbesar dari a dan b .

Berdasarkan algoritma pembagian, kita memiliki

$$a = d.q + r \quad 0 \leq r < d$$

Maka kita peroleh

$$r = a - d.q$$

$$r = a - q(m.a + n.b)$$

$$r = a - q.m.a - q.n.b$$

$$r = (1 - q.m)a - q.n.b$$

Kemudian kita mendapatkan bahwa r adalah kombinasi linier dari a dan b . Karena $0 \leq r < d$ dan d adalah bilangan bulat positif terkecil yang merupakan kombinasi linier dari a dan b , maka $r = 0$ dan $a = d.q$. Oleh karena itu $d|a$. Demikian pula $d|b$.

Sekarang perhatikan bahwa jika ada pembagi c yang membagi a dan b . Kemudian c membagi setiap kombinasi linier dari a dan b dengan Teorema 4. Jadi $c|d$. Ini membuktikan bahwa setiap pembagi persekutuan dari a dan b membagi d . Oleh karena itu $c \leq d$, dan d adalah pembagi terbesar.

Hasilnya, kita menyimpulkan bahwa jika $(a, b) = 1$ maka terdapat bilangan bulat m dan n sehingga $ma + nb = 1$. [5]

Soal dan Penyelesaian :

1. Tunjukkan bahwa $(1456, 1485)$ relatif prima!

Penyelesaian :

Pertama akan digunakan cara biasa yaitu penjabaran faktorisasi prima dari masing-masing bilangan lalu dicari FPB atau PBB nya

$$\text{Faktorisasi prima } 1456 = 2^4 \times 7 \times 13$$

$$\text{Faktorisasi prima } 1485 = 3^3 \times 5 \times 11$$

$$\text{FPB} = 1$$

Karena $\text{FPB}(1456, 1485) = 1$ maka $(1456, 1485)$ relatif prima

Cara kedua dengan menggunakan Algoritma Euclidean

$$1485 = 1 \times 1456 + 29$$

$$1456 = 50 \times 29 + 6$$

$$29 = 4 \times 6 + 5$$

$$6 = 1 \times 5 + 1$$

$$5 = 5 \times 1 + 0$$

$FPB(1456,1485)$ adalah nilai r terakhir sebelum $r = 0$ yaitu 1. Jadi $FPB(1456,1485) = 1$. Karena FPB nya = 1 maka $(1456,1485)$ relatif prima.

Baik dengan menggunakan faktorisasi prima maupun dengan algoritma Euclidean tetap diperoleh hasil yang sama bahwa **$(1456, 1485)$ relatif prima.**

2. Tunjukkan bahwa jika m adalah bilangan bulat positif, maka $3m + 2$ dan $5m + 3$ adalah relatif prima. ...[5]

Penyelesaian :

Dengan menggunakan Algoritma Euclidean diperoleh

$$5m + 3 = 1 \times (3m + 2) + (2m + 1)$$

$$3m + 2 = 1 \times (2m + 1) + (m + 1)$$

$$2m + 1 = 2 \times (m + 1) - (1)$$

$$m + 1 = 1 \times (m + 1) + 0$$

Karena nilai r terakhir sebelum $r = 0$ yaitu 1. Jadi $FPB(3m + 2, 5m + 3) = 1$. Karena FPB nya = 1 maka **$(3m + 2, 5m + 3)$ relatif prima.**

3. Dapatkah $(1456,1485)$ dinyatakan dalam $ma + nb = 1$?

Jika ya tentukan nilai m dan n nya!

Penyelesaian :

Dari soal sebelumnya telah kita ketahui bahwa $PBB(1456,1485) = 1$ yang artinya $(1456,1485)$ relatif prima. Karena relatif prima maka dapat dinyatakan dalam

$ma + nb = 1$. Untuk menentukan m dan n nya dengan pembalikan Algoritma Euclidean.

Kita ingat kembali pada algoritma Euclidean berlaku

$$1485 = 1 \times 1456 + 29 \text{ atau } 29 = 1485 - 1 \times 1456 \quad \dots 1)$$

$$1456 = 50 \times 29 + 6 \text{ atau } 6 = 1456 - 50 \times 29 \quad \dots 2)$$

$$29 = 4 \times 6 + 5 \text{ atau } 5 = 29 - 4 \times 6 \quad \dots 3)$$

$$6 = 1 \times 5 + 1 \text{ atau } 1 = 6 - 1 \times 5 \quad \dots 4)$$

$$5 = 5 \times 1 + 0$$

Dari ...4) diperoleh

$$1 = 6 - 1 \times 5$$

$$1 = 6 - 1(29 - 4 \times 6) \quad \text{dari ... 3)}$$

$$1 = (1 \times 6) - (29) + (4 \times 6)$$

$$1 = (5 \times 6) - (29)$$

$$1 = 5(1456 - 50 \times 29) - (1485 - 1 \times 1456) \text{ dari ..1) dan ... 2)}$$

$$1 = (5 \times 1456) - (5 \times 50 \times 29) - (1485) + (1 \times 1456)$$

$$1 = (6 \times 1456) - (250 \times 29) - (1 \times 1485)$$

$$1 = (6 \times 1456) - 250(1485 - 1 \times 1456) - (1 \times 1485) \text{ dari ..1)}$$

$$1 = (6 \times 1456) - (250 \times 1485) + (250 \times 1456) - (1 \times 1485)$$

$$1 = (256 \times 1456) - (251 \times 1485)$$

Maka diperoleh $m = 256$ dan $n = -251$

C. LATIHAN SOAL

1. Tunjukkan bahwa $(828,175)$ relatif prima dengan menggunakan penjabaran faktorisasi prima!
2. Tunjukkan bahwa $(1375,6048)$ relatif prima dengan menggunakan penjabaran faktorisasi prima!
3. Tunjukkan bahwa $(1140,1001)$ relatif prima dengan menggunakan algoritma euclidean!
4. Tunjukkan bahwa $(1280,1701)$ relatif prima dengan menggunakan algoritma euclidean!
5. Dapatkah $(1140,1001)$ dinyatakan dalam $ma + nb = 1$?
Jika ya tentukan nilai m dan n nya!
6. Buktikan bahwa jika $(a, b) = 1$ dan $a|bc$ maka $a|c$!
7. Diberikan bilangan bulat a, b dan c sehingga $FPB(a, b) = 1$ dan $c|a$. Buktikan bahwa $FPB(b, c) = 1$
8. Diberikan bilangan bulat a, b dan c sehingga $FPB(a, b) = 1$ dan $c|a + b$. Buktikan bahwa $FPB(a, c) = FPB(b, c) = 1$.
9. Diberikan bilangan bulat a, b, c dan d sehingga $FPB(a, b) = 1$, $d|ac$, dan $d|bc$. Buktikan bahwa $d|c$.
10. Untuk bilangan bulat a , tunjukkan bahwa :
 - (a) $FPB(2a + 1, 9a + 4) = 1$
 - (b) $FPB(5a + 2, 7a + 3) = 1$

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Munir, Rinaldi. 2004. Bahan Kuliah ke-3 IF5054 Kriptografi Teori Bilangan (Number Theory). Bandung : Departemen Teknik Informatika Institut Teknologi.
- [2] Sari, Kartika. 2016. Materi Teori Bilangan. Pembinaan Peserta OSN Matematika.
- [3] Musthofa. 2011. Handout Teori Bilangan. Universitas Negeri Yogyakarta.
- [4] Hidayat, Yalvi. 2019. “Matematika Diskrit : Konsep Keterbagian, Modulo, Bilangan Prima, Algoritma Euclidean dan Contoh Soal”, <https://wikiwoh.blogspot.com/2018/10/matematika-diskrit-Konsep-Keterbagian-Modulo-Bilangan-Prima-Algoritma-Euclidean.html>, diakses pada 09 Januari 2021 pukul 10.12.
- [5] Raji, Wissam. 2013. *An Introductory Course in Elementary Number Theory*. Saylor Foundation.

BAB V

ARITMETIKA MODULO

(Oleh : Gustia Putri Lestari)

A. PENDAHULUAN

Teori bilangan merupakan bagian dari matematika yang tergolong sudah tua usianya. Namun demikian, akhir-akhir ini Teori Bilangan menjadi dasar dari pengembangan beberapa cabang matematika seperti cryptografi (tulisan rahasia/sandi) dan ilmu pengetahuan komputer sebagai salah satu pengembangan dalam matematika terapan [1] (Handayanto Agung). Sistem modulo merupakan bagian yang cukup penting dalam Teori Bilangan.

Kongruensi merupakan bahasa teori bilangan karena pembahasan teori bilangan bertumpu pada kongruensi. Bahasa kongruensi ini diperkenalkan dan dikembangkan oleh Karl Friedrich Gauss, matematisi paling terkenal dalam sejarah, hidup pada awal abad Sembilan belas, sehingga sering disebut sebagai Pangeran Matematisi (*The Prince of Mathematicians*). Meskipun Gauss tercatat karena temuan-temuannya di dalam geometri, aljabar, analisis, astronomi, dan fisika matematika, ia mempunyai minat khusus di dalam teori bilangan dan mengatakan bahwa **“mathematics is the queen of sciences, and the theory of numbers is the queen of mathematics”**. Gauss merintis untuk meletakkan teori bilangan modern di dalam bukunya *Disquisitiones Arithmeticae* pada tahun 1801 [2] (Trisnawati Fitri).

Secara tidak langsung kongruensi sudah dibahas sebagai bahan matematika di sekolah dalam bentuk bilangan jam atau bilangan bersisa. Peragaan dengan menggunakan tiruan jam dipandang bermanfaat karena peserta didik akan langsung praktek untuk lebih mengenal adanya sistem bilangan yang berbeda yaitu sistem bilangan jam, misalnya bilangan jam duaan, tigaan, empatan, limaan, enam dan seterusnya. Kemudian, kita telah mengetahui bahwa bilangan-bilangan bulat lebih dari 4 dapat di “reduksi” menjadi 0, 1, 2, 3, atau 4 dengan cara menyatakan sisanya jika bilangan itu dibagi 5, misalnya 13 dapat direduksi menjadi 3 karena 13 dibagi 5 bersisa 3, 50 dapat direduksi menjadi 0 karena 50 dibagi 5 bersisa 0, dan dalam bahasa kongruensi dapat dinyatakan sebagai $13 = 3 \pmod{5}$ dan $50 = 0 \pmod{5}$. Sekarang, kita akan membahas lebih mendalam mengenai sub materi pada teori bilangan yakni aritmetika modulo dan kongruensi [2]^{Trisnawati Fitri}.

B. PEMBAHASAN

1. Aritmetika Modulo

Pengertian Aritmetika modulo

Aritmetika modulo adalah suatu metode dalam ilmu matematika yang menyatakan suatu sisa pada suatu bilangan bulat jika dibagi dengan suatu bilangan bulat yang lain atau dapat dikatakan modulo adalah sebuah operasi bilangan yang menghasilkan sisa pembagian dari suatu bilangan terhadap

bilangan lainnya. Operator yang digunakan pada aritmatika modulo adalah **mod**[3] (Sansani Sisdika, 2008). Operator mod, jika digunakan pada pembagian bilangan bulat memberikan sisa pembagian. Definisi dari operator mod dinyatakan sebagai berikut [4] (Munir, 2004):

- Misalkan a adalah bilangan bulat dan m adalah bilangan bulat > 0 . Operasi $a \bmod m$ (dibaca “ a modulo m ”) memberikan sisa jika a dibagi dengan m
- Notasi: $a \bmod m = r$ sedemikian sehingga $a = mq + r$, dengan $0 \leq r < m$.
- Bilangan m disebut **modulus** atau **modulo** dan hasil aritmetika modulo m terletak di dalam himpunan $\{0, 1, 2, \dots, m - 1\}$. Mengapa hanya sampai $m - 1$?

Perhatikan syarat bahwa $0 \leq r < m$, sehingga semesta pembicaraannya ada pada bilangan bulat, maka himpunan hasil aritmetika modulo hanya akan sampai pada $m - 1$. Jika $a \bmod m = 0$, maka dikatakan bahwa a adalah kelipatan dari m , yaitu a habis dibagi dengan m .

Contoh:

Beberapa hasil operasi dengan operator modulo

1. $23 \bmod 5 = 3 \quad \rightarrow \quad (23 = 5 \cdot 4 + 3)$
2. $27 \bmod 3 = 0 \quad \rightarrow \quad (27 = 3 \cdot 9 + 0)$
3. $6 \bmod 8 = 6 \quad \rightarrow \quad (6 = 8 \cdot 0 + 6)$
4. $0 \bmod 12 = 0 \quad \rightarrow \quad (0 = 12 \cdot 0 + 0)$

$$5. -41 \bmod 9 = 4 \quad \rightarrow (-41 = 9(-5) + 4)$$

Penjelasan nomor 5:

Karena a negatif, bagi $|a|$ dengan m mendapatkan sisa r' .

Maka $a \bmod m = m - r'$ bila $r' \neq 0$

$$|-41| \bmod 9 = 5 \text{ diperoleh dari } 41 = 9 \cdot 4 + 5$$

$r' = 5$ maka **berlaku** $a \bmod m = m - r'$

$$-41 \bmod 9 = 9 - 5 = 4$$

$$6. -39 \bmod 13 = 0 \quad \rightarrow (-39 = 13(-3) + 0)$$

Penjelasan nomor 6:

Sama halnya dengan soal nomor 5, karena a negatif, bagi $|a|$ dengan m untuk mendapatkan sisa r' .

$$|-39| \bmod 13 = 0 \text{ diperoleh dari } 39 = 13 \cdot 3 + 0$$

$r' = 0$ maka **tidak berlaku** $a \bmod m = m - r'$

7. Perhatikan tabel berikut.

Operasi perkalian mod 4 pada $x = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

x	1	2	3	4	5
1	1	2	3	0	1
2	2	0	2	0	2
3	3	2	1	0	3
4	0	0	0	0	0
5	1	2	3	0	1

Nilai yang diperoleh pada tabel di atas yakni sebagai berikut:

$$1. (1 \cdot 1) \bmod 4 = 1 \bmod 4 = 4 \cdot 0 + 1$$

2. $(1.2) \bmod 4 = 2 \bmod 4 = 4.0 + 2$
3. $(1.3) \bmod 4 = 3 \bmod 4 = 4.0 + 3$
4. $(1.4) \bmod 4 = 4 \bmod 4 = 4.1 + 0$
5. $(1.5) \bmod 4 = 5 \bmod 4 = 4.1 + 1$
6. Dan seterusnya, silahkan dicoba.

Sifat-sifat Modulo

Jika a dan b adalah bilangan bulat, serta $m > 0$ maka berlaku sifat modulo yakni [5]^(Sukardi, 2020):

1. $(a + b) \bmod m = ((a \bmod m) + (b \bmod m)) \bmod m$
2. $(a - b) \bmod m = ((a \bmod m) - (b \bmod m)) \bmod m$
3. $(a \cdot b) \bmod m = ((a \bmod m)(b \bmod m)) \bmod m$
4. $a^p \bmod m = ((a^x \bmod m)(b^y \bmod m)) \bmod m$
dengan catatan $x, y \geq 0, x + y = p$

Contoh:

1. Hitunglah $100144 \bmod 25$.

Penyelesaian :

$$\begin{aligned}
 100144 \bmod 25 &= (100000 + 100 + 44) \bmod 25 \\
 &= ((100000 \bmod 25) + (100 \bmod 25) + (44 \\
 &\quad \bmod 25)) \bmod 25 \\
 &= (0 + 0 + 19) \bmod 25 \\
 &= 19 \bmod 25 \\
 &= \mathbf{19} \rightarrow 19 = 25.0 + \mathbf{19}
 \end{aligned}$$

Jadi, hasil dari $100144 \bmod 25$ adalah 19

2. Tentukanlah $5! \bmod 17$.

Penyelesaian :

$$\begin{aligned}5! \bmod 17 &= (5.4.3.2.1) \bmod 17 \\ &= 120 \bmod 17 \\ &= \mathbf{1} \rightarrow 120 = 17.7 + \mathbf{1}\end{aligned}$$

Jadi, hasil dari $5! \bmod 17$ adalah 1

3. Carilah 2 angka terakhir dari 2^{30} .

Penyelesaian :

2 angka terakhir artinya mod 100 sehingga menjadi

$$\begin{aligned}2^{30} \bmod 100 &= ((2^{10} \bmod 100)(2^{10} \bmod 100)(2^{10} \bmod 100)) \\ &\quad \bmod 100 \\ &= ((1024 \bmod 100)(1024 \bmod 100)(1024 \bmod \\ &\quad 100) \bmod 100 \\ &= ((24)(24)(24) \bmod 100 \\ &= 13824 \bmod 100 \\ &= \mathbf{24} \rightarrow 13824 = 100.138 + \mathbf{24}\end{aligned}$$

Jadi, dua angka terakhir dari 2^{30} adalah 24

Banyak persoalan dalam kehidupan sehari-hari yang dapat diselesaikan dengan menggunakan aritmatika modulo, sebagai contoh untuk validasi IMEI pada piranti keras, validasi nomor ISBN, kriptografi, dan lain-lain[6]^(Ramadha Anwar).

2. Kongruensi

Dalam himpunan bilangan bulat, kekongruenan merupakan metode atau cara lain untuk menelaah atau menjelaskan tentang keterbagian suatu bilangan bulat. Teori kongruensi dikenalkan oleh Carl Friedreich Gauss. Gauss berkontribusi pada ide dasar kongruensi dan membuktikan beberapa teorema yang berkaitan dengan teori ini. teori kongruensi dikembangkan oleh Gauss pada awal abad kesembilan belas. Teori kongruensi yang dimaksud yakni apabila terdapat dua buah bilangan bulat a dan b jika dibagi dengan sebuah bilangan bulat m , akan menghasilkan sisa pembagian yang sama. Hal ini dapat dikatakan bahwa a dan b kongruen dalam modulo m . Berikut ini penjelasan mengenai definisi teori kongruensi dalam modulo m [7]^(Munir, 2004) :

- Misalkan $38 \bmod 5 = 3$ dan $13 \bmod 5 = 3$, maka kita dapat mengatakan $38 \equiv 13 \pmod{5}$ (dibaca: 38 kongruen dengan 13 dalam modulo 5).

- **Definisi 1:**

Misalkan a dan b adalah bilangan bulat dan m adalah bilangan > 0 , maka $a \equiv b \pmod{m}$ jika m habis membagi $a - b$.

Contoh:

$$17 \equiv 2 \pmod{3} \rightarrow (3 \text{ habis membagi } 17 - 2 = 15)$$

$$-7 \equiv 15 \pmod{11} \rightarrow (11 \text{ habis membagi } -7 - 15 = -22)$$

- Jika a tidak kongruen dengan b dalam modulo m , maka ditulis $a \not\equiv \pmod{m}$.

Contoh:

$$12 \not\equiv 2 \pmod{7} \quad (7 \text{ tidak habis membagi } 12 - 2 = 10)$$

$$-7 \not\equiv 15 \pmod{3} \quad (3 \text{ tidak habis membagi } -7 - 15 = -22)$$

Berdasarkan definisi 1 muncul beberapa teorema sebagai berikut:

Teorema 1 [7] (Munir, 2004) .

$a \equiv b \pmod{m}$ jika dan hanya jika ada bilangan bulat k sedemikian sehingga $a = b + km$

Bukti 1[1] (Handayanto Agung)

Dari definisi kekongruenan, dapat ditulis kembali bahwa :
Jika $m > 0$ maka m akan habis membagi $(a - b)$ yang ditulis $m \mid (a - b)$ jika dan hanya jika $a \equiv b \pmod{m}$. Jika $m \mid (a - b)$, maka ada bilangan bulat k sedemikian sehingga $(a - b) = mk$. Sehingga $a \equiv b \pmod{m}$ jika dan hanya jika $a - b = mk$ untuk suatu bilangan bulat k . Tetapi karena $a - b = mk$ sama artinya dengan $a = mk + b$, maka $a \equiv b \pmod{m}$ jika dan hanya jika $a = mk + b$.

Contoh:

$$17 \equiv 2 \pmod{3} \quad \text{dapat ditulis sebagai } 17 = 2 + 5 \cdot 3$$

$$-7 \equiv 15 \pmod{11} \quad \text{dapat ditulis sebagai } -7 = 15 + (-2) \cdot 11$$

Teorema 2[4] (Alwan Salwani, 2013) .

Setiap bilangan bulat kongruen modulo m dengan tepat satu diantara $0, 1, 2, 3, \dots, (m - 1)$.

Bukti 2.

Menurut algoritma pembagian, jika a dan m adalah bilangan bulat dan $m > 0$, maka dapat dinyatakan sebagai $a = mq + r$ dengan $0 \leq r < m$, maka terdapat m pilihan untuk r yaitu $0, 1, 2, 3, \dots, (m - 1)$. Jadi, setiap bilangan bulat akan kongruen modulo m dengan tepat satu di antara $0, 1, 2, 3, \dots, (m - 1)$.

- Berdasarkan definisi aritmetika modulo, kita dapat menuliskan $a \bmod m = r$ sebagai

$$a \equiv r \pmod{m} \text{ [7] (Munir, 2004)}$$

Contoh soal mengenai teori kongruensi $a \equiv r \pmod{m}$ yakni sebagai berikut [7] (Munir, 2004):

1. $23 \bmod 5 = 3$ dapat ditulis sebagai $23 \equiv 3 \pmod{5}$
2. $27 \bmod 3 = 0$ dapat ditulis sebagai $27 \equiv 0 \pmod{3}$
3. $6 \bmod 8 = 6$ dapat ditulis sebagai $6 \equiv 6 \pmod{8}$
4. $0 \bmod 12 = 0$ dapat ditulis sebagai $0 \equiv 0 \pmod{12}$
5. $-41 \bmod 9 = 4$ dapat ditulis sebagai $-41 \equiv 4 \pmod{9}$
6. $-39 \bmod 13 = 0$ dapat ditulis sebagai $-39 \equiv 0 \pmod{13}$

Definisi 2[1] (Handayanto Agung).

Jika $a \equiv r \pmod{m}$ dengan $0 \leq r < m$, maka r disebut residu (sisa) terkecil dari a modulo m . Untuk kekongruenan modulo m ini, $\{0, 1, 2, 3, \dots, (m - 1)\}$ disebut himpunan residu terkecil modulo m .

Contoh[4] (Alwan Salwani, 2013) :

- a) Residu terkecil dari 71 modulo 2 adalah 1, sebab sisa dari $71 : 2$ adalah 1.
- b) Residu terkecil dari 71 modulo 3 adalah 2, sebab sisa dari $71 : 3$ adalah 2.
- c) Residu terkecil dari (-53) modulo 10 adalah 7, sebab sisa dari $(-53) : 10$ adalah 7 (ingat residu terkecil dari suatu bilangan adalah bilangan bulat positif).
- d) Residu terkecil dari 34 modulo 5 adalah 4, sebab sisa dari $34 : 5$ adalah 4.
- e) Walaupun $34 \equiv 9 \pmod{5}$, tetapi 9 bukan residu terkecil dari $34 \pmod{5}$, sebab 9 bukan sisa dari $34 : 5$.

Dari definisi 2 di atas muncul teorema sebagai berikut.

Teorema 3[1] (Handayanto Agung)

$a \equiv b \pmod{m}$ jika dan hanya jika a dan b memiliki sisa yang sama jika dibagi oleh m .

Bukti 3.

Pertama: akan dibuktikan bahwa jika $a \equiv b \pmod{m}$ maka a dan b memiliki sisa yang sama jika dibagi oleh m .

Karena $a \equiv b \pmod{m}$ maka $a \equiv r \pmod{m}$ dan $b \equiv r \pmod{m}$ dengan r adalah residu terkecil modulo m atau $0 \leq r < m$.

Dari $a \equiv r \pmod{m}$ berarti $a = mq + r$ untuk suatu bilangan bulat q

Dari $b \equiv r \pmod{m}$ berarti $b = mt + r$ untuk suatu bilangan bulat t

Jadi, a dan b mempunyai sisa yang sama yaitu r jika dibagi dengan m .

Kedua: akan dibuktikan bahwa jika a dan b mempunyai sisa yang sama (r) jika dibagi oleh m , maka $a \equiv b \pmod{m}$.

Andaikan a mempunyai sisa yang sama (r) jika dibagi oleh m , maka $a \equiv b \pmod{m}$, hal ini berarti $a = mq + r$. Dan andaikan b mempunyai sisa yang sama (r) jika dibagi oleh m , hal ini berarti $b = mt + r$. Dari kedua persamaan tersebut diperoleh bahwa: $a - b = m(q - t)$ yang artinya $m|(a - b)$ atau $a \equiv b \pmod{m}$.

Definisi 3[4] (Alwan Salwani, 2013)

Himpunan bilangan bulat $\{r_1, r_2, r_3, \dots, r_m\}$ disebut *sistem residu lengkap* modulo m , bila setiap elemennya kongruen modulo m , dengan satu dan hanya satu dari $0, 1, 2, \dots, (m - 1)$.

Contoh :

a. Himpunan $\{45, -9, 12, -22, 24\}$ adalah sistem residu lengkap dari modulo 5, dapat diperiksa bahwa :

$$45 \equiv 0 \pmod{5}$$

$$-9 \equiv 1 \pmod{5}$$

$$12 \equiv 2 \pmod{5}$$

$$23 \equiv 3 \pmod{5}$$

$$24 \equiv 4 \pmod{5}$$

- b. Himpunan $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ merupakan sistem residu lengkap modulo 5, sekaligus sebagai himpunan residu terkecil modulo 5.
- c. Himpunan $\{5, 11, 6, 1, 8, 15\}$ bukan merupakan sistem residu lengkap modulo 6, sebab $5 \equiv 11 \pmod{6}$ yang dua-duanya berada dalam himpunan tersebut.

Apakah relasi kekongruenan modulo suatu bilangan bulat merupakan relasi ekuivalensi atau tidak?

Kekongruenan modulo suatu bilangan bulat positif adalah suatu relasi antara bilangan-bilangan bulat. Dapat ditunjukkan bahwa relasi kekongruenan merupakan relasi ekuivalensi. Telah diketahui bahwa suatu relasi disebut relasi ekuivalensi jika relasi tersebut memiliki sifat refleksi, simetris dan transitif. Sekarang akan ditunjukkan bahwa relasi kekongruenan itu merupakan relasi ekuivalensi.

Perhatikan bahwa jika a , b , dan c adalah bilangan bulat dengan $m > 0$, maka:

1. Sifat simetris

$$a \equiv b \pmod{m} \rightarrow b \equiv a \pmod{m} \text{ [8] (S.M Fachruddin, 2007)}$$

Bukti:

$$a \equiv b \pmod{m} \rightarrow m|a - b \rightarrow m|-(b - a) \rightarrow m|(b - a) \rightarrow b \equiv a \pmod{m}$$

2. Sifat refleksif

$$a \equiv a \pmod{m} \text{ untuk semua } a \in \mathbb{Z} \text{ [8] (S.M Fachruddin, 2007)}$$

Bukti:

$a \equiv a \pmod{m} \rightarrow m|0 \rightarrow m|a - a \rightarrow a \equiv a \pmod{m}$ untuk semua bilangan bulat a dan $m \neq 0$

3. Transitif

$a \equiv b \pmod{m}$ dan $b \equiv c \pmod{m} \rightarrow a \equiv c \pmod{m}$ [8]

(S.M Fachruddin, 2007)

Bukti:

$a \equiv b \pmod{m} \rightarrow m|a - b$

$b \equiv c \pmod{m} \rightarrow m|b - c$

$m|a - b$ dan $m|b - c \rightarrow m|(a - b) + (b - c)$ atau

$m|a - c \rightarrow a \equiv c \pmod{m}$

Karena relasi “ \equiv ” (kekongruenan) pada himpunan bilangan bulat memenuhi ketiga sifat tersebut, yaitu reflekti, simetris, dan transitif, maka relasi “ \equiv ” (kekongruenan) pada himpunan bilangan bulat merupakan relasi ekuivalensi [4] (Alwan Salwani, 2013).

(Terbukti).

Relasi kekongruenan mempunyai kemiripan sifat dengan persamaan, sebab relasi kekongruenan dapat dinyatakan sebagai persamaan, yaitu $a \equiv b \pmod{m}$ sama artinya dengan $a = b + km$, untuk suatu bilangan bulat k .

Misalnya [4] (Alwan Salwani, 2013) :

1. Jika $a \equiv b \pmod{m}$, maka $(a + c) \equiv (b + c) \pmod{m}$, untuk setiap bilangan bulat c .

Bukti :

Jika $a \equiv b \pmod{m}$, berarti $a - b = k.m$, atau $a = km + b$, untuk setiap bilangan bulat k , selanjutnya, jika masing-masing ruas ditambahkan dengan bilangan bulat c , maka diperoleh :

$$a + c = km + b + c$$

atau, $(a + c) - (b + c) = k.m$

yang berarti bahwa:

$$(a + c) \equiv (b + c) \pmod{m} \dots\dots (\text{Terbukti})$$

Contoh :

Jika $15 \equiv 3 \pmod{4}$, maka :

- $17 \equiv 5 \pmod{4}$

sebab $15 + 2 = 17$ dan $3 + 2 = 5 \rightarrow c = 2$

- $21 \equiv 9 \pmod{4}$

sebab $15 + 6 = 21$ dan $3 + 6 = 9 \rightarrow c = 6$

- $116 \equiv 104 \pmod{4}$

sebab $15 + 101 = 116$ dan $3 + 101 = 104 \rightarrow c = 101$

- Dan seterusnya.

2. Jika $a \equiv b \pmod{m}$, maka $ac \equiv bc \pmod{m}$, untuk setiap bilangan bulat c .

Bukti:

Jika $a \equiv b \pmod{m}$, berarti $a - b = k.m$ untuk setiap bilangan bulat k selanjutnya, jika masing-masing ruas dikalikan dengan bilangan bulat c , maka diperoleh :

$$c(a - b) = c.k.m \text{ atau, } ac - bc = ck.m$$

karena c dan k masing-masing adalah bilangan bulat, maka $c \cdot k$ juga merupakan suatu bilangan bulat, sehingga diperoleh bahwa : $ac \equiv bc \pmod{m}$... (**Terbukti**)

Contoh :

Jika $10 \equiv 2 \pmod{4}$, Maka :

- $50 \equiv 10 \pmod{4}$
Sebab $10 \cdot 5 = 50$ dan $2 \cdot 5 = 10 \rightarrow c = 5$
- $120 \equiv 24 \pmod{4}$
Sebab $10 \cdot 12 = 120$, dan $2 \cdot 12 = 24 \rightarrow c = 12$
- Dan seterusnya.

3. $a \equiv b \pmod{m} \rightarrow ax \equiv bx \pmod{m}$ [8] (S.M Fachruddin, 2007)

Bukti:

$$a \equiv b \pmod{m} \rightarrow m|a - b \rightarrow m|(b - a)x \rightarrow m|ax - bx \rightarrow ax \equiv bx \pmod{m}$$

4. $a \equiv b \pmod{m}$ dan $c \equiv d \pmod{m} \rightarrow a + c \equiv b + d \pmod{m}$ [9] (Raji Wissam, 2016)

Bukti:

$$a \equiv b \pmod{m} \rightarrow m|a - b$$

$$c \equiv d \pmod{m} \rightarrow m|c - d$$

Akibatnya, ada dua bilangan bulat k dan l sehingga $a - b = mk$ dan $c - d = ml$. Maka

$$(a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d) = m(k + l).$$

Hasil dari, $m | ((a + c) - (b + d))$, karenanya

$$m | ((a + c) - (b + d))$$

$$a + c \equiv b + d \pmod{m}$$

Contoh:

Jika $20 \equiv 2 \pmod{6}$, dan $25 \equiv 1 \pmod{6}$, maka $45 \equiv 3 \pmod{6}$, sebab $20 + 25 = 45$ dan $2 + 1 = 3$

$$5. \quad a \equiv b \pmod{m} \text{ dan } c \equiv d \pmod{m} \quad \rightarrow \quad ac \equiv bd \pmod{m} \text{ [8] (S.M Fachruddin, 2007)}$$

Bukti:

Ada dua bilangan bulat k dan l sehingga $a - b = mk$ dan $c - d = ml$ dengan demikian $ca - cb = m(ck)$ dan $bc - bd = m(bl)$.

Maka $(ca - cb) + (bc - bd) = ac - bd = m(kc - lb)$.

Sehingga menghasilkan, $m \mid (ac - bd)$ Dengan demikian, $ac \equiv bd \pmod{m}$.

$$6. \quad a \equiv b \pmod{m} \rightarrow ac \equiv bc \pmod{mc} \text{ [8] (S.M Fachruddin, 2007)}$$

Bukti:

Jika $a \equiv b \pmod{m}$, maka $m \mid (a - b)$.

Ada bilangan bulat k sedemikian rupa $a - b = mk$ dan sebagai hasilnya $ac - bc = mc(k)$.

Sehingga $mc \mid (ac - bc)$ maka diperoleh $ac \equiv bc \pmod{mc}$.

Pada persamaan atau kesamaan bilangan bulat berlaku sifat kaselasi (penghapusan), yaitu: Misalkan a, b , dan c bilangan bulat, jika $ab = ac$, dengan $a \neq 0$, maka $b = c$.

Contoh :

Jika $3 \cdot x = 3 \cdot 6$, maka $x = 6$

Apakah pada kekongruenan berlaku sifat yang mirip dengan sifat kaselasi (penghapusan) tersebut?

Misalkan[4]^(Alwan Salwani, 2013) :

Jika $ab \equiv ac \pmod{m}$, dengan $a \neq 0$

apakah $b \equiv c \pmod{m}$?

Kita ambil sebuah contoh :

$$24 \equiv 12 \pmod{4}$$

$$3 \cdot 8 \equiv 3 \cdot 4 \pmod{4}$$

$$8 \equiv 4 \pmod{4}$$

Akan tetapi, bagaimana dengan contoh berikut :

$$24 \equiv 12 \pmod{4}$$

$$2 \cdot 12 \equiv 2 \cdot 6 \pmod{4}$$

Apakah $12 \equiv 6 \pmod{4}$? Jelas tidak, karena 4 tidak habis membagi $(12 - 6)$

Dari kedua contoh diatas, dapat disimpulkan bahwa walaupun sifat kaselasi (penghapusan) tidak berlaku sepenuhnya pada relasi kekongruenan, tetapi akan berlaku jika memenuhi syarat seperti yang dinyatakan dalam teorema berikut :

Teorema 4:

Jika $ac \equiv bc \pmod{m}$, dengan $(c, m) = 1$, , maka $a \equiv b \pmod{m}$ [4]^(Alwan Salwani, 2013)

Bukti :

Jika $ac \equiv bc \pmod{m}$, dengan $(c, m) = 1$, akan dibuktikan bahwa $a \equiv b \pmod{m}$.

$ac \equiv bc \pmod{m}$ berarti $m \mid (ac - bc)$ atau $m \mid c(a - b)$.

Karena $m \mid c(a - b)$, dengan $(c, m) = 1$, maka $m \mid (a - b)$

Hal ini berarti bahwa $a \equiv b \pmod{m}$. (**Terbukti**)

Contoh:

Tentukan bilangan-bilangan bulat y yang memenuhi $3y \equiv 1 \pmod{7}$.

Penyelesaian :

Karena $1 \equiv 15 \pmod{7}$, maka kita dapat mengganti 1 pada kongruen tersebut dengan 15, sehingga diperoleh : $3y \equiv 15 \pmod{7}$

Selanjutnya karena $(3, 7) = 1$, maka kita dapat membagi 3 pada kedua ruas-ruas tersebut, sehingga diperoleh : $y \equiv 5 \pmod{7}$ artinya $y \equiv 5 + 7k$ untuk setiap bilangan bulat k , atau dapat dikatakan bahwa himpunan penyelesaian dari kongruen tersebut adalah $\{5 + 7k \mid k \text{ bilangan bulat}\}$.

Kita dapat menghapus (melenyapkan) suatu faktor dari suatu kongruen, jika faktor tersebut dan bilangan modulonya saling prima, sebaliknya jika faktor dan bilangan modulonya tidak saling prima, maka kita harus mengganti bilangan modulonya seperti tampak dalam teorema berikut :

Teorema 5:

Jika $ac \equiv bc \pmod{m}$ dengan $(c, m) = d$, maka $a \equiv b \pmod{m/d}$ [4] (Alwan Salwani, 2013)

Bukti :

$ac \equiv bc \pmod{m}$ berarti $m \mid (ac - bc)$ atau $m \mid c(a - b)$,
maka $\frac{m}{d} \mid \frac{c}{d}(a - b)$.

Karena d FPB dari c dan m , maka $\frac{m}{d}$ dan $\frac{c}{d}$ adalah bilangan-bilangan bulat.

Karena $(c, m) = d$, maka $(\frac{m}{d}, \frac{c}{d}) = 1$.

Karena $(\frac{m}{d}, \frac{c}{d}) = 1$ dan $\frac{m}{d} \mid \frac{c}{d}(a - b)$,

maka :

$m/d \mid (a - b)$.

berarti $a \equiv b \pmod{\frac{m}{d}}$ (Terbukti)

Contoh :

1. Tentukan x yang memenuhi $2x \equiv 4 \pmod{6}$

Penyelesaian :

$2x \equiv 2 \cdot 2 \pmod{6}$, karena $(2, 6) = 2$, maka $x \equiv 2 \pmod{3}$ atau $x = 3k + 2$ untuk setiap bilangan bulat k .

Jadi, nilai-nilai x adalah $\{3k + 2\}$ atau dapat dikatakan bahwa himpunan penyelesaian dari kongruen itu adalah $\{3k + 2 \mid k \text{ bilangan bulat}\}$.

2. Tentukan nilai x dari $2x + 4 \equiv 2 \pmod{6}$

Penyelesaian :

$$2x + 4 \equiv 2 \pmod{6}$$

$$6 \mid 2x + 4 - 2 \rightarrow \exists k \in Z \rightarrow 2x + 2 = 6k$$

$$2x = 6k - 2 \text{ dibagi 2 jadi } x = 3k - 1$$

Untuk

$$k = 0 \rightarrow x = 3 \cdot 0 - 1 = -1$$

$$k = 1 \rightarrow x = 3 \cdot 1 - 1 = 2$$

$$k = 2 \rightarrow x = 3 \cdot 2 - 1 = 5$$

$$k = 3 \rightarrow x = 3 \cdot 3 - 1 = 8$$

Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa nilai x yakni $x \in \{-1, 2, 5, 8, \dots\}$

APLIKASI KEKONGRUENAN

Pada kegiatan belajar ini kita akan mempelajari penggunaan pengertian dan sifat-sifat kekongruenan itu. Sesungguhnya persoalan kongruensi seringkali muncul dalam kehidupan sehari-hari. Sebagai contoh kerja arloji menggunakan modulo 12 untuk jam, menggunakan modulo 60 untuk menit dan detik; kerja kalender menggunakan modulo 7 untuk hari-hari dalam satu minggu, menggunakan modulo 5 untuk “pasaran” (*Pon, Wage, Kliwon, Legi, Pahing*), dan menggunakan modulo 12 untuk bulan-bulan dalam satu tahun.

Kekongruenan bilangan modulo 9 dapat digunakan untuk memeriksa kebenaran perkalian dan penjumlahan bilangan-bilangan bulat. kita ketahui bahwa[4](Alwan Salwani, 2013):

$$10000 - 1 = 9999 = 9K_1 \text{ Sehingga } 10000 = 1 \pmod{9}$$

$$1000 - 1 = 999 = 9K_2 \text{ Sehingga } 1000 = 1 \pmod{9}$$

$$100 - 1 = 99 = 9K_3 \text{ Sehingga } 100 = 1 \pmod{9}$$

$$10 - 1 = 9 = 9K_4 \text{ Sehingga } 10 = 1 \pmod{9}$$

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa setiap bilangan bulat kongruen dengan jumlah angka-angkanya.

Contoh[4] (Alwan Salwani, 2013) :

$$\begin{aligned} \text{a. } 8234 &= 8000 + 200 + 30 + 4 \pmod{9} \\ &= 8(1000) + 2(100) + 3(10) + 4 \pmod{9} \\ &= 8(1) + 2(1) + 3(1) + 4 \pmod{9} \\ 8234 &= 17 \pmod{9} \end{aligned}$$

Selanjutnya dengan cara yang sama :

$$\begin{aligned} \text{b. } 17 &= 10 + 7 \pmod{9} \\ &= 1 + 7 \pmod{9} \\ &= 8 \pmod{9} \end{aligned}$$

sehingga dapat disimpulkan bahwa $8234 = 8 \pmod{9}$

Uraian contoh soal diatas secara umum dinyatakan sebagai teorema-teorema berikut :

Teorema 6

$$10^n = 1 \pmod{9} \text{ untuk } n = 0,1,2,3 \dots [4] \text{ (Alwan Salwani, 2013)}$$

Teorema 7

Setiap bilangan bulat kongruen modulo 9 dengan jumlah angka-angkanya [4] (AlwanSalwani, 2013).

Contoh :

Periksalah kebenaran penjumlahan berikut ini dengan prinsip diatas.

$$248 + 324 + 627 = 1244$$

Penyelesaian :

$$248 \equiv 2 + 4 + 8 \pmod{9}$$

$$\equiv 14 \pmod{9}$$

$$\equiv 5 \pmod{9}$$

$$324 \equiv 3 + 2 + 4 \pmod{9}$$

$$\equiv 9 \pmod{9}$$

$$\equiv 0 \pmod{9}$$

$$627 \equiv 6 + 2 + 7 \pmod{9}$$

$$\equiv 15 \pmod{9}$$

$$\equiv 6 \pmod{9}$$

$$\text{Jadi, } 248 + 324 + 627 \equiv 5 + 0 + 6 \pmod{9}$$

$$\equiv 11 \pmod{9}$$

$$\equiv 2 \pmod{9} \dots\dots\dots (i)$$

$$\text{sedangkan } 1244 \equiv 1 + 2 + 4 + 4 \pmod{9}$$

$$\equiv 11 \pmod{9}$$

$$\equiv 2 \pmod{9} \dots\dots\dots (ii)$$

Dari kekongruenan (i) dan (ii) berarti : $248 + 324 + 627 = 1244$

(benar)

C. LATIHAN SOAL

a) Soal Pilihan Ganda

1. Sisa hasil bagi $9^{42} - 5^{42}$ oleh 7 adalah ...
 - a. 0
 - b. 2
 - c. 1
 - d. 3
 - e. 5
2. Sisa perkalian bagi $4^{18} \cdot 9^{80}$ oleh 9 adalah ...
 - a. 1
 - b. 3
 - c. 5
 - d. 7
 - e. 9
3. Banyak bilangan bulat diantara 1.000 dan 3.000 yang kongruen terhadap 5 (mod 7) adalah
 - a. 280
 - b. 284
 - c. 282
 - d. 285
 - e. 290
4. Jika $8^{79} \equiv x \pmod{5}$ dan $0 \leq x \leq 4$, maka nilai x adalah ...
 - a. 0
 - b. 1
 - c. 2
 - d. 3
 - e. 4
5. Sisa hasil bagi $(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 99^2)$ oleh 9 adalah
 - a. 1
 - b. 3
 - c. 5
 - d. 7
 - e. 9

b) Soal Uraian

1. Martha menuliskan senyawa glukosa ($C_6H_{12}O_6$) berulang kali: $C_6H_{12}O_6C_6H_{12}O_6\dots$ ”. Huruf atau angka yang dituliskan Martha pada urutan ke- 2^{2020} adalah
2. Tentukan nilai kebenaran masing-masing pernyataan berikut.
 - a. $76 \equiv -152 \pmod{3}$
 - b. $721 \equiv -484 \pmod{5}$
 - c. $118 \equiv 25 \pmod{13}$
3. Nyatakan benar atau salah pernyataan berikut ini.
 - a. $73 + 89 \equiv (3 + 9)^2 \pmod{10}$
 - b. $93 - 47 \equiv (3 - 2) \pmod{9}$
 - c. $403 + 497 \equiv (3 + 7) \pmod{8}$
4. Carilah semua bilangan bulat di antara -100 dan 100 yang merupakan $5 \pmod{9}$.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Handayanto Agung. Peranan Sistem Modulo Dalam Penentuan Hari Dan Pasaran. (Diakses Januari 2021)
<https://media.neliti.com/media/publications/176777-ID-peranan-sistem-modulo-dalam-penentuan-ha.pdf>
- [2] Trisnawati Fitri. Kongruensi. (Diakses Januari 2020)
https://www.academia.edu/17344205/K_ONGRUENSI
- [3] Sansani Sesiika. 2008. Penggunaan Aritmetika Modulo dan Balikan Modulo pada Modifikasi Algoritma Knapsack. *Makalah*. Jurusan Teknik Informatika ITB, Bandung. (Diakses Januari 2021).
<https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/Matdis/20082009/Makalah2008/Makalah0809-078.pdf>
- [4] Alwan Salwani. 2013. Kekongruenan dan Aplikasinya. (Diakses Januari 2021). <http://salwani-alwan.blogspot.com/2013/07/kekongruenan-dan-aplikasinya.html>
- [5] Sukardi. 2020. Materi, Soal, dan Pembahasan Kongruensi Modulo. (Diakses Januari 2021)
<https://mathcyber1997.com/materi-soal-dan-pembahasan-kongruensi-modulo/>
- [6] Ramadha Anwar. 2016. Penerapan aritmatika modulo pada algoritma luhn untuk validasi nomor seri imei dan kartu kredit. *Makalah if2120 matematika diskrit*. (Diakses Januari

2021).

<https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/Matdis/2015-2016/Makalah-Matdis-2015/Makalah-IF2120-2015-032.pdf>

- [7] Munir Rinaldi. 2004. *Bahan Kuliah Ke-3 Teori Bilangan (Number Theory)*. Departemen Teknik Informatika Institut Teknologi Bandung.
- [8] S M. Fachruddin. 2007. *Teori Bilangan*. FKIP Universitas Bengkulu
- [9] Raji Wissam. Tanpa Tahun. *An Introductory Course In Elementary Number Theory*.

BAB VI
KONGRUENSI PADA BILANGAN BULAT
(TEOREMA 2 BILANGAN BULAT POSITIF)
(Oleh : Yana Royana)

A. PENDAHULUAN

Kongruensi merupakan bahasa teori bilangan. Kongruensi ini diperkenalkan dan dikembangkan oleh Karl Frierich Gauss, Matematisi paling terkenal dalam sejarah, pada awal abad sembilan belas. Sehingga sering disebut sebagai Pangeran Matematisi (*The Prince of Mathematicians*). Meskipun Gauss tercatat karena temuannya di dalam geometri, aljabar, analisis, astronomi, dan fisika matematika, ia mempunyai minat khusus di dalam teori bilangan dan mengatakan bahwa “ *Mathematics is the queen of sciences, and the theory of numbers is the queen of mathematics*”. Gaus merintis untuk meletakkan teori bilangan modern di dalam bukunya “*Disquistiones Arithmeticae*” pada tahun 1801. [1] (Muhsetyo, 2017)

Secara tidak langsung kongruensi sudah dibahas sebagai bahan matematika di sekolah dalam bentuk bilangan jam atau bilangan bersisa. Peragaan dengan menggunakan tiruan jam di padang bermanfaat karena peserta didik akan langsung praktek untuk lebih mengenal adanya sistem bilangan yang berada yaitu sistem bilangan bulat pada jam, seperti pada bilangan jam

terdapat bilangan 2, 3, 4, 5, dan seterusnya. [1] (Muhsetyo, 2017)

B. PEMBAHASAN

Teorema 2. Misalkan m adalah bilangan bulat positif. [2] (Munir, 2004)

1. Jika $a \equiv b(\text{mod } m)$ dan c adalah sembarang bilangan bulat maka:

- (i) $(a + c) \equiv (a + c)(\text{mod } m)$
- (ii) $ac \equiv bc(\text{mod } m)$
- (iii) $a^p \equiv b^p(\text{mod } m)$ untuk suatu bilangan bulat tak negatif p .

Bukti:

- Untuk Bukti pada Point (1) bagian (ii) dapat dibuktikan dengan:

$ac \equiv bc(\text{mod } m)$ berarti:

$$\Leftrightarrow a = b + km$$

$$\Leftrightarrow a - b = km$$

$$\Leftrightarrow (a - b)c = ckm$$

$$\Leftrightarrow ac = bc + Km$$

$$\Leftrightarrow ac = bc(\text{mod } m)$$

2. Jika $a \equiv b(\text{mod } m)$ dan $c \equiv d(\text{mod } m)$, maka:

- (i) $(a + c) \equiv (b + d)(\text{mod } m)$
- (ii) $ac \equiv bd(\text{mod } m)$

Bukti:

- Untuk bukti pada point 2 bagian (i) dapat dibuktikan dengan:

$$a \equiv b(\text{mod } m) \Leftrightarrow a = b + k_1m$$

$$c \equiv d(\text{mod } m) \Leftrightarrow c = d + k_2m$$

$$\Leftrightarrow (a + c) = (b + d) + (k_1 + k_2)m$$

$$\Leftrightarrow (a + c) = (b + d) + km \quad (k = k_1 + k_2)$$

$$\Leftrightarrow (a + c) = (b + d)(\text{mod } m)$$

Contoh:

1. Misalkan $17 \equiv 2(\text{mod } 3)$ dan $10 \equiv 4(\text{mod } 3)$

Menurut Teorema 2, maka:

$$17 + 5 = 2 + 5(\text{mod } 3) \Leftrightarrow 22 = 7(\text{mod } 3)$$

$$17 \cdot 5 = 5 \cdot 2 (\text{mod } 3) \Leftrightarrow 85 = 10 (\text{mod } 3)$$

$$17 + 10 = 2 + 4 (\text{mod } 3) \Leftrightarrow 27 = 6(\text{mod } 3)$$

$$17 \cdot 10 = 2 \cdot 4 (\text{mod } 3) \Leftrightarrow 170 = 8 (\text{mod } 3)$$

- Dapat diperhatikan bahwa Teorema 2 tidak dapat memasukan operasi pembagian pada aritmerika modulo karena jika kedua ruas dibagi dengan bilangan bulat, maka kekongruenan tidak selalu dipenuhi. Misalnya:
 - (i) $10 \equiv 4(\text{mod } 3)$ dapat dibagi dengan 2 karena $10 / 2 = 5$ dan $4 / 2 = 2$, sehingga $5 \equiv 2 (\text{mod } 3)$
 - (ii) $14 \equiv 8 (\text{mod } 6)$ tidak dapat dibagi dengan 2, karena $14 / 2 = 7$ dan $8 / 2 = 4$, tetapi $7 \not\equiv 4(\text{mod } 6)$.

Teorema 2.1 [3] (Raji, 2016)

Jika a, b, c dan d merupakan bilangan bulat. Maka m adalah bilangan bulat positif. Maka:

1. Jika $a \equiv b \pmod{m}$, maka $b \equiv a \pmod{m}$

Bukti:

Jika $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow m|(a - b)$

jika ada bilangan bulat k seperti itu $a - b = mk$,

Maka $b - a = m(-k)$ dan $m|(b - a)$. Karena itu $b \equiv a \pmod{m}$.

2. Jika $a \equiv b \pmod{m}$ dan $b \equiv c \pmod{m}$, maka $a \equiv c \pmod{m}$

Bukti:

Sejak $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow m|(a - b)$.

Juga $b \equiv c \pmod{m} \Rightarrow m|(b - c)$.

Akibatnya keluar bilangan bulat k dan l

sehingga: $a = b + mk$ dan $b = c + ml$,

menyiratkan $a = c + m(k + l)$ memberikan $a \equiv c \pmod{m}$.

3. Jika $a \equiv b \pmod{m}$ maka $a + c \equiv b + c \pmod{m}$

Bukti:

Sejak $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow m|(a - b)$.

Jadi jika kita menambah dan mengurangi c

kita dapatkan $m | ((a + b) - (b + c))$ dan $a + c \equiv b + c \pmod{m}$.

4. Jika $a \equiv b \pmod{m}$ maka $a - c \equiv b - c \pmod{m}$

Bukti:

Sejak $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow m | (a - b)$.

Jadi jika kita menambah dan mengurangi c ,

kita dapatkan $m | ((a - c) - (b - c))$ dan $a - c \equiv b - c \pmod{m}$.

5. Jika $a \equiv b \pmod{m}$ maka $ac \equiv bc \pmod{m}$

Bukti:

Jika $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow m | (a - b)$ jika ada bilangan bulat k sedemikian rupa $a - b = mk$ dan sebagai hasil $ac - bc = m(kc)$.

Jadi $m | (ac - bc)$ dan $ac \equiv bc \pmod{m}$.

6. Jika $a \equiv b \pmod{m}$, maka $ac \equiv bc \pmod{mc}$, untuk $c > 0$.

Bukti:

Jika $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow m | (a - b)$. jika ada bilangan bulat k sedemikian rupa $a - b = mk$ dan sebagai hasil $ac - bc = mc(k)$.

Jadi $mc | (ac - bc)$ dan $ac \equiv bc \pmod{mc}$

7. Jika $a \equiv b \pmod{m}$ dan $c \equiv d \pmod{m}$ maka $a + c \equiv (b + d) \pmod{m}$

Bukti:

Jika $a \equiv b \pmod{m}$, maka $m \mid (a - b)$.

Sehingga $c \equiv d \pmod{m}$, maka $m \mid (c - d)$. Akibatnya ada dua bilangan bulat K dan l sehingga keluar $a - b = mk$ dan $c - d = ml$. Sehingga:

$$(a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d) = m(k + l)$$

Maka:

$$m \mid ((a + c) - (b + d))$$

Menjadi:

$$a + c \equiv b + d \pmod{m}$$

8. Jika $a \equiv b \pmod{m}$ dan $c \equiv d \pmod{m}$ maka $a - c \equiv (b - d) \pmod{m}$

Bukti:

Jika $a = b + mk$ dan $c = d + ml$, dimana k dan l adalah bilangan bulat, sehingga:

$$(a - b) - (c - d) = (a - c) - (b - d) = m(k - l)$$

Maka:

$$m \mid ((a - c) - (b - d))$$

Menjadi:

$$a - c \equiv b - d \pmod{m}$$

9. Jika $a \equiv b \pmod{m}$ dan $c \equiv d \pmod{m}$ maka $ac \equiv bd \pmod{m}$

Bukti:

Ada keluar dua bilangan bulat k dan l sehingga $a - b = mk$ dan $c - d = ml$ dan $ca - cb = m(ck)$ dan $bc - bd = m(bl)$. Sehingga:

$$m \mid (ac - bd)$$

Maka:

$$ac \equiv bd \pmod{m}$$

Contoh:

1. Jika $14 \equiv 8 \pmod{6}$ maka $8 \equiv 14 \pmod{6}$
2. Jika $22 \equiv 10 \pmod{6}$ dan $10 \equiv 4 \pmod{6}$. Sehingga $22 \equiv 4 \pmod{6}$.
3. Jika $50 \equiv 20 \pmod{15}$, maka $50 + 5 = 55 \equiv 20 + 5 = 25 \pmod{15}$.
4. Jika $50 \equiv 20 \pmod{15}$, maka $50 - 5 = 45 \equiv 20 - 5 = 15 \pmod{15}$.
5. Jika $19 \equiv 16 \pmod{3}$, maka $2(19) = 38 \equiv 2(16) = 32 \pmod{3}$.
6. Jika $19 \equiv 16 \pmod{3}$, maka $2(19) = 38 \equiv 2(16) - 32 \pmod{2(3)} = 6$
7. Jika $19 \equiv 3 \pmod{8}$ dan $17 \equiv 9 \pmod{8}$, maka $19 + 17 = 36 \equiv 3 + 9 = 12 \pmod{8}$
8. Jika $19 \equiv 3 \pmod{8}$ dan $17 \equiv 9 \pmod{8}$, maka $19 - 17 = 2 \equiv 3 - 9 = -6 \pmod{8}$

9. Jika $19 \equiv 3 \pmod{8}$ dan $17 \equiv 9 \pmod{8}$
 maka $19(17) = 323 \equiv 3(9) = 27 \pmod{8}$

Kekongruenan Pada Bilangan Bulat [4] (Musthofa, 2011)

Misalkan a dan b adalah bilangan bulat. Jika m suatu bilangan bulat positif yang lebih besar dari 1, maka a dikatakan kongruen dengan b modulo m (ditulis $a \equiv b \pmod{m}$) jika m membagi habis $(a - b)$.

Atau $a \equiv b \pmod{m}$ jika a dan b memberikan sisa yang sama bila dibagi oleh m .

Contoh:

1. Buktikan bahwa $(am + b)^n \equiv b^n \pmod{m}$

Bukti:

Akan dibuktikan ada k sedemikian sehingga $(am + b)^n - b^n = km$.

$$\begin{aligned} (am + b)^n - b^n &= (am) + n(am).b^{n-1} + \dots + \\ &\quad n(am)b^{n-1} + b^n - b^n \\ &= \{a(am)^{n-1} + an(am)^{n-2} + \dots + \\ &\quad an(b)^{n-1}\}m = km \end{aligned}$$

Cara di atas dapat digunakan untuk menentukan sisa pembagian bilangan yang cukup besar.

2. Tentukan sisa jika 3^{1990} jika dibagi 41.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}3^{1990}(\text{mod } 41) &\equiv 3^{4 \times 497 + 2}(\text{mod } 41) \\ &\equiv (3^4)^{497} \times 3^2(\text{mod } 41) \\ &\equiv (2 \times 41 - 1)^{479} \times 9(\text{mod } 41) \\ &\equiv -9(\text{mod } 41) \\ &\equiv (41 - 9)(\text{mod } 41) \\ &\equiv 32(\text{mod } 41)\end{aligned}$$

Jadi sisa 3^{1990} dibagi oleh 41 adalah 32.

3. Tentukan angka terakhir dari 777^{333} .

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}777^{333} &\equiv (77 \times 10 + 7)^{333}(\text{mod } 10) \\ &\equiv 7^{333}(\text{mod } 10) \\ &\equiv 7^{2 \times 166 + 1}(\text{mod } 10) \\ &\equiv (7^2)^{166} \times 7(\text{mod } 10) \\ &\equiv 9^{2 \times 83} \times 7(\text{mod } 10) \\ &\equiv (81)^{83} \times 7(\text{mod } 10) \\ &\equiv 1^{83} \times 7(\text{mod } 10) \\ &\equiv 7(\text{mod } 10)\end{aligned}$$

Jadi angka terakhir dari 777^{333} adalah 7.

4. Tentukan dua angka terakhir dari bilangan 3^{2002} ! [5] (Sari, 2016)

Penyelesaian:

Menentukan dua angka terakhir dari bilangan 3^{2002} sama dengan mencari sisa pembagian 3^{2002} oleh 100.

$$\begin{aligned}3^{2002} &= (3^{5 \times 400 + 2}) = (3^5)^{400} 3^2 = (243)^{400} \cdot 9 \\ &= (43)^{400} \times 9(\text{mod } 100) \\ &= (1849)^{200} \times 9(\text{mod } 100) \\ &= (49)^{200} \times 9(\text{mod } 100) \\ &= (2401)^{100} \times 9(\text{mod } 100) \\ &= (1)^{100} \times 9(\text{mod } 100) \\ &= 9(\text{mod } 100)\end{aligned}$$

Jadi 2 angka terakhir dari 3^{2002} adalah 09.

C. LATIHAN SOAL

Latihan 1: [6] (Karunila, 2017)

1. Diketahui p, q, m adalah bilangan-bilangan bulat dan $m > 0$ sedemikian sehingga $p \equiv q(\text{mod } m)$. Buktikan $(p, m) = (q, m)$.
2. Buktikan:
 - (a) Jika P adalah suatu bilangan genap, maka $p^2 \equiv 0(\text{mod } 4)$
 - (b) Jika P adalah suatu bilangan ganjil, maka $p^2 \equiv 1(\text{mod } 4)$

3. Buktikan jika p adalah suatu bilangan ganjil, maka $p^2 \equiv 1 \pmod{8}$
4. Carilah sisa positif terkecil dari $1! + 2! + \dots + 100!$
 - a. Modulo 2
 - b. Modulo 12

5. Tunjukkan bahwa jika n adalah suatu bilangan genap positif, maka:

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n + 1) \equiv 0 \pmod{n}$$

Bagaimana jika n adalah suatu bilangan ganjil positif?

6. Dengan menggunakan induksi matematika, tunjukkan bahwa $4^n \equiv 1 + 3n \pmod{9}$. Jika n adalah suatu bilangan bulat positif.
7. Berapa digit satuan dari: [7] (Didit, Nugroho, 17)

$$\left\lfloor \frac{10^{20000}}{10^{100} + 3} \right\rfloor = \dots$$

8. Apakah 4^{300} dapat dibagi 3?
9. Tentukan bilangan-bilangan kuadrat sempurna di modulo 13.
10. Buktikan bahwa $7(2222^{5555} + 5555^{2222})$.

Latihan 2: [8] (Marwati, 2008)

1. Buktikan:

$$(a) \ a \equiv b \pmod{n}, m \mid n \Rightarrow a \equiv b \pmod{m}$$

$$(b) \ a \equiv b \pmod{n}, c > 0 \Rightarrow ca \equiv cb \pmod{n}$$

$$(c) a \equiv b \pmod{n}, a, b, n \text{ dapat dibagi oleh } d > 0 \Rightarrow \frac{a}{d} \equiv \frac{b}{d} \pmod{\frac{n}{d}}$$

2. Berikan contoh yang memperlihatkan bahwa $a^2 \equiv b^2 \pmod{n}$ tidak mengakibatkan $a \equiv b \pmod{n}$.
3. Berikan contoh yang memperlihatkan bahwa $a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow \text{ppb}(a, n) = \text{ppb}(b, n)$
4. Tentukan sisanya jika 2^{50} dan 4^{65} dibagi oleh 7.
5. Berapakah sisanya jika $1^5 + 2^5 + \dots + 100^5$ dibagi oleh 4?
6. Buktikan:
 - (a) a ganjil $\Rightarrow a^2 \equiv 1 \pmod{8}$
 - (b) $\forall a \in \mathbb{Z} \Rightarrow a^3 \equiv 0, 1 \text{ atau } 8 \pmod{9}$
 - (c) $a \in \mathbb{Z}, a$ tidak dapat dibagi atau 3 $\Rightarrow a^2 \equiv 1 \pmod{24}$
7. Buktikan $89(2^{44} - 1)$ dan $97(2^{48} - 1)$
8. Buktikan:
 - (a) $ab \equiv cd \pmod{n}$ dan $b \equiv d \pmod{n}$,
dengan $\text{ppb}(b, n) = 1 \Rightarrow a \equiv c \pmod{n}$
 - (b) $a \equiv b \pmod{n}$ dan $a \equiv c \pmod{n_2}, \Rightarrow b \equiv c \pmod{n}$,
dengan $n \equiv \text{ppb}(n_1, n_2)$

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Mahsetyo, Gatot. 2017. Modul 3 Kongruensi. Published on Apr 17th 2017.
- [2] Munir, Renaldi. 2004. *Teori Bilangan (Number Theory)*. Departement Teknik Informatika Institut Teknologi Bandung.
- [3] Raji, Wissam. 2016. An Introductory Course in Elementary Number Theory. Published August 18th 2016 by Lulu.com
- [4] Musthofa. 2011. Teori Bilangan. Yogyakarta: Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Yogyakarta.
- [5] Sari, Kartika. 2016. Teori Bilangan. Bali: Universitas Udayana.
- [6] Karunila, Acika. 2017. Teori Bilangan. Published on Apr 17th 2017.
- [7] Didit, Nugroho. 2017. Teori Bilangan. Solo: Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Matematika Universitas Kristen Satya Wacana.
- [8] Marwati, Rini. 2008. Teori Bilangan pada Kongruensi. Bandung: Universitas Pendidikan Indonesia.

BAB VII

BALIKAN MODULO (MODULO *INVERS*)

(Oleh : Sasmita Mutiara)

A. PENDAHULUAN

Dalam matematika, istilah modulo (sehubungan dengan modulus dalam bahasa latin yang berarti “ukuran kecil”) sering digunakan untuk menyatakan bahwa dua objek matematika yang berbeda dapat dianggap setara, jika perbedaannya adalah diperhitungkan dengan faktor tambahan. [2]

Modulo pada awalnya diperkenalkan kedalam matematika dalam konteks aritmatika modular oleh **Carl Friedrich Gauss** pada tahun 1801. Pada awalnya **Gauss** menggunakan “modulo” untuk mengingat bilangan bulat a , b , dan n , dilambangkan dengan $a \equiv b \pmod{n}$ (dibaca “ a kongruen dengan b modulo n ”) berarti $a - b$ adalah kelipatan bilangan bulat dari n , atau ekuivalen, a dan b keduanya meninggalkan sisa yang sama jika dibagi dengan n . sebagai contoh 13 kongruen dengan 63 modulo 10 Maksudnya $13 - 63$ adalah kelipatan 10 (setara, 13 dan 63 berbeda dengan kelipatan 10). [2]

Dapat disimpulkan bahwa modulo atau modulus adalah sisa dari hasil bagi pada bilangan bulat. Modulo atau fungsi mod jarang digunakan dalam sekolah, biasanya fungsi mod ini dipakai dalam bahasa pemrograman. Modulo ini berguna untuk

menentukan sisa dari pembagian suatu bilangan. (bisa juga untuk menentukan digit satuan, 2 digit terakhir, 3 digit terakhir, dll).

Misalkan a adalah bilangan bulat dan m adalah bilangan bulat > 0 . Operasi $a \bmod m$ (dibaca “ a modulo m ”) memberikan sisa jika a dibagi dengan m . Notasi: $a \bmod m = r$ sedemikian sehingga $a = mq + r$, dengan $0 \leq r < m$. Bilangan m disebut modulus atau modulo, dan hasil aritmetika modulo m terletak di dalam himpunan $\{0, 1, 2, \dots, m-1\}$. [4]

Didalam Aritmatika Modulo ada juga dua unsur lain yang menjadi bagian dari modulo yaitu kongruen modulo dan balikan modulo atau modulo invers [1]. Balikan Modulo memiliki Konsep mirip dengan konsep aritmatika di bilangan rill, Balikan sebuah bilangan yang tidak nol adalah bentuk pecahannya sedemikian sehingga hasil perkalian keduanya sama dengan 1. Jika a adalah sebuah bilangan tidak-nol, maka balikannya adalah $1/a$ sedemikian sehingga $a \times 1/a = 1$. Balikan a dilambangkan dengan a^{-1} . [5]

Contoh : inversi 4 adalah $\frac{1}{4}$, sebab $4 \times \frac{1}{4} = 1$. [5]

B. PEMBAHASAN

Kongruensi $ax \equiv b \pmod{m}$ memiliki solusi unik jika $(a, m) = 1$. Ini akan memungkinkan kita untuk berbicara tentang invers modular. Solusi untuk kongruensi $ax \equiv 1 \pmod{m}$ untuk $(a, m) = 1$ disebut sebagai *invers modular* dari sebuah modulo m . Kita menunjukkan solusi seperti a . [7]

Contoh 1

Pembalikan modular dari 7 modulo 48 adalah 7. Perhatikan bahwa solusi untuk $7x \equiv 1 \pmod{48}$ adalah $x \equiv 7 \pmod{48}$. [7]

Jika a dan m relatif prima dan $m > 1$, relative prima berarti memiliki FPB (Faktor Persekutuan Terbesar), atau PBB (Pembagi Bersama Terbesar) yang bernilai 1 [5].

Maka kita dapat menemukan balikan (*invers*) dari a modulo m . balikan dari a modulo m adalah bilangan-bilangan bulat a sedemikian sehingga $xa \equiv 1 \pmod{m}$. Dalam notasi $a^{-1} \pmod{m} = x$ [3] (Munir,2004)

Bukti:

a dan m relatif prima, jadi $\text{PBB}(a, m) = 1$,

(dan kita ingat bahwa PBB 2 bilangan bulat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari kedua bilangan bulat tersebut sehingga 1 dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear a dan m yaitu terdapat bilangan bulat p dan q sedemikian)

sehingga : $pa + qm = 1$

persamaan ini mengimplikasikan bahwa

$$pa + qm \equiv 1 \pmod{m}$$

Karena $qm \equiv 0 \pmod{m}$, kenapa?

Karena m habis membagi $qm - 0$, $qm - 0 = qm$ berarti m habis membagi qm .

Karena $qm \equiv 0$ maka yang tersisa hanya :

$$pa \equiv 1 \pmod{m}$$

Kekongruenan yang terakhir ini berarti bahwa p adalah balikan dari a modulo m . [3] (Munir,2004)

Pembuktian di atas juga menceritakan bahwa untuk mencari balikan dari a modulo m , kita harus membuat kombinasi linier dari a dan m sama dengan 1. Koefisien a dari kombinasi linier tersebut merupakan balikan dari a modulo m . [1]

Koefisien a dari kombinasi linier tersebut merupakan balikan dari a modulo m . [6]

Cara lain dalam menentukan invers modulo [5]

Jika ditanya : balikan atau invers dari $a \pmod{m}$

Maka kita gunakan permisalan berikut :

Misalkan x adalah balikan dari $a \pmod{m}$,

maka $ax \equiv 1 \pmod{m}$ (definisi balikan modulo)

atau dalam notasi 'sama dengan'

$$ax = 1 + km$$

atau

$$x = (1 + km)/a$$

kita misalkan jika untuk $k = 0, 1, 2, \dots$ dan $k = -1, -2, \dots$

Dimana :

x = inversnya

k = angka permisalan

m = nilai modulo

Solusi dari inversnya adalah semua bilangan bulat yang memenuhi, dan bukan berupa pecahan.

Contoh 2

Tentukan balikan dari 4 (mod 9), 17 (mod 7), dan 18 (mod 10).

[3] (Munir, 2004)

Penyelesaian:

(a) Karena $\text{PBB}(4, 9) = 1$, maka balikan dari 4 (mod 9) ada. Dari algoritma Euclidean diperoleh bahwa

$$9 = 4 \cdot 2 + 1$$

Susun persamaan di atas menjadi

$$-2 \times 4 + 1 \times 9 = 1$$

Dari persamaan terakhir ini kita peroleh -2 adalah balikan dari 4 modulo 9. Periksalah bahwa

$$2 \times 4 \equiv 1 \pmod{9} \quad (9 \text{ habis membagi } -2 \times 4 - 1 = -9)$$

(b) $\text{PBB}(17, 7) = 1$, maka balikan dari 17 (mod 7) ada. Dari algoritma Euclidean diperoleh rangkaian pembagian berikut:

$$17 = 2 \times 7 + 3 \quad (\text{i})$$

$$7 = 2 \times 3 + 1 \quad (\text{ii})$$

$$3 = 3 \times 1 + 0 \quad (\text{iii}) \quad (\text{yang berarti: } \text{PBB}(17, 7) = 1)$$

Susun (ii) menjadi:

$$1 = 7 - 2 \cdot 3$$

Susun (i) menjadi

$$3 = 17 - 2 \times 7 \quad (\text{v})$$

Substitusikan (v) ke dalam (iv):

$$1 = 7 - 2 \times (17 - 2 \times 7) = 1 \times 7 - 2 \times 17 + 4 \times 7 = 5 \times 7 - 2 \times 17$$

Atau

$$-2 \times 17 + 5 \times 7 = 1$$

Dari persamaan terakhir ini kita peroleh -2 adalah balikan dari 17 modulo 7 .

$$-2 \times 17 \equiv 1 \pmod{7} \quad (7 \text{ habis membagi } -2 \times 17 - 1 = -35)$$

(c) Karena $\text{PBB}(18, 10) = 2 \neq 1$, maka balikan dari $18 \pmod{10}$ tidak ada.

Contoh 3

Tentukan balikan modulo dari 9 modulo 11 [6]

Penyelesaian :

$\text{PBB}(9,11) = 2$, maka balikan dari $9 \pmod{11}$ ada. Dari algoritma Euclidean diperoleh bahwa :

$$11 = 1 \times 9 + 2$$

Susun persamaan diatas menjadi :

$$-1 \times 9 + 2 \times 11 = 13$$

Dari persamaan terakhir ini kita peroleh -1 adalah balikan dari 9 modulo 11 . Periksalah bahwa :

$$-1 \times 9 \equiv 2 \pmod{11} \quad (11 \text{ habis membagi } -1 \times 9 - 2 = -11)$$

C. LATIHAN SOAL

1. Tentukan Invers dari a modulo m dengan $a = 178$ dan $m = 62$.
2. Tentukan invers dari modulo berikut :
 - a. $13 \pmod{23}$
 - b. $21 \pmod{53}$
 - c. $7x \equiv 1 \pmod{31}$
 - d. $7x \equiv 22 \pmod{31}$
3. Buktikan bahwa, Balikan dari $4 \pmod{9}$ adalah x sedemikian sehingga $4x \equiv 1 \pmod{9}$
4. tentukan semua balikan dari $9 \pmod{11}$

DAFTAR PUSTAKA

- [1] <https://ayusasmitaweb.wordpress.com/2016/08/27/makalah-aritmetika-modulo/>
[Diakses 11 Januari 2021]
- [2] [https://en.wikipedia.org/wiki/Modulo_\(mathematics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Modulo_(mathematics)) [Diakses 10 Januari 2021]
- [3] Munir, Rinaldi. 2004. Departemen Teknik Informatika Institut Teknologi Bandung. Bandung
- [4] <http://repository.uinsu.ac.id/4464/1/DIKTAT.pdf> [Diakses 11 Januari 2021]
- [5] <https://yanadwi.wordpress.com/2016/08/15/invers-modulo/>
[Diakses 10 Januari 2021]
- [6] <https://docplayer.info/34077943-Matematika-diskret-bilangan-instruktur-ferry-wahyu-wibowo-s-si-m-cs-teori-bilangan.html>
[Diakses 10 Januari 2021]
- [7] Raji, Wissam. 2016. An Introductory Course in Elementary Number Theory. Published August 18th 2016 by Lulu.com

BAB VIII
LINEAR CONGRUENCES
(KONGRUENSI LINEAR)

(Oleh : Linda Yeka Juliani)

A. PENDAHULUAN

Kongruensi diperkenalkan dan dikembangkan oleh Karl Friedrich Gauss, matematisi paling terkenal dalam sejarah pada awal abad Sembilan belas. Ia sering disebut sebagai Pangeran Matematisi (*The Prince of Mathematicians*). Membahas tentang kongruensi berarti bicara mengenai keterbagian. Konsep keterbagian dan sifat-sifatnya merupakan pengkajian secara lebih dalam mengenai konsep kongruensi. Sehingga kongruensi merupakan cara lain untuk mengkaji keterbagian dalam himpunan bilangan bulat. Sedangkan untuk system kongruensi linier merupakan suatu system yang terdiri lebih dari satu kongruensi.

Kongruensi linear merupakan bahasan yang berkaitan dengan aljabar (biasa), kongruensi linier serupa dengan persamaan linier, tetapi dengan semesta pembicaraan himpunan bilangan modulo. Meskipun demikian, terdapat banyak uraian dalam kongruensi linier yang memerlukan pemahaman yang berbeda dengan persamaan linier, misalnya terkait dengan banyaknya penyelesaian, yaitu kongruensi linier dapat tidak mempunyai penyelesaian, dan mempunyai satu atau lebih penyelesaian.

Dalam laporan ini akan membahas tentang kongruensi linier yang akan menguraikan tentang sifat-sifat dasar kongruensi linier dan penyelesaiannya.

B. PEMBAHASAN

Kongruensi Linear

Kongruensi mempunyai beberapa sifat yang sama dengan persamaan dalam Aljabar. Dalam Aljabar, masalah utamanya adalah menentukan akar-akar persamaan yang dinyatakan dalam bentuk $f(x) = 0$, $f(x)$ adalah polinomial. Demikian pula halnya dengan kongruensi, permasalahannya adalah menentukan bilangan bulat x sehingga memenuhi kongruensi [6]

$$f(x) \equiv 0 \pmod{m}$$

Definisi 4.1 [6]

Jika $r_1, r_2, r_3, \dots, r_m$ adalah suatu sistem residu lengkap modulo m . Banyaknya selesaian dari kongruensi $f(x) \equiv 0 \pmod{m}$ adalah banyaknya r_1 sehingga $f(r_1) \equiv 0 \pmod{m}$

Contoh:

1. Diketahui $f(x) = x^3 + 1 \equiv 0 \pmod{3}$ [1]

Penyelesaian :

Banyaknya penyelesaian dari $f(x) = x^3 + 1 \equiv 0 \pmod{3}$ ditentukan oleh system residu modulo yang lengkap, yaitu $\{0,1,2\}$, Kita masukkan:

$$x = 0 \rightarrow f(0) = 0^3 + 1 = 1 \not\equiv 0 \pmod{3}$$

$$x = 1 \rightarrow f(1) = 1^3 + 1 = 2 \not\equiv 0 \pmod{3}$$

$$x = 2 \rightarrow f(2) = 2^3 + 1 = 3 \equiv 0 \pmod{3}$$

Maka banyaknya penyelesaian kongruensi $x^3 + 1 \equiv 0 \pmod{3}$ adalah satu, yaitu $x = 2 + 3k$ ($k \in Z$)

2. $f(x) = x^3 + 5x - 4 \equiv 0 \pmod{7}$ [6]

Penyelesaian :

Banyaknya penyelesaian dari $f(x) = x^3 + 5x - 4 \equiv 0 \pmod{7}$ ditentukan oleh system residu modulo yang lengkap, yaitu $\{0,1,2,3,4,5,6\}$, Kita masukkan:

$$x = 0 \rightarrow f(0) = 0^3 + 5(0) - 4 = -4 \not\equiv 0 \pmod{7}$$

$$x = 1 \rightarrow f(1) = 1^3 + 5(1) - 4 = 2 \not\equiv 0 \pmod{7}$$

$$x = 2 \rightarrow f(2) = 2^3 + 5(2) - 4 = 14 \equiv 0 \pmod{7}$$

:

.

$$x = 6 \rightarrow f(6) = 6^3 + 5(6) - 4 = 242 \not\equiv 0 \pmod{7}$$

Maka banyaknya penyelesaian kongruensi $x^3 + 1 \equiv 0 \pmod{3}$ adalah satu, yaitu $x = 2 + 7k$ ($k \in Z$)

3. $f(x) = x^2 + 5 \equiv 0 \pmod{11}$ [6]

Penyelesaian :

Banyaknya penyelesaian dari $f(x) = x^2 + 5 \equiv 0 \pmod{11}$ ditentukan oleh system residu modulo yang lengkap, yaitu $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, Kita masukkan:

$$x = 0 \rightarrow f(0) = 0^2 + 5 = 5 \not\equiv 0 \pmod{11}$$

$$x = 1 \rightarrow f(0) = 1^2 + 5 = 6 \not\equiv 0 \pmod{11}$$

$$x = 2 \rightarrow f(0) = 2^2 + 5 = 9 \not\equiv 0 \pmod{11}$$

.

.

.

$$x = 10 \rightarrow f(0) = 10^2 + 5 = 105 \not\equiv 0 \pmod{11}$$

Maka kongruensi $x^3 + 1 \equiv 0 \pmod{3}$ Tidak mempunyai penyelesaian, karena tidak ada nilai x yang memenuhi kongruensi tersebut.

Bentuk kongruensi yang paling sederhana adalah kongruensi yang berderajat satu dan disebut dengan kongruensi linear. Jika dalam aljabar kita mengenal persamaan linear yang berbentuk $ax = b, a \neq 0$, maka dalam teori bilangan dikenal kongruensi linear yang mempunyai bentuk $ax \equiv b \pmod{m}$

Definisi 16 [5]

Suatu Kongruen dengan bentuk $ax \equiv b \pmod{m}$ dimana x adalah sebarang bilangan bulat disebut dengan kongruensi linear dalam satu variable

Penting untuk mengetahui bahwa x_0 adalah sebuah solusi untuk suatu kongruensi linear, maka semua bilangan bulat x_i sehingga $x_i \equiv x_0 \pmod{m}$ adalah solusi dari kongruensi linear. Perhatikan juga bahwa $ax \equiv b \pmod{m}$ adalah setara dengan Persamaan Linear Diophantine.

Definisi 4.2 [6]

Kongruensi sederhana berderajat satu atau yang disebut kongruensi linear mempunyai bentuk umum $ax \equiv b \pmod{m}$, dengan $a, b, m \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, dan $m > 0$.

Dalam beberapa sumber, bentuk $ax \equiv b \pmod{m}$ juga disebut sebagai kekongruenan lanjar. **Kekongruenan Lanjar [4]** adalah Kongruen yang berbentuk $ax \equiv b \pmod{m}$ dengan m bilangan bulat positif, a dan b sembarang bilangan bulat, dan x adalah peubah bilangan bulat. Bentuk kongruen lanjar berarti menentukan nilai-nilai x yang memenuhi kekongruenan tersebut. Metode yang sederhana untuk mencari nilai-nilai x tersebut adalah dengan menggunakan persamaan $ax \equiv b \pmod{m}$ yang dapat ditulis :

$$ax \equiv b \pmod{m}$$

$$ax = b + km$$

Dapat disusun menjadi

$$x = \frac{b+km}{a}$$

Dengan k adalah sembarang bilangan bulat.

Untuk menemukan solusi dari x maka kita bisa mencoba mengganti nilai k yaitu untuk $k = 0, 1, 2, \dots$ dan $k = -1, -2, \dots$, dimana k tersebut harus menghasilkan nilai x yang merupakan bilangan bulat.

Contoh :

Tentukan solusi $4x \equiv 3 \pmod{9}$ dan $2x \equiv 3 \pmod{4}$

Penyelesaian :

(i) $4x \equiv 3 \pmod{9}$

$$x = \frac{3+k \cdot 9}{4}$$

$$k = 0 \rightarrow x = \frac{(3+0 \cdot 9)}{4} = \frac{3}{4} \quad (\text{bukan solusi})$$

$$k = 1 \rightarrow x = \frac{(3+1 \cdot 9)}{4} = 3$$

$$k = 2 \rightarrow x = \frac{(3+2 \cdot 9)}{4} = \frac{21}{4} \quad (\text{bukan solusi})$$

$$k = 3 \rightarrow x = \frac{(3+3 \cdot 9)}{4} = \frac{30}{4} \quad (\text{bukan solusi})$$

$$k = 4 \rightarrow x = \frac{(3+4 \cdot 9)}{4} = \frac{39}{4} \quad (\text{bukan solusi})$$

$$k = 5 \rightarrow x = \frac{(3+5 \cdot 9)}{4} = 12$$

$$k = -1 \rightarrow x = \frac{(3+(-1) \cdot 9)}{4} = \frac{-6}{4} \quad (\text{bukan solusi})$$

$$k = -2 \rightarrow x = \frac{(3+(-2) \cdot 9)}{4} = \frac{-15}{4} \quad (\text{bukan solusi})$$

$$k = -3 \rightarrow x = \frac{(3+0 \cdot 9)}{4} = -6$$

$$k = -6 \rightarrow x = \frac{(3+0 \cdot 9)}{4} = -15$$

Nilai-nilai x yang memenuhi : 3, 12, ... dan -6, -15, ...

(ii) $2x \equiv 3 \pmod{4}$

$$x = \frac{3+k \cdot 4}{2}$$

Karena $4k$ genap dan 3 ganjil maka penjumlahan menghasilkan ganjil, sehingga hasil penjumlahan tersebut jika dibagi dengan 2 tidak menghasilkan

bilangan bulat. Dengan kata lain, tidak ada nilai-nilai x yang memenuhi $2x \equiv 3 \pmod{4}$

Definisi 17.^[5]

Sebuah Solusi kongruensi $ax \equiv b \pmod{m}$ untuk $(a, m) = 1$ disebut dengan balikan modulo dari modulo m . Kami menunjukkan sebuah solusi dari \bar{a}

Contoh :

Balikan modulo dari 7 modulo 48 adalah 7. Perhatikan bahwa solusi untuk $7x \equiv 1 \pmod{48}$ adalah $x \equiv 7 \pmod{48}$

Teorema 4.1 ^[6]

Kongruensi linear $ax \equiv b \pmod{m}$, dengan $a, b, m \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, dan $m > 0$. dapat diselesaikan jika $d = (a, m)$ membagi b . Pada kasus ini memiliki selesaian. Jika $(a, m) = 1$, maka kongruensi linear $ax \equiv b \pmod{m}$ hanya mempunyai satu selesaian.

Bukti.

Kongruensi linear $ax \equiv b \pmod{m}$ mempunyai selesaian, berarti $m \mid ax - b$.

Andaikan $d \nmid b$.

$$d = (a, m) \rightarrow d \mid a \rightarrow d \mid ax.$$

$$d \mid ax, \text{ dan } d \nmid b \rightarrow d \nmid ax - b.$$

$$d = (a, m) \rightarrow d \mid m.$$

$$d \mid m \text{ dan } d \nmid b \rightarrow m \nmid ax - b.$$

$m \nmid ax - b$ bertentangan dengan $m \mid ax - b$, Jadi $d \mid b$.

Diketahui $d \mid b$ dan $d = (a, m) \rightarrow d \mid a \rightarrow d \mid m$.

$$d \mid a, d \mid m, \text{ dan } d \mid b \rightarrow \frac{a}{d}, \frac{m}{d}, \text{ dan } \frac{b}{d} \in \mathbb{Z}.$$

$$ax \equiv b \pmod{m} \rightarrow m \mid ax - b.$$

$$m \mid ax - b \text{ dan } \frac{a}{d}, \frac{m}{d}, \frac{b}{d} \rightarrow \frac{m}{d} \mid \left(\frac{ax}{d} - \frac{b}{d} \right)$$

$$\frac{m}{d} \mid \frac{ax}{d} - \frac{b}{d} \rightarrow \frac{ax}{d} \equiv \frac{b}{d} \pmod{\frac{m}{d}}.$$

Misal selesaian kongruensi $\frac{ax}{d} \equiv \frac{b}{d} \pmod{\frac{m}{d}}$ adalah $x \equiv$

$x_0; x_0 < \frac{m}{d}$, maka sebarang selesaiannya berbentuk $x =$

$x_0 + k \cdot \frac{m}{d}, k \in \mathbb{Z}$, yaitu:

$$x = x_0 + k \cdot \frac{m}{d},$$

$$x = x_0 + k \cdot \frac{2m}{d},$$

$$x = x_0 + k \cdot \frac{3m}{d},$$

:

:

$$x = x_0 + k \cdot \frac{(d-1)m}{d}$$

dimana seluruhnya memenuhi kongruensi dan seluruhnya mempunyai d penyelesaian.

Jika $(a, d) = 1$, maka selesaiannya didapat $x = x_0$ yang memenuhi kongruensi dan mempunyai satu penyelesaian.

Contoh:

1. Selesaikan $7x \equiv 3 \pmod{12}$

Penyelesaian :

Faktor pembagi 7 yaitu 1,7

Faktor Pembagi 12 yaitu 1, 2, 3, 4, 6, 12

PBB dari (7,12) adalah 1

Karena $d = (7,12) = 1$, atau 7 dan 12 relatif prima dan $1 \mid 3$ maka $7x \equiv 3 \pmod{12}$

Hanya mempunyai 1 penyelesaian, Dapat dicari dengan memasukkan nilai x yang ditentukan oleh system residu modulo yang lengkap, yaitu $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$,

Kita masukkan:

$$x = 0 \rightarrow 7(0) \equiv / 3 \pmod{12}$$

$$x = 1 \rightarrow 7(1) \equiv / 3 \pmod{12}$$

$$x = 2 \rightarrow 7(2) \equiv / 3 \pmod{12}$$

.
.

.

$$x = 9 \rightarrow 7(9) \equiv 3 \pmod{12}$$

$$x = 10 \rightarrow 7(10) \equiv / 3 \pmod{12}$$

$$x = 11 \rightarrow 7(11) \equiv / 3 \pmod{12}$$

Jadi, $7x \equiv 3 \pmod{12}$ hanya mempunyai 1 penyelesaian yaitu

$$x \equiv 9 \pmod{12}.$$

2. Selesaikan $6x \equiv 9 \pmod{15}$

Penyelesaian :

Faktor pembagi 6 yaitu 1, 2, 3, 6

Faktor Pembagi 15 yaitu 1, 3, 5, 15

PBB dari (6,15) adalah 3

Karena $d = (6,15) = 3$ atau 6 dan 15 tidak relatif prima dan $3 \mid 9$, maka kongruensi di atas mempunyai 3 penyelesaian (tidak tunggal). Dapat dicari dengan memasukkan nilai x yang ditentukan oleh system residu modulo yang lengkap, yaitu $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14\}$, Kita masukkan:

$$x = 0 \rightarrow 6(0) \equiv / 9 \pmod{15}$$

$$x = 1 \rightarrow 6(1) \equiv / 9 \pmod{15}$$

$$x = 4 \rightarrow 6(4) \equiv 9 \pmod{15}$$

.

.

.

$$x = 9 \rightarrow 6(9) \equiv 9 \pmod{15}$$

$$x = 14 \rightarrow 6(14) \equiv 9 \pmod{15}$$

Selesaian kongruensi linear $6x \equiv 9 \pmod{15}$ adalah

$$x \equiv 4 \pmod{15}, x \equiv 9 \pmod{15}, \text{ dan } x \equiv 14 \pmod{15}.$$

3. Selesaikan $12x \equiv 2 \pmod{16}$

Penyelesaian :

Faktor pembagi 16 yaitu 1, 2, 4, 8, 16

Faktor Pembagi 12 yaitu 1, 2, 3, 4, 6, 12

PBB dari (16,12) adalah 4

Karena $(16,12) = 4$ dan $4 \nmid 2$, maka kongruensi $12x \equiv 2 \pmod{16}$ tidak mempunyai penyelesaian.

4. Selesaikan $144x \equiv 216 \pmod{360}$ [3]

Penyelesaian :

Dengan menggunakan algoritma Euclidean, kita cari PBB dari 144 dan 360

$$360 = 2 \cdot 144 + 72$$

$$144 = 2 \cdot 72 + 0$$

Sisa pembagi terakhir sebelum 0 adalah 72,

maka PBB dari (144, 360) adalah 72

Karena $(144,360) = 72$ dan $72 \mid 216$,

maka kongruensi $144x \equiv 216 \pmod{360}$ mempunyai 72 penyelesaian.

Bila kongruensi $144x \equiv 216 \pmod{360}$ disederhanakan dengan menghilangkan faktor d , maka kongruensi menjadi $2x \equiv 3 \pmod{5}$. Kongruensi $2x \equiv 3 \pmod{5}$ hanya mempunyai satu penyelesaian yaitu $x \equiv 4 \pmod{5}$.

Sehingga selesaian kongruensi linier $144x \equiv 216 \pmod{360}$ adalah

$$x = (4, 4 + 1.5, 4 + 2.5, \dots, 4 + (72 - 1) \cdot 1.5) \pmod{360}$$

$$x = 4, 9, 14, \dots, 359 \pmod{360}$$

[6] Pada kongruensi $ax \equiv b \pmod{m}$ jika nilai a, b , dan m besar, akan memerlukan penyelesaian yang panjang, sehingga perlu disederhanakan penyelesaian tersebut.

$$ax \equiv b \pmod{m} \leftrightarrow m \mid (ax - b) \leftrightarrow (ax - b) = my, y \in \mathbb{Z}.$$

$$ax - b = my \leftrightarrow my + b = ax \leftrightarrow my \equiv -b \pmod{a}$$

dan mempunyai selesaian y_0 .

Sehingga dari bentuk $my + b = ax$ dapat ditentukan bahwa $my_0 + b$ adalah kelipatan dari a .

Atau dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$my_0 + b = ax \leftrightarrow x_0 = \frac{my_0 + b}{a}$$

Contoh:

1. Selesaikan kongruensi $7x \equiv 4 \pmod{25}$ [1]

Penyelesaian

$$7x \equiv 4 \pmod{25}$$

$$25y \equiv -4 \pmod{7}$$

$$4y \equiv -4 \pmod{7}$$

$$y \equiv -1 \pmod{7}$$

$$y_0 = -1, \text{ sehingga } x_0 = \frac{25(-1) + 4}{7} = -3$$

Selesaian kongruensi linear di atas adalah

$$x \equiv -3 \pmod{25} \text{ atau}$$

$$x \equiv 22 \pmod{25}$$

2. Selesaikan kongruensi $4x \equiv 3 \pmod{49}$

Jawab

$$4x \equiv 3 \pmod{49}$$

$$49y \equiv -3 \pmod{4}$$

$$4y \equiv -3 \pmod{4}$$

$$y \equiv -3 \pmod{4}$$

$$y_0 = -3 \text{ sehingga } x_0 = \frac{49(-3) + 3}{4} = -36$$

Selesaian kongruensi linear di atas adalah

$$x \equiv -36 \pmod{49} \text{ atau}$$

$$x \equiv 13 \pmod{25}$$

Cara di atas dapat diperluas untuk menentukan selesaian kongruensi linear dengan

Menentukan y_0 dengan mencari z_0

Menentukan w_0 dengan mencari w_0

Menentukan v_0 dengan mencari w_0 , dan seterusnya.

Contoh 4.7 [3]

Selesaikan $19x \equiv 2 \pmod{49}$

Penyelesaian :

Dari $19x \equiv 2 \pmod{49}$ dapat diperoleh kongruensi lain $49y \equiv$

$-2 \pmod{19}$ atau $11y \equiv -2 \pmod{19}$. Karena kita relative masih sulit untuk menentukan penyelesaian $11y \equiv -2 \pmod{19}$, maka langkah serupa dilakukan dengan memilih suatu variabel lain sehingga diperoleh $19z \equiv 2 \pmod{11}$, atau $8z \equiv 2 \pmod{11}$. Karena kita merasakan masih sulit untuk menyelesaikan, langkah serupa diulang sehingga diperoleh $11r \equiv -2 \pmod{8}$, atau $3r \equiv -2 \pmod{8}$. Ternyata kita sudah lebih mudah memperoleh penyelesaian, yaitu $r_0 \equiv 2 \pmod{8}$, selanjutnya $z_0 = (11r_0 + 2)/8 = 3$, $y_0 = (19z_0 - 2)/11 = 5$, dan $x_0 = (49y_0 + 2)/19 = 13$.
 Selesaian kongruensi adalah $x \equiv 13 \pmod{49}$

Jika kita cermati contoh 4.7, langkah-langkah memperoleh selesaian dapat diperagakan sebagai berikut :

$$19x \equiv 2 \pmod{49} \rightarrow x_0 = \frac{49y_0+2}{19} = 13$$

$$49y \equiv -2 \pmod{19}$$

$$11y \equiv -2 \pmod{19} \rightarrow y_0 = \frac{19z_0-2}{11} = 5$$

$$19z \equiv 2 \pmod{11}$$

$$8z \equiv 2 \pmod{11} \rightarrow z_0 = \frac{11r_0+2}{8} = 3$$

$$11r \equiv -2 \pmod{8}$$

$$3r \equiv -2 \pmod{8} \rightarrow r_0 = 2$$

Contoh 4.8 [3]

Selesaikan kongruensi linier $67320x \equiv 136 \pmod{96577}$

Penyelesaian :

(67320,96577) dicari dengan menggunakan teorema Algoritma

$$\text{Euclides : } 96577 = 1.67320 + 29257$$

$$67320 = 2.29257 + 8806$$

$$29257 = 3.8806 + 2839$$

$$8806 = 3.2839 + 289$$

$$2839 = 9.289 + 238$$

$$289 = 1.238 + 51$$

$$238 = 4.51 + 34$$

$$51 = 1.34 + 17$$

$$34 = 2.17 + 0$$

Karena $(67320,96577) = 17$, dan $17 \mid 136$, maka kongruensi dapat diselesaikan dan mempunyai 17 selesaian.

Selanjutnya, dari $67320x \equiv 136 \pmod{96577}$,

atau : $17 \cdot 3960 x \equiv 17 \cdot 8 \pmod{17 \cdot 5681}$

dengan $(67320,96577) = 17$, sehingga diperoleh $3960 x \equiv 8 \pmod{5681}$, dan diselesaikan seperti uraian sebelumnya.

$$3960 x \equiv 8 \pmod{5681} \quad \rightarrow x_0 = \frac{5681y_0+8}{3960} = 4694$$

$$5681 y \equiv -8 \pmod{3960}$$

$$1721 y \equiv -8 \pmod{3960} \quad \rightarrow y_0 = \frac{3960z_0-8}{1721} = 3272$$

$$3960 z \equiv 8 \pmod{1721}$$

$$518 z \equiv 8 \pmod{1721} \quad \rightarrow z_0 = \frac{1721 r_0+8}{518} = 1422$$

$$1721 r \equiv -8 \pmod{518}$$

$$167 r \equiv -8 \pmod{518} \quad \rightarrow r_0 = \frac{518 s_0-8}{167} = 428$$

$$518 s \equiv 8 \pmod{167}$$

$$17 s \equiv 8 \pmod{167} \quad \rightarrow \quad s_0 = \frac{167 t_0 + 8}{17} = 138$$

$$167 t \equiv -8 \pmod{17}$$

$$14 t \equiv -8 \pmod{17} \quad \rightarrow \quad t_0 = \frac{17 m_0 - 8}{14} = 14$$

$$17 m \equiv 8 \pmod{14}$$

$$3m \equiv 8 \pmod{14} \quad \rightarrow \quad m_0 = 12$$

Selesaian kongruensi adalah :

$$x \equiv 4694, 4694 + 1.5681, \dots, 4694 + 16.5681 \pmod{96577}$$

$$x \equiv 4694, 10375, \dots, 95560 \pmod{96577}$$

Kekongruenan Lanjar tidak hanya sekedar konsep, namun juga penerapan konkret dari kongruen dalam penyelesaian sebuah permasalahan. Diantaranya yaitu [2]

1. Chinese Remainder Theorem
2. Public-Key Cryptography (Algoritma RSA)
3. Uji Bilangan Prima dengan Teorema Fermat
4. Check Digit ISBN

C. LATIHAN SOAL [6]

1. Tentukan selesaian kongruensi linear di bawah ini

a. $3x \equiv 2 \pmod{5}$

b. $7x \equiv 4 \pmod{25}$

c. $12x \equiv 2 \pmod{8}$

d. $6x \equiv 9 \pmod{15}$

e. $36x \equiv 8 \pmod{102}$

f. $8x \equiv 12 \pmod{20}$

g. $144x \equiv 216 \pmod{360}$

2. Selesaikan kongruensi linear dengan metode

$$my_0 + b = ax \leftrightarrow x_0 = \frac{my_0 + b}{a} :$$

a. $353x \equiv 19 \pmod{400}$

b. $49x \equiv 5000 \pmod{999}$

c. $589x \equiv 209 \pmod{817}$

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Fachruddin S. 2017. *Teori Bilangan*. FKIP Universitas Bengkulu. ISBN-979-25-077
- [2] Mario Tressa Juzar. *Kongruen Lanjar dan Berbagai Aplikasi dari Kongruen Lanjar*. Sekolah Teknik Elektro dan Informatika ITB
- [3]Muhsetyo, Gatot. *Modul 4 Kongruensi Linier*.
https://www2.slideshare.net/ChikaGidyfa/modul-4-kongruensi-linier?from_action=save .
- [4] Munir, Rinaldi. 2004. IF5054 *Kriptografi Teori Bilangan (Number Theory)*. Departemen Teknik Informatika ITB
- [5] Raji, Wissam. 2013. *An Introductory Course in Elementary Number Theory*. The Saylor Foundation
- [6]<https://dwipurnomoikipbu.files.wordpress.com/2008/11/bab-iv-konruensi-linear.doc>

BAB IX
CHINESE REMAINDER PROBLEM
(TEOREMA SISA CINA)

(Oleh : Istikommar)

A. PENDAHULUAN

Pada zaman dahulu, orang-orang “beruntung” menemui masalah terkait sisa hasil bagi dalam hidupnya. Hal ini terjadi ketika mereka tidak mengetahui banyak barang yang dimiliki, tetapi mereka memiliki sejumlah informasi bahwa ketika banyak barang itu dibagi dengan sejumlah bilangan, maka akan menghasilkan sisa-sisa tertentu. Kebanyakan orang mungkin akan melakukan perhitungan coba-coba, kadang terselesaikan dengan cepat, kadang juga lambat, bahkan sampai tidak ditemukan solusi.[1]

Pada tahun 1809, ketika menganalisis batu yang disebut Pallas, **Carl Friedrich Gauss** menemukan kembali metode yang digunakan orang Tiongkok sejak dahulu yang sekarang dikenal sebagai **Teorema Sisa Cina (TSC)**. Jauh sebelum itu, sekitar abad ke-6, Teorema Sisa Cina telah digunakan dalam astronomi Cina kuno untuk mengukur pergerakan planet.[1]

Menurut catatan sejarah, masalah pertama terkait TSC tertulis pada buku karya **Jenderal Sun Tzu** (544 SM – 496 SM) atau juga dikenal sebagai **Master Sun**. Dalam bukunya yang berjudul “Sun-tzu Suan-ching”, ia menuliskan persoalan:

“Ada barang yang jumlahnya tidak diketahui. Jika kita membaginya dengan 3, maka tersisa 2. Jika kita membaginya dengan 5, maka tersisa 3. Jika kita membaginya dengan 7, maka tersisa 2. Berapa jumlah barang itu?”

Di buku tersebut hanya tertulis soal seperti itu, namun tanpa solusi, sehingga menimbulkan ketertarikan untuk menyelesaikannya. [1]

Pada abad pertama, seorang matematikawan China yang bernama Sun Tse dalam bukunya *Sunzi Suanjing*, mengajukan pertanyaan sebagai berikut:

“Tentukan sebuah bilangan bulat yang bila dibagi dengan 5 menyisakan 3, bila dibagi 7 menyisakan 5, dan bila dibagi 11 menyisakan 7.” [2] (Gani, 2008)

Pertanyaan Sun Tse dapat dirumuskan kedalam sistem kongruen linier (kekongruenan linear): [3] (Munir, 2004)

$$x \equiv 3 \pmod{5}$$

$$x \equiv 5 \pmod{7}$$

$$x \equiv 7 \pmod{11}$$

Sekitar abad ke-6, suatu algoritma untuk menyelesaikan permasalahan Sun Tzu ditemukan. Algoritma tersebut melibatkan konsep **kongruensi modulo** dan sekarang kita kenal sebagai **Teorema Sisa Cina** (*Chinese Remainder Theorem*). Disebut “Cina” karena permasalahan pertama terkait teorema tersebut ditemukan di negara Cina.

B. PEMBAHASAN

TEOREMA (*Chinese Remainder Theorem*) [3] (Munir,2004)

Misalkan m_1, m_2, \dots, m_n adalah bilangan bulat positif sedemikian sehingga

$\text{PBB}(m_i, m_j) = 1$ untuk $i \neq j$. Maka sistem kongruen lanjar

$$x \equiv a_1 \pmod{m_1}$$

$$x \equiv a_2 \pmod{m_2}$$

$$x \equiv a_3 \pmod{m_3}$$

:

:

$$x \equiv a_t \pmod{m_t}$$

mempunyai sebuah solusi unik modulo $m = m_1 \times m_2 \times \dots \times m_n$. (yaitu terdapat solusi x dengan $0 \leq x < m$ dan semua solusi lain yang kongruen dalam modulus m dengan solusi ini).

Bukti [4] (Raji, 2016)

Misalkan $M_k = M/m_k$ Sejak $(m_1, m_2) = 1$ untuk semua $i \neq j$, kemudian $(M_k, m_k) = 1$.

Melalui teorema 26

Misal a, b , dan m adalah bilangan bulat sedemikian hingga $m > 0$ dan misal $c = (a, m)$. Jika c tidak membagi b , kemudian kongruensi $ax \equiv b \pmod{m}$ tidak memiliki penyelesaian. Jika $c \mid b$, kemudian

$$ax \equiv b \pmod{m}$$

memiliki penyelesaian tepat c tidak kongruen modulo m .

kita dapat menemukan suatu invers y_k pada M_k modulo m_k sedemikian sehingga $M_k y_k \equiv 1 \pmod{m_k}$. Hal ini berarti

$$x = \sum_{i=1}^t a_i M_i y_i$$

Sehingga

$$M_j \equiv 0 \pmod{m_k} \text{ untuk semua } j \neq k,$$

Jadi dapat kita lihat bahwa

$$x \equiv a_k M_k y_k \pmod{m_k}.$$

Juga perhatikan bahwa $M_k y_k \equiv 1 \pmod{m_k}$. Karena x adalah suatu solusi untuk sistem pada t kongruensi. Kita perlu menunjukkan bahwa terdapat dua solusi kongruen modulo M . misalkan sekarang kamu memiliki dua solusi x_0, x_1 untuk sistem kongruensi.

Kemudian

$$x_0 = x_1 \pmod{m_k}$$

Untuk semua $1 \leq k \leq t$.

Jadi, melalui Teorema 23,

. Jika $a \equiv b \pmod{m_1}, a \equiv b \pmod{m_2}, \dots, a \equiv b \pmod{m_t}$

dimana $a, b, m_1, m_2, \dots, m_t$ adalah bilangan bulat dan m_1, m_2, \dots, m_t positif, maka

$$a \equiv b \pmod{(m_1, m_2, \dots, m_t)}$$

kita dapat melihat bahwa

$$x_0 = x_1 \pmod{M}$$

Jadi, solusi pada sistem adalah modulo M yang unik.

Contoh:

Tentukan solusi dari pertanyaan Sun Tse.

“Tentukan sebuah bilangan bulat yang bila dibagi dengan 5 menyisakan 3, bila dibagi 7 menyisakan 5, dan bila dibagi 11 menyisakan 7.”

Penyelesaian:

Pertanyaan Sun Tse dapat dirumuskan kedalam sistem kongruen linier (kekongruenan linear):

$$x \equiv 3 \pmod{5} \quad \dots (1)$$

$$x \equiv 5 \pmod{7} \quad \dots (2)$$

$$x \equiv 7 \pmod{11} \quad \dots (3)$$

Menurut kongruen pertama,

$x \equiv 3 \pmod{5}$ berdasarkan kongruen linier dapat diubah menjadi

$$x = 3 + 5k_1 \quad \dots (i) \quad \text{untuk beberapa nilai } k.$$

❖ Substitusikan $x = 3 + 5k_1$ (i) ke dalam kongruen kedua $x \equiv 5 \pmod{7}$ menjadi:

$$3 + 5k_1 \equiv 5 \pmod{7} \quad \text{“kedua ruas dikurang 3”}$$

$$3 + 5k_1 - 3 \equiv 5 - 3 \pmod{7}$$

$$5k_1 \equiv 2 \pmod{7}$$

$$5k_1 = 2 + 7k_2 \quad \text{“Kedua ruas dikali } \frac{1}{5} \text{”}$$

$$\frac{5}{5} k_1 = \frac{2+7k_2}{5}$$

$$k_1 = \frac{2+7k_2}{5}$$

Uji sembarang bilangan bulat untuk k_2 ke $k_1 = \frac{2+7k_2}{5}$,
yang menghasilkan k_1 bilangan bulat.

Jika $k_2 = 1 \rightarrow k_1 = \frac{2+7(1)}{5} = \frac{9}{5}$... “bukan solusi”

Jika $k_2 = 2 \rightarrow k_1 = \frac{2+7(2)}{5} = \frac{16}{5}$... “bukan solusi”

Jika $k_2 = 3 \rightarrow k_1 = \frac{2+7(3)}{5} = \frac{23}{5}$... “bukan solusi”

Jika $k_2 = 4 \rightarrow k_1 = \frac{2+7(4)}{5} = \frac{30}{5} = 6$... “Solusi”

Dari kongruen lanjar diatas diperoleh $k_1 \equiv 6 \pmod{7}$

Sehingga $3 + 5 k_1 \equiv 5 \pmod{7} \rightarrow k_1 \equiv 6 \pmod{7}$, atau
 $k_1 = 6 + 7 k_2$ (ii)

❖ Substitusikan $k_1 = 6 + 7 k_2$ (ii) ke dalam $x = 3 + 5k_1$ (i):

$$x = 3 + 5k_1$$

$$x = 3 + 5(6 + 7k_2)$$

$$x = 3+30 + 35k_2$$

$$x = 33 + 35k_2 \quad \dots \text{(iii)}$$

❖ Substitusikan $x = 33 + 35k_2$ (iii) ke dalam kongruen ketiga

$x \equiv 7 \pmod{11}$ menjadi:

$$33 + 35k_2 \equiv 7 \pmod{11} \quad \text{“Kedua ruas dikurang 33”}$$

$$33 + 35 k_2 - 33 \equiv 7 - 33 \pmod{11}$$

$$35k_2 \equiv -26 \pmod{11}$$

“ubah kedalam kongruen lanjar”

$$35k_2 = -26 + 11k_3 \quad \text{“Kedua ruas dikali } \frac{1}{35}\text{”}$$

$$\frac{35}{35} k_2 = \frac{-26+11k_3}{35}$$

$$k_2 = \frac{-26+11k_3}{35}$$

uji sembarang bilangan bulat untuk k_3 ke $k_2 = \frac{-26+11k_3}{35}$

yang menghasilkan k_2 bilangan bulat.

$$\text{Jika } k_3 = 1 \rightarrow k_2 = \frac{-26+11(1)}{35} = \frac{-15}{35} \quad \dots \text{ “bukan solusi”}$$

$$\text{Jika } k_3 = 2 \rightarrow k_2 = \frac{-26+11(2)}{35} = \frac{-4}{35} \quad \dots \text{ “bukan solusi”}$$

$$\text{Jika } k_3 = 3 \rightarrow k_2 = \frac{-26+11(3)}{35} = \frac{7}{35} \quad \dots \text{ “bukan solusi”}$$

$$\text{Jika } k_3 = 4 \rightarrow k_2 = \frac{-26+11(4)}{35} = \frac{28}{35} \quad \dots \text{ “bukan solusi”}$$

$$\text{Jika } k_3 = 5 \rightarrow k_2 = \frac{-26+11(5)}{35} = \frac{39}{35} \quad \dots \text{ “bukan solusi”}$$

:

:

$$\text{Jika } k_3 = 31 \rightarrow k_2 = \frac{-26+11(31)}{35} = 9 \quad \dots \text{ “solusi”}$$

Dari kongruen linier diatas diperoleh $k_2 \equiv 9 \pmod{11}$

Sehingga $35k_2 \equiv -26 \pmod{11} \rightarrow k_2 \equiv 9 \pmod{11}$ atau

$$k_2 = 9 + 11k_3$$

❖ Substitusikan $k_2 = 9 + 11k_3$ ini ke dalam $x = 33 + 35k_2$

(iii)

menghasilkan:

$$x = 33 + 35(9 + 11k_3)$$

$$x = 33 + 315 + 385k_3$$

$$x = 348 + 385k_3$$

atau $x \equiv 348 \pmod{385}$. Ini adalah solusinya.

348 adalah bilangan bulat positif terkecil yang merupakan solusi sistem kekongruenan di atas. Perhatikan bahwa $348 \pmod{5} = 3$, $348 \pmod{7} = 5$, dan $348 \pmod{11} = 7$. Catatlah bahwa $385 = 5 \cdot 7 \cdot 11$.

*Jadi solusi unik pertanyaan tsun se yaitu $x \equiv 348 \pmod{385}$
Modulus 385 merupakan $m = m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 = 5 \cdot 7 \cdot 11 = 385$*

CHINESE REMAINDER THEOREM

Diberikan sistem kongruensi sebagai berikut

$$x \equiv a_1 \pmod{m_1}$$

$$x \equiv a_2 \pmod{m_2}$$

$$x \equiv a_3 \pmod{m_3}$$

:

:

$$x \equiv a_k \pmod{m_k}$$

m_1, m_2, \dots, m_k haruslah relatif prima

Dengan demikian, kita dapat menvari nilai x dengan rumus berikut

$$x = (a_1 M_1 y_1 + a_2 M_2 y_2 + \dots + a_n M_n y_n) \pmod{m}$$

Yang dalam hal ini

M_n adalah perkalian semua modulus kecuali m_n

y_n adalah balikan dari M_n dalam modulus m_n untuk setiap k . [5]

BUKTI CHINESE REMAINDER THEOREM [5]

$$x \equiv a_1 \pmod{m_1}$$

$$x \equiv a_2 \pmod{m_2}$$

\vdots

$$x \equiv a_r \pmod{m_r}$$

Tentukan x

Solusi yang diberikan

$$\text{adalah } x \equiv a_1 M_1 y_1 + a_2 M_2 y_2 + \dots + a_r M_r y_r \pmod{M}$$

Mula-mula pandang bahwa

$$x = a_1 M_1 y_1 + a_2 M_2 y_2 + \dots + a_r M_r y_r$$

(merupakan solusi yang sudah didefinisikan sebelumnya)

Jika solusi tersebut memenuhi syarat awal bahwa akan bersisa a_k jika dibagi M_k untuk setiap k , maka solusi tersebut terbukti kebenarannya.

Kita coba periksa sisanya jika dibagi dengan m_1

Karena $M_2 = m_1 \cdot m_3 \dots m_r$, maka tentunya $m_1 | M_2$.

Karena $M_3 = m_1 \cdot m_2 \cdot m_4 \dots m_r$, maka $m_1 | M_3$ juga.

Dan seterusnya dari M_4, M_5 , hingga M_r

Oleh karenanya:

$$x \equiv a_1 M_1 y_1 + 0 + 0 + \dots + 0 \pmod{m_1}$$

$$x \equiv a_1 M_1 y_1 \pmod{m_1}$$

Menurut definisi sebelumnya $M_1 y_1 \equiv 1 \pmod{m_1}$, maka

$$x \equiv a_1 \pmod{m_1}$$

Ternyata, jika dibagi dengan m_1 akan bersisa a_1 . Artinya, ini sesuai dengan salah satu syarat yang diberikan. Pembuktian masih dilanjutkan dengan mengecek sisanya jika dibagi m_2 .

Karena $M_1 = m_2 \cdot m_3 \dots m_r$, maka $m_2 | M_1$

Karena $M_3 = m_1 \cdot m_2 \cdot m_4 \dots m_r$, maka $m_2 | M_3$.

Dan hal sama juga berlaku pada M_4, M_5 , hingga M_r

Oleh karenanya:

$$x \equiv 0 + a_2 M_2 y_2 + 0 + 0 + \dots + 0 \pmod{m_2}$$

$$x \equiv a_2 M_2 y_2 \pmod{m_2}$$

Karena kita tahu bahwa $M_2 y_2 \equiv 1 \pmod{m_2}$, maka

$$x \equiv a_2 \pmod{m_2}$$

Ternyata sesuai dengan syarat baris kedua. Pembuktian dilanjutkan dengan mengecek sisanya jika dibagi m_3, m_4 hingga m_r . Masing-masing akan menyisakan a_3, a_4 , hingga a_r . Dengan demikian, definisi awal yang diberikan terbukti.

$$x = a_1 M_1 y_1 + a_2 M_2 y_2 + \dots + a_r M_r y_r$$

TERBUKTI sebagai solusi CRT

Namun, ada hal yang masih perlu dibuktikan. Karena y_k mempunyai banyak jawab, akibatnya x juga mempunyai banyak jawab.

Misalkan x_0 dan x_1 adalah solusi CRT yang nilainya berbeda, maka:

Untuk setiap k :

$$x_0 \equiv a_k \pmod{m_k}$$

$$x_1 \equiv a_k \pmod{m_k}$$

Menggabungkan keduanya:

$$(x_1 - x_0) \equiv 0 \pmod{m_k}$$

$$m_k | (x_1 - x_0)$$

Sesuai dengan teorema keterbagian bahwa: "jika $a|c$ dan $b|c$, maka $ab|c$ ", maka

$$M | (x_1 - x_0)$$

$$x_0 \equiv x_1 \pmod{M}$$

Dari hasil di atas, diketahui bahwa antara solusi yang satu dengan solusi yang lain adalah kongruen modulo M . Jadi, solusi CRT menjadi:

$$x \equiv a_1 M_1 y_1 + a_2 M_2 y_2 + \dots + a_r M_r y_r \pmod{M}$$

TERBUKTI

Algoritma Chinese Remainder Theorem,^[6]

1. Menghitung nilai m
2. Mencari invers
3. Mencari solusi

Contoh 1 (dengan alternatif penyelesaian yang berbeda)

Tinjau kembali persoalan chinese remainder problem

Tentukan solusi dari pertanyaan *Sun Tse*.

“Tentukan sebuah bilangan bulat yang bila dibagi dengan 5 menyisakan 3, bila dibagi 7 menyisakan 5, dan bila dibagi 11 menyisakan 7.”

Penyelesaian:

Pertanyaan Sun Tse dapat dirumuskan kedalam sistem kongruen linier (kekongruenan linear):

$$x \equiv 3 \pmod{5} \quad \dots (1)$$

$$x \equiv 5 \pmod{7} \quad \dots (2)$$

$$x \equiv 7 \pmod{11} \quad \dots (3)$$

Dari kekongruenan diatas diperoleh

$$a_1 = 3, a_2 = 5, a_3 = 7, \text{ dan } m_1 = 5, m_2 = 7, m_3 = 11$$

❖ **Langkah pertama mencari nilai m**

Hitung nilai : $m = m_1 \times m_2 \times m_3 = 5 \times 7 \times 11 = 385$

$$M_1 = m_2 \times m_3 = 7 \times 11 = 77,$$

$$M_2 = m_1 \times m_3 = 5 \times 11 = 55,$$

$$M_3 = m_1 \times m_2 = 5 \times 7 = 35$$

❖ **Langkah kedua mencari nilai invers**

$y_1 = 3$ karena $77 \times 3 \equiv 1 \pmod{5}$

catatan: $77 y_1 \equiv 1 \pmod{5}$

$$77 y_1 = 1 + 5k$$

$$y_1 = \frac{1+5k}{77}$$

Substitusikan nilai k sebagai bilangan bulat ke $y_1 = \frac{1+5k}{77}$,

sampai diperoleh y_1 bilangan bulat.

$$\text{Jika } k = 1 \rightarrow y_1 = \frac{1+5(1)}{77} = \frac{6}{77} \quad \dots \text{ "bukan solusi"}$$

:

$$\text{Jika } k = 10 \rightarrow y_1 = \frac{1+5(10)}{77} = \frac{51}{77} \quad \dots \text{ "bukan solusi"}$$

:

$$\text{Jika } k = 46 \rightarrow y_1 = \frac{1+5(46)}{77} = \frac{231}{77} = 3 \quad \dots \text{ "solusi"}$$

$$y_2 = 6 \quad \text{karena } 55 \times 6 \equiv 1 \pmod{7}$$

$$\text{catatan: } 55 y_2 \equiv 1 \pmod{7}$$

$$55 y_2 = 1+7k$$

$$y_2 = \frac{1+7k}{55}$$

Substitusikan nilai k sebagai bilangan bulat ke $y_2 = \frac{1+7k}{55}$,

sampai diperoleh y_2 bilangan bulat.

$$\text{Jika } k = 1 \rightarrow y_2 = \frac{1+7(1)}{55} = \frac{8}{55} \quad \dots \text{ "bukan solusi"}$$

:

$$\text{Jika } k = 10 \rightarrow y_2 = \frac{1+7(10)}{55} = \frac{71}{55} \quad \dots \text{ "bukan solusi"}$$

:

$$\text{Jika } k = 47 \rightarrow y_2 = \frac{1+7(47)}{55} = \frac{330}{55} = 6 \quad \dots \text{ "solusi"}$$

$$y_3 = 6 \quad \text{karena } 35 \times 6 \equiv 1 \pmod{11}.$$

$$\text{catatan: } 35 y_3 \equiv 1 \pmod{11}$$

$$35 y_3 = 1+11k$$

$$y_3 = \frac{1+11k}{35}$$

Substitusikan nilai k sebagai bilangan bulat ke $y_3 = \frac{1+11k}{35}$,
sampai diperoleh y_3 bilangan bulat.

$$\text{Jika } k = 1 \rightarrow y_3 = \frac{1+11(1)}{35} = \frac{12}{35} \quad \dots \text{ “bukan solusi”}$$

:

$$\text{Jika } k = 10 \rightarrow y_3 = \frac{1+11(10)}{35} = \frac{111}{35} \quad \dots \text{ “bukan solusi”}$$

:

$$\text{Jika } k = 19 \rightarrow y_3 = \frac{1+11(19)}{35} = \frac{210}{35} = 6 \quad \dots \text{ “solusi”}$$

❖ Langkah ketiga mencari Solusi

Maka solusi unik dari sistem kekongruenan tersebut adalah.

$$\begin{aligned} x &= (a_1 M_1 y_1 + a_2 M_2 y_2 + a_3 M_3 y_3) \pmod{m} \\ &= (3 \cdot 77 \cdot 3 + 5 \cdot 55 \cdot 6 + 7 \cdot 35 \cdot 6) \pmod{385} \\ &= 3813 \pmod{385} \\ &= 348 \pmod{385} \end{aligned}$$

Contoh 2 (permasalahan dalam kehidupan sehari-hari)

Cerita Nenek dan Telurnya

Seorang nenek pergi ke pasar dengan membawa keranjang berisikan beberapa telur. Saat nenek meletakkannya di permukaan tanah, tiba-tiba seorang pemuda datang dan menginjak telur-telur itu secara tidak sengaja hingga pecah semua.



Pemuda itu meminta maaf kepada nenek dan ingin mengganti kerugian nenek. Ia pun bertanya, “Nek, berapa telur yang ada di dalam keranjang Nenek tadi? Saya ingin menggantinya.” Nenek tidak tahu berapa banyak telur di dalam keranjang karena ia tak pernah menghitungnya. Beruntung, saat di rumah, nenek sempat menyusun telur-telur itu dalam rak telur. Saat nenek menyusun telur pada 3 rak dengan jumlah yang sama, akan ada 2 butir telur yang tersisa. Saat nenek menyusun telur pada 5 rak dengan jumlah yang sama, akan ada 3 butir telur yang tersisa. Saat nenek menyusun telur pada 7 dengan jumlah yang sama, ternyata masih ada 2 butir telur tersisa. Pemuda itu pun kebingungan dengan “teka-teki” nenek tersebut. [1]

Penyelesaian:

Permasalahan mengenai telur nenek di atas dapat dimodelkan dalam sistem kongruensi linear berikut.

$$x \equiv 2 \pmod{3} \quad \dots (1)$$

$$x \equiv 3 \pmod{5} \quad \dots (2)$$

$$x \equiv 2 \pmod{7} \quad \dots (3)$$

Dari kekongruenan diatas diperoleh

$$a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 2, \text{ dan } m_1 = 3, m_2 = 5, m_3 = 7$$

$$\text{Hitung nilai : } m = m_1 \times m_2 \times m_3 = 3 \times 5 \times 7 = 105$$

$$M_1 = m_2 \times m_3 = 5 \times 7 = 35,$$

$$M_2 = m_1 \times m_3 = 3 \times 7 = 21,$$

$$M_3 = m_1 \times m_2 = 3 \times 5 = 15$$

$y_1 = 2$ karena $35 \times 2 \equiv 1 \pmod{3}$

catatan: $35 y_1 \equiv 1 \pmod{3}$

$$35 y_1 = 1 + 3k$$

$$y_1 = \frac{1+3k}{35}$$

Substitusikan nilai k sebagai bilangan bulat ke $y_1 = \frac{1+3k}{35}$

Jika $k = 1 \rightarrow y_1 = \frac{1+3(1)}{35} = \frac{4}{35}$... “bukan solusi”

:

Jika $k = 10 \rightarrow y_1 = \frac{1+3(10)}{35} = \frac{31}{35}$... “bukan solusi”

:

Jika $k = 23 \rightarrow y_1 = \frac{1+3(23)}{35} = \frac{70}{35} = 2$... “solusi”

$y_2 = 1$ karena $21 \times 1 \equiv 1 \pmod{5}$

catatan: $21 y_2 \equiv 1 \pmod{5}$

$$21 y_2 = 1 + 5k$$

$$y_2 = \frac{1+5k}{21}$$

Substitusikan nilai k sebagai bilangan bulat ke $y_2 = \frac{1+5k}{21}$

Jika $k = 1 \rightarrow y_2 = \frac{1+5(1)}{21} = \frac{6}{21}$... “bukan solusi”

Jika $k = 2 \rightarrow y_2 = \frac{1+5(2)}{21} = \frac{11}{21}$... “bukan solusi”

:

Jika $k = 4 \rightarrow y_2 = \frac{1+5(4)}{21} = \frac{21}{21} = 1$... “solusi”

$y_3 = 1$ karena $15 \times 1 \equiv 1 \pmod{7}$.

catatan: $15 y_3 \equiv 1 \pmod{7}$

$$15 y_3 = 1+7k$$

$$y_3 = \frac{1+7k}{15}$$

Subtitusikan nilai k sebagai bilangan bulat ke $y_3 = \frac{1+7k}{15}$

Jika $k = 1 \rightarrow y_3 = \frac{1+7(1)}{15} = \frac{8}{15}$... “bukan solusi”

Jika $k = 2 \rightarrow y_3 = \frac{1+7(2)}{15} = \frac{15}{15} = 1$... “solusi

Maka solusi unik dari sistem kekongruenan tersebut adalah.

$$\begin{aligned}x &= (a_1 M_1 y_1 + a_2 M_2 y_2 + a_3 M_3 y_3) \pmod{m} \\&= (2 \cdot 35 \cdot 2 + 3 \cdot 21 \cdot 1 + 2 \cdot 15 \cdot 1) \pmod{105} \\&= (140 + 63 + 30) \pmod{105} \\&= 233 \pmod{385} \\&= \mathbf{23} \pmod{385}\end{aligned}$$

Jadi, kemungkinan banyak telur nenek adalah 23 butir, bisa juga $23+105=128$ butir, dan seterusnya. Tentu saja, nenek dapat memperkirakan seberapa banyak telurnya, meskipun tidak persis. Ini artinya, permasalahan telur nenek telah terselesaikan.

C. LATIHAN SOAL

Bagian I Soal Pilihan Ganda

1. Seorang peternak memiliki sejumlah sapi. Jika ia memasukkan 5 ekor sapi masing-masing ke dalam sejumlah kandang secukupnya, maka ada 2 ekor sapi yang tidak masuk kandang. Jika ia memasukkan 6 ekor sapi masing-masing ke dalam sejumlah kandang secukupnya, maka ada 4 ekor sapi yang tidak masuk kandang. Banyaknya sapi yang dimiliki peternak tersebut paling sedikit adalah
A. 18 C. 22 E. 82
B. 20 D. 52
2. Bilangan berikut yang bila dibagi 3,5, dan 7 berturut-turut memberi sisa 1,2, dan 3 adalah . . .
A. 42 C. 62 E. 82
B. 52 D. 72
3. Misalkan S adalah himpunan bilangan bulat yang bila dibagi 2 bersisa 1, dibagi 3 bersisa 2, dan dibagi 4 bersisa 3. Berapa banyak bilangan bulat pada interval $[0,10^4]$ yang menjadi anggota S ?
A. 433 D. 833
B. 633 E. 834
C. 832

4. Misalkan $N=1234567891011\cdots 4344$ adalah bilangan 79-digit yang didapat dengan cara menuliskan bilangan 1 sampai 44 secara berurutan. Berapakah sisa hasil bagi N oleh 45?
- A. 1 C. 9 E. 44
 B. 4 D. 18
5. Dalam bentuk desimal, bilangan $N=99999\cdots 999$ terdiri dari 2020 buah angka 9. Jika N dibagi 2020, maka sisanya
- A. 1818 C. 2018 E. 1919
 B. 1918 D. 2019

Bagian II Soal Uraian

- Para tentara sedang berbaris di lapangan. Komandan menyusun barisan tentara dalam beberapa formasi.
 Jika 4 tentara disusun per baris, maka tersisa 1 tentara.
 Jika 5 tentara disusun per baris, maka tersisa 2 tentara.
 Jika 7 tentara disusun per baris, maka tersisa 4 tentara.
 Paling sedikit berapa banyak tentara di lapangan tersebut (tidak termasuk komandan)?
- Seorang jenderal menghitung banyak tentara yang selamat dari suatu pertempuran dengan mengatur mereka dalam barisan yang terdiri dari sejumlah orang. Sebelumnya, jenderal itu memimpin 1200 tentara dalam perang tersebut.

Jika disusun dalam baris berbanjar 5, maka 3 tentara tidak memiliki baris.

Jika disusun dalam baris berbanjar 6, maka 3 tentara tidak memiliki baris.

Jika disusun dalam baris berbanjar 7, maka 1 tentara tidak memiliki baris.

Jika disusun dalam baris berbanjar 11, maka tidak ada tentara yang tersisa.

Berapakah jumlah tentara yang selamat?

3. Aku adalah bilangan terkecil yang:
 - bila dibagi 5, bersisa 4;
 - bila dibagi 6, bersisa 3;
 - bila dibagi 11, bersisa 9;
 - bila dibagi 17, bersisa 2.Bilangan berapakah aku?
4. Temukan bilangan bulat yang bersisa 2 bila dibagi oleh 3 atau 5, tetapi habis dibagi oleh 4. [4] (Raji, 2016)
5. Temukan semua bilangan bulat yang bersisa 4 bila dibagi oleh 11 dan bersisa 3 bila dibagi oleh 17. [4] (Raji, 2016)
6. Temukan semua bilangan bulat yang bersisa 1 bila dibagi 2, sisa 2 bila dibagi oleh 3 dan sisa 3 bila dibagi oleh 5. [4] (Raji, 2016)

DAFTAR PUSTAKA

- [1] <https://mathcyber1997.com/materi-soal-dan-pembahasan-teorema-sisa-cina/> [Diakses, 22/12/2020]
- [2] Gani, Yuri Andri. 2008. Penerapan metode Chinese Remainder Theorem Pada RSA. Sekolah Teknik elektro dan informatika ITB, Bandung.
- [3] Munir, Rinaldi. 2004. Bahan Kuliah ke-3 Teori Bilangan (*Number Theory*). Departement Teknik Informatika Institut teknologi Bandung.
- [4] Raji, Wissam. 2016. An Introductory Course in Elementary Number Theory. Published August 18th 2016 by Lulu.com
- [5] <http://hendrydext.blogspot.com/2009/10/chinese-remainder-theorem-eksplisit.html> [Diakses, 5/1/2021]
- [6] <https://studylibid.com/doc/187664/chinese-remainder-theorem> [Diakses, 4/1/2021]

BAB X

BILANGAN PRIMA

(Oleh : Ratih Kristantini)

A. PENDAHULUAN

Bilangan prima, bahan penyusun bilangan bulat, telah dipelajari secara ekstensif selama berabad-abad. Mampu menyajikan bilangan bulat secara unik sebagai perkalian bilangan prima adalah alasan utama di balik seluruh teori bilangan dan di balik hasil yang menarik dalam teori ini. Banyak teorema, aplikasi, dan dugaan yang menarik telah dirumuskan berdasarkan sifat-sifat bilangan prima.

Dalam bab ini, kami menyajikan metode untuk menentukan apakah suatu bilangan prima atau komposit menggunakan metode Yunani kuno yang ditemukan oleh Eratosthenes. Kami juga menunjukkan bahwa ada banyak bilangan prima yang tak terhingga. Kami kemudian melanjutkan untuk menunjukkan bahwa setiap bilangan bulat dapat ditulis secara unik sebagai produk bilangan prima.

Kami juga memperkenalkan konsep persamaan diophantine dimana solusi bilangan bulat dari persamaan yang diberikan ditentukan menggunakan pembagi persekutuan terbesar. Kami kemudian menyebutkan teorema Bilangan Prima tanpa memberikan bukti tentunya selain dugaan lain dan hasil utama yang berkaitan dengan bilangan prima.

B. PEMBAHASAN

1. STUDI SEJARAH DAN PERKEMBANGAN BILANGAN PRIMA [1]

Bilangan prima adalah bilangan bulat positif lebih besar dari satu yang memiliki tepat hanya dua faktor, yaitu bilangan 1 (satu) dan bilangan itu sendiri. Bilangan selain bilangan prima yang memiliki lebih dari dua faktor dan selain bilangan 1 (satu) disebut sebagai bilangan komposit. Bilangan 1 adalah kasus khusus, tidak termasuk ke bilangan prima ataupun komposit. Banyak orang menanyakan sebabnya. Walau bilangan 1 dulunya dianggap sebagai bilangan prima (Goldbach 1742; Lehmer 1909; Lehmer 1914; Hardy and Wright 1979, hal. 11; Gardner 1984, hal. 86-87; Sloane and Plouffe 1995, hal. 33; Hardy 1999, hal. 46), diperlukan penanganan khusus di banyak definisi dan aplikasi yang mencakup bilangan prima, sehingga bilangan 1 tersebut biasanya diletakkan pada sebuah kelas khusus. Penggunaan bilangan prima lebih lanjut dapat ditemukan pada penggunaan *public key* pada metode kriptografi.

Primalitas adalah keadaan dimana sebuah bilangan termasuk bilangan prima. Bilangan prima telah menjadi subyek dari riset-riset di dunia dan bahkan telah menjadi pertanyaan mendasar, seperti Hipotesa Riemann dan Dugaan Goldbach, yang tetap tidak terpecahkan selama lebih dari satu abad.

2. VARIASI JENIS BILANGAN PRIMA [1]

1) *Mersenne prime*

Mersenne prime adalah bilangan Mersenne yang juga adalah bilangan prima. Bilangan Mersenne memiliki rumus :

$$M_n = 2^n - 1 \quad (1)$$

N	Mn	Jumlah digit Mn	Tanggal ditemukan	Penemu
2	3	1	??	??
	7	1	??	??
5	31	2	??	??
7	127	3	??	??
13	8191	4	1456	??
17	131071	6	1588	Cataldi
19	524287	6	1588	Cataldi

Tabel berikut adalah daftar dari beberapa bilangan prima Mersenne pertama yang sudah ditemukan.

2) *Fermat prime*

Fermat prime adalah bilangan Fermat yang juga adalah bilangan prima. Bilangan Fermat memiliki rumus :

$$F_n = 2^{2^n} + 1 \quad (2)$$

3) *Twin prime*

Twin prime (prima kembar) adalah bilangan prima yang berasal dari penggabungan/konkatenansi dua buah bilangan prima yang berselisihkan tepat 2. Beberapa contoh pasangan bilangan prima kembar adalah (3, 5), (5, 7), (11, 13), (17,

19), (29, 31), (41, 43), (59, 61), (71, 73), (101, 103), (107, 109), (137, 139), (149, 151), (179, 181), (191, 193), (197, 199), (227, 229), dan (239, 241).

3. BILANGAN PRIMA TERBESAR [1]

Bilangan prima Mersenne yang terbesar saat ini adalah $2^{32582657}-1$ yang memiliki 9.808.358 digit, ditemukan tahun 2006 oleh Dr. Curtis Cooper and Dr. Steven Boone dan merupakan bilangan prima Mersenne ke-44.

Bilangan prima Fermat terbesar saat ini adalah 65.537, yang merupakan bilangan Fermat ke-4. Perlu diketahui sampai saat bahwa hanya F_0 , F_1 , F_2 , F_3 dan F_4 yang merupakan bilangan prima Fermat.

Pasangan bilangan prima kembar terbesar saat ini adalah $2003663613 \cdot 2^{195000} \pm 1$ yang masing-masing memiliki 58711 digit, ditemukan pada 15 Januari 2007 oleh Eric Vautier dari Prancis.

Bilangan prima yang terbesar saat ini adalah bilangan Mersenne ke-44 tersebut. Sepanjang sejarah penemuan, bilangan prima terbesar yang ditemukan sebagian besar selalu merupakan bilangan prima Mersenne terbesar, dengan beberapa pengecualian seperti pada periode antara penemuan Brown bulan Agustus 1989 dan penemuan Slowinski dan Gage bulan Maret 1992.

4. ARITMETIKA MODULO DAN KRIPTOGRAFI [2]

Aritmetika modulo cocok digunakan untuk kriptografi karena dua alasan:

- 1) Oleh karena nilai-nilai aritmetika modulo berada dalam himpunan berhingga (0 sampai modulus $m - 1$), maka kita tidak perlu khawatir hasil perhitungan berada di luar himpunan.
- 2) Karena kita bekerja dengan bilangan bulat, maka kita tidak khawatir kehilangan informasi akibat pembulatan (*round off*) sebagaimana pada operasi bilangan riil.

5. TEOREMA 3 (THE FUNDAMENTAL THEOREM OF ARITHMETIC) [2]

Dalam teori bilangan, teorema dasar aritmatika, juga disebut dengan teorema faktorisasi unik atau teorema faktorisasi - prima unik, menyatakan bahwa setiap bilangan bulat positif yang lebih besar dari 1 adalah bilangan prima itu sendiri atau dapat direpresentasikan sebagai hasil kali satu atau lebih bilangan prima.

Contoh:

$$9 = 3 \times 3 \quad (2 \text{ buah faktor prima})$$

$$100 = 2 \times 2 \times 5 \times 5 \quad (4 \text{ buah faktor prima})$$

$$13 = 13 \quad (\text{atau } 1 \times 13) \quad (1 \text{ buah faktor prima})$$

Soal:

Berapa buah faktor prima yang dimiliki bilangan berikut ini:

1. $50 = 2 \times 5 \times 5$ (memiliki 3 buah faktor prima)

2. $135 = 3 \times 3 \times 3 \times 5$ (memiliki 4 buah faktor prima)

6. CIRI-CIRI BILANGAN PRIMA [2]

Ciri-ciri bilangan prima antara lain:

- 1) Semua bilangan prima merupakan bilangan ganjil kecuali 2 yang merupakan bilangan genap.
- 2) Bilangan prima mempunyai 2 faktor yaitu 1 dan bilangan itu sendiri.

Bilangan selain prima disebut bilangan **komposit** (*composite*). Bilangan komposit mempunyai faktor selain 1 dan bilangan itu sendiri.

Contoh bilangan prima:

- 5 adalah bilangan prima karena 5 hanya habis dibagi oleh 1 dan 5.
- 23 adalah bilangan prima karena 23 hanya habis dibagi oleh 1 dan 23.
- 53 adalah bilangan prima karena 53 hanya habis dibagi oleh 1 dan 53.
- 137 adalah bilangan prima karena ia hanya habis dibagi oleh 1 dan 137.

Contoh bilangan komposit:

- 4 adalah bilangan komposit karena 4 dapat dibagi oleh 2 selain 1 dan 4 itu sendiri.
- 15 adalah bilangan komposit karena 15 dapat dibagi oleh 3 dan 5 selain 1 dan 15 itu sendiri.
- 20 adalah bilangan komposit karena 20 dapat dibagi oleh 2, 4, 5, dan 10, selain 1 dan 20 itu sendiri.
- 100 adalah bilangan komposit karena 100 dapat dibagi oleh 2, 4, 5, 10, 20, 25, dan 50 selain 1 dan 1000 itu sendiri.

7. MENGUJI SUATU BILANGAN MERUPAKAN BILANGAN PRIMA ATAU KOMPOSIT

a) TEOREMA ERATOSTHENES [3]

Bilangan prima merupakan bilangan yang sangat unik jika dibandingkan dengan jenis bilangan lainnya. Penyebaran bilangan ini tidak memiliki pola, sehingga untuk menentukan suatu deret bilangan prima tidaklah mudah, bahkan para ilmuwan matematika di dunia pun belum menemukan rumus untuk menentukan bilangan prima. Setelah kita mengetahui definisi dari bilangan prima, sekarang bagaimana cara mengecek suatu bilangan sembarang (bilangan asli >1) yang termasuk kedalam bilangan prima atau bukan (bilangan komposit). Salah satu pembuktian untuk mengetahui bilangan tersebut termasuk bilangan prima atau bukan yaitu menggunakan “**Teorema Eratosthenes**”.

Eratosthenes adalah seorang matematikawan, ahli geografi dan seorang astronom yang berasal dari Cyrene (saat ini Libya) di Afrika Utara. Eratosthenes hidup sekitar tahun 276 - 194 SM. Namanya berasal dari bahasa Yunani. Ἐρατοσθένης. Teorema ini memberi solusi kepada kita untuk mempermudah bagaimana jika kita diberikan sebuah bilangan asli, yang belum diketahui apakah ia prima atau komposit. Dan kalau ia komposit, bagaimana menentukan faktor-faktornya.

Teorema eratosthenes : *“sebuah bilangan asli $n > 1$ adalah komposit jika dan hanya jika ia dapat dibagi oleh suatu faktor prima $p \leq \sqrt{n}$.*

Bukti :

- Bila n dapat dibagi oleh bilangan prima p tersebut ($p \leq \sqrt{n}$) maka jelas n komposit, sebaliknya diketahui n adalah bilangan komposit artinya bisa dinyatakan dalam misalkan $n = ab$, dengan $a, b \in \mathbb{N}$.

$$a > 1$$

$$b \geq a$$

a faktor prima b (a faktor prima terkecil dari n)

Perhatikan bahwa jika a faktor prima b artinya $a \leq b$,

akibatnya $ab \geq aa$

$$ab \geq a^2$$

$$n \geq a^2$$

$$\sqrt{n} \geq \sqrt{a^2}$$

$$\sqrt{n} \geq a$$

∴ Terbukti bahwa $a \leq \sqrt{n}$

Misalnya kita ambil contoh :

Diketahui 8 adalah bilangan komposit

Maka $n = ab$

$$8 = _ \times _ \quad \text{dengan } a, b \in \mathbb{N}$$

$$a > 1$$

$$b \geq a$$

a faktor prima b

ada 4 kemungkinan:

$$a \times b$$

$$1 \times 8 \quad \text{tidak memenuhi}$$

$$2 \times 4 \quad \text{memenuhi}$$

$$4 \times 2 \quad \text{tidak memenuhi}$$

$$8 \times 1 \quad \text{tidak memenuhi}$$

∴ faktor a,b yang memenuhi $n = a \times b$ menurut teorema eratosthenes adalah $2 \times 4 = 8$.

- Teorema ini mengatakan bahwa jika suatu bilangan bulat n tidak terbagi oleh setiap bilangan prima p dengan $p \leq \sqrt{n}$ maka dipastikan n adalah bilangan prima. Hasil inilah yang digunakan oleh seorang matematikawan Yunani Eratosthenes menemukan teknik untuk memilih bilangan prima dalam rentang tertentu. Metoda ini disebut **saringan Eratosthenes** (*sieve of Eratosthenes*).

b) SARINGAN ERATOSTHENES [4]

Definisi 8. *Bilangan prima adalah bilangan bulat yang lebih besar dari 1 yang hanya habis dibagi 1 dan dirinya sendiri.*

Contoh 15. *Bilangan bulat 2, 3, 5, 7, 11 adalah bilangan bulat prima.*

Perhatikan bahwa bilangan bulat apa pun yang lebih besar dari 1 yang bukan bilangan prima dikatakan komposit jumlah.

Kita sekarang hadirkan saringan Eratosthenes. Saringan Eratosthenes adalah metode kuno untuk menemukan bilangan prima hingga bilangan bulat tertentu. Metode ini ditemukan oleh ahli matematika Yunani kuno Eratosthenes. Ada beberapa metode lain yang digunakan untuk menentukan apakah suatu bilangan prima atau komposit.

Contoh menentukan semua bilangan prima yang kurang dari 100:

- 1) Daftarkan semua bilangan tersebut, yaitu 2, 3, ... , 100.
Dapat dibentuk dalam bentuk persegi panjang.
- 2) Biarkan bilangan 2 sebagai bilangan prima pertama, silang semua bilangan kelipatan 2, yaitu 4, 6, 8, ...
- 3) Setelah 2, bilangan pertama tidak tercoret adalah 3. Pertahankan bilangan 3 sebagai bilangan prima kedua, silang semua kelipatan 3, yaitu 6, 9, 12, ...
- 4) Bilangan pertama setelah 3 yang belum tercoret adalah 5. Pertahankan bilangan 5 ini, coret semua kelipatan 5, yaitu 10, 15, 20, ...

5) Cara yang sama dilakukan pada bilangan 7

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Diperhatikan 7 adalah bilangan prima terakhir dengan $7 \leq \sqrt{100}$, sebab prima berikutnya adalah 11. Jadi setelah langkah ke 5, bilangan dalam daftar yang tidak tercoret adalah bilangan prima. Bilangan prima yang dimaksud adalah 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, semuanya adalah bilangan prima kurang dari 100.

Contoh:

1. Apakah 101 itu termasuk bilangan prima atau komposit?

Langkah pertama:

menentukan $\sqrt{101} = 10,05$

bilangan prima yang $\leq 10,05$ adalah 2, 3, 5, 7.

Langkah kedua:

membagi 101 dengan bilangan prima yang $\leq 10,05$ diatas

$$101 \div 2 = 50 \text{ sisa } 1$$

$$101 \div 3 = 33 \text{ sisa } 2$$

$$101 \div 5 = 20 \text{ sisa } 1$$

$$101 \div 7 = 14 \text{ sisa } 3$$

Karena semua bilangan prima $\leq 10,05$ tidak habis membagi 101 maka kesimpulannya bilangan 101 termasuk bilangan prima.

2. Apakah 161 termasuk bilangan prima atau komposit?

Langkah pertama:

$$\text{menentukan } \sqrt{161} = 12,69$$

bilangan prima yang $\leq 12,669$ adalah 2, 3, 5, 7, 11.

Langkah kedua:

membagi 161 dengan bilangan prima $\leq \sqrt{12,669}$

$$161 \div 2 = 80 \text{ sisa } 1$$

$$161 \div 3 = 53 \text{ sisa } 2$$

$$161 \div 5 = 32 \text{ sisa } 1$$

$$161 \div 7 = 23$$

$$161 \div 11 = 14 \text{ sisa } 7$$

Karena 161 habis dibagi oleh 7 tanpa sisa, maka kesimpulannya adalah bilangan 161 bukan bilangan prima (161 termasuk bilangan komposit).

Teorema Eratosthenes ini mempunyai kekurangan, yaitu jika bilangan yang tentukannya adalah lebih dari ratusan (ribuan, ratusan ribu, dan seterusnya), maka diperlukan alat bantu hitung seperti kalkulator untuk menentukan bilangan tersebut apakah termasuk ke dalam bilangan prima atau komposit.

SOAL-SOAL DAN PENYELESAIAN [5]

- 1) Tentukan bilangan bulat berikut mana yang merupakan bilangan prima.
- a. 101
 - b. 103
 - c. 111
 - d. 201
 - e. 211

Penyelesaian :

- a. 101 adalah bilangan prima, karena tidak dapat dibagi dengan setiap bilangan bulat positif selain 1 dan 101.

$$\sqrt{101} \approx 10,0498756211$$

Bilangan prima yang kurang dari 10 yaitu 2, 3, 5, 7.

$$101 \div 2 = 50 \text{ sisa } 1$$

$$101 \div 3 = 33 \text{ sisa } 1$$

$$101 \div 5 = 20 \text{ sisa } 1$$

$$101 \div 7 = 14 \text{ sisa } 3$$

$2 \nmid 101$, $3 \nmid 101$, $5 \nmid 101$, dan $7 \nmid 101$.

Jadi 101 adalah bilangan prima.

- b. 103 adalah bilangan prima, karena tidak dapat dibagi dengan setiap bilangan bulat positif selain 1 dan 103.

$$\sqrt{103} \approx 10,1488915651$$

Bilangan prima kurang dari 10 yaitu 2,3,5,7

$$103 \div 2 = 51 \text{ sisa } 1$$

$$103 \div 3 = 34 \text{ sisa } 1$$

$$103 \div 5 = 20 \text{ sisa } 3$$

$$103 \div 7 = 14 \text{ sisa } 5$$

2 \nmid 103, 3 \nmid 103, 5 \nmid 103, dan 7 \nmid 103.

Jadi 103 adalah bilangan prima.

- c. 111 bukan bilangan prima karena dapat dibagi oleh 3.

Karena $111 \div 3 = 37$, maka 111 adalah bilangan komposit.

$$\sqrt{111} \approx 10,5356537529$$

Bilangan prima kurang dari 10 yaitu 2,3,5,7

$$111 \div 2 = 55 \text{ sisa } 1$$

$$111 \div 3 = 37$$

$$111 \div 5 = 22 \text{ sisa } 1$$

$$111 \div 7 = 15 \text{ sisa } 6$$

Jadi 111 adalah bilangan komposit.

- d. 201 bukan bilangan prima karena dapat dibagi oleh 3.

Karena $201 \div 3 = 67$, maka 201 adalah bilangan komposit.

$$\sqrt{201} \approx 14,1774468788$$

Bilangan prima kurang dari 10 yaitu 2,3,5,7,11,13

$$201 \div 2 = 100 \text{ sisa } 1$$

$$201 \div 7 = 28 \text{ sisa } 5$$

$$201 \div 3 = 67$$

$$201 \div 11 = 18 \text{ sisa } 3$$

$$201 \div 5 = 40 \text{ sisa } 1$$

$$201 \div 13 = 15 \text{ sisa } 6$$

Jadi 201 adalah bilangan komposit.

- e. 211 adalah bilangan prima, karena tidak dapat dibagi dengan setiap bilangan bulat positif selain 1 dan 211.

$$\sqrt{211} \approx 14,5258390463$$

Bilangan prima kurang dari 14 yaitu 2,3,5,7,11,13

$$211 \div 2 = 105 \text{ sisa } 1$$

$$211 \div 7 = 30 \text{ sisa } 1$$

$$211 \div 3 = 70 \text{ sisa } 1$$

$$211 \div 11 = 19 \text{ sisa } 2$$

$$211 \div 5 = 42 \text{ sisa } 1$$

$$211 \div 13 = 16 \text{ sisa } 3$$

$$2 \nmid 211, 3 \nmid 211, 5 \nmid 211, 7 \nmid 211, 11 \nmid 211, 13 \nmid 211.$$

Jadi, 211 adalah bilangan prima.

- 2) Gunakan saringan Eratosthenes untuk mencari semua bilangan prima yang kurang dari 150.

Penyelesaian ::

Bilangan prima kurang dari 150 harus memiliki faktor prima kurang dari $\sqrt{150} \approx 12,2474487$. Karena bilangan prima kurang dari 12,2474487 adalah 2,3,5,7,11, maka bilangan bulat dengan kelipatan 2,3,5,7,11 harus dicoret seperti pada gambar berikut.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150

Dari saringan Eratosthenes di atas, maka bilangan prima kurang dari 150 antara lain 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149.

- 3) Gunakan Saringan Eratosthenes untuk mencari semua bilangan prima yang kurang dari 200.

Penyelesaian :

Bilangan prima kurang dari 200 harus memiliki faktor prima kurang dari $\sqrt{200} \approx 14,142135$. Karena bilangan prima kurang dari 14,142135 adalah 2,3,5,7,11,13, maka bilangan bulat dengan kelipatan 2,3,5,7,11,13 harus dicoret seperti pada gambar berikut.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150
151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
161	162	163	164	165	166	167	168	169	170
171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190
191	192	193	194	195	196	197	198	199	200

Dari saringan Eratosthenes di atas, maka bilangan prima kurang dari 200 antara lain 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 193, 197, 199.

C. LATIHAN SOAL [6]

I. Soal Pilihan Ganda

1. Yang bukan merupakan faktor prima dari 504 adalah....
 - a. 2
 - b. 5
 - c. 3
 - d. 7

2. Yang merupakan bilangan prima adalah....
 - a. 149
 - b. 434
 - c. 205
 - d. 1407

3. Bilangan prima terbesar untuk menguji apakah 5669 merupakan bilangan prima atau bukan adalah....
 - a. 80
 - b. 70
 - c. 75
 - d. 65

4. Misalkan 435 orang anggota DPR dimasukkan dalam beberapa panitia. Setiap panitia terdiri dari lebih dari 2 orang tetapi kurang dari 30 orang. Banyak orang pada setiap panitia harus sama, dan setiap orang hanya boleh menjadi anggota satu panitia. Berapa banyak orang untuk setiap panitia?
 - a. 3
 - b. 15
 - c. 5
 - d. 29

5. Misalkan kita mempunyai 48 keping logam berukuran sama. Logam-logam itu kita susun membentuk persegi panjang dengan ukuran 6×8 . Ukuran persegi panjang lain yang dapat kita bentuk dengan 48 keping logam adalah....
- a. 3×16
 - b. 7×10
 - c. 5×14
 - d. 11×6
6. Pak Budi akan menanam 36 tanaman jeruk. Tanaman-tanaman itu akan disusun sehingga membentuk persegi panjang. Jika setiap baris mempunyai tanaman sama banyak maka semua kemungkinan banyak tanaman setiap baris adalah....
- a. 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, dan 36
 - b. 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, dan 19.
 - c. 2, 3, 7, 11, 13, 17, 19, dan 23.
 - d. 2, 3, 4, 6, 9, 12, dan 18.
7. Bilangan asli terkecil yang dapat dibagi oleh setiap bilangan asli kurang dari atau sama dengan 12 adalah....
- a. 27720
 - b. 2770
 - c. 2310
 - d. 2772

8. Bilangan-bilangan berikut yang termasuk bilangan komposit adalah....
- a. 143
 - b. 331
 - c. 223
 - d. 531
9. Faktorisasi prima dari 172 adalah....
- a. $2^4 \cdot 4$
 - b. $2^3 \cdot 4^2$
 - c. $2^1 \cdot 4^3$
 - d. $2^2 \cdot 4^3$
10. Misalkan faktor-faktor dari suatu bilangan n adalah 2, 5, dan 9. Jika tepat ada 9 faktor lainnya maka n adalah....
- a. 90
 - b. 150
 - c. 120
 - d. 180

II. Soal Essay

1. Periksa apakah 121 adalah bilangan prima atau komposit.
2. Periksa apakah 213 adalah bilangan prima atau komposit.
3. Periksa apakah 397 adalah bilangan prima atau komposit.
4. Gunakan Saringan Eratosthenes untuk mencari semua bilangan prima yang kurang dari 250.
5. Gunakan Saringan Eratosthenes untuk mencari semua bilangan prima antara 250 sampai dengan 500.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Jansen,
<https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/Matdis/2007-2008/Makalah/MakalahIF2153-0708-108.pdf>,
Bandung.
- [2] Ir. Rinaldi Munir, M.T. Departemen Teknik Informatika
Institut Teknologi Bandung 2004.
- [3] Ipan Setiawan, <https://fdokumen.com/document/teorema-eratosthenes-ipan-septiawan.html>, Tasikmalaya 2015.
- [4] Wissam Raji, An Introductory Course in Elementary
Number Theory 2013.
- [5] Hajar Ahmat Santoso,
https://www.researchgate.net/publication/339687621_Latihan_Soal_Keprimaan, Surabaya 2020.
- [6] Sufyani Prabawanto
http://file.upi.edu/Direktori/FPMIPA/JUR._PEND._MATEMATIKA/196008301_986031-SUFYANI_PRABAWANTO/Bilangan_Prima.pdf, Bandung.

BAB XI

TEOREMA FERMAT (*Theorem of Fermat*)

(Oleh : Geza Dwi Putri)

A. PENDAHULUAN

Prima adalah topik yang menarik dibahas pada teori kriptografi dan teori kode. Kriptografi itu sendiri berkaitan dengan bilangan bulat dan sifat-sifatnya, terutama bilangan prima [6]. Uji primalitas adalah proses untuk menguji apakah bilangan bulat merupakan bilangan prima atau tidak. Baru-baru ini, uji primalitas adalah salah satu masalah penting dalam konsep bilangan prima dan menjadi lebih penting karena aplikasi bilangan prima di beberapa area sehingga seperti mengenkripsi basis data, pemrograman komputer, mengkonstruksi perangkat keras dan perangkat lunak, mendeteksi kesalahan dalam pengkodean, kunci keamanan dalam kriptografi, dan keamanan informasi. Pierre de Fermat (1601-1665) adalah salah satu matematikawan paling terkenal di dunia karena karya-karyanya pada teori bilangan, aljabar, kalkulus, probabilitas dan geometri analitik. Karya yang paling terkenal adalah **Fermat Little Theorem** dan **Fermat Last Theorem** yang menjadi salah satu teori fundamental dalam pengujian primalitas [4].

B. PEMBAHASAN

2.1 Fermat Little Theorem

Pierre De Fermat lahir di Beaumont-de-Lomagne, Tarn-et-Garonne, Prancis. Ia memberikan banyak sekali kontribusi pada ilmu teori bilangan. Salah satu teoremanya yang terkenal adalah Fermat Little Theorem. Teorema ini pertama kali dinyatakannya pada sebuah surat untuk temannya, Frenche de Bessy, pada tanggal 18 Oktober 1640 [5]. Secara formal dapat ditulis “**Jika p adalah bilangan prima dan a adalah bilangan bulat, yang tidak habis dibagi dengan p , yaitu PBB $(a, p) = 1$ ” maka :**

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \quad [7]$$

Bilangan Prima Semu dalam pengujian primalitas

Jika n adalah bilangan prima semu Fermat (disederhanakan menjadi prima semu) maka $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$ maka n adalah bilangan komposit. Secara umum, bilangan komposit n yang memenuhi $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$ adalah bilangan prima semu pada basis a . Prima semu muncul karena Teorema Kecil Fermat berlaku satu arah, mengingat teorema menyatakan jika n bilangan prima maka $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$, tetapi tidak harus benar jika $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$, n merupakan bilangan prima.

Dan jika p adalah bilangan prima dan a adalah bilangan bulat sehingga $p \nmid a$, maka a^{p-2} adalah invers dari sebuah modulu p .

Bukti : jika $p \nmid a$, maka teorema fermat :

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

menjadi :

$$a^{p-2} \equiv 1 \pmod{p} \quad [8]$$

Akibatnya, a^{p-2} adalah invers dari modulo p

Pembuktian teorema [5] :

• **Menggunakan Induksi**

Sebagai basis induksi, untuk $a=1$, teorema ini valid, sebab $p|1^p-1$.

Kemudian untuk langkah induksi, misalkan teorema tersebut valid untuk suatu nilai a , sehingga memenuhi $p|a^p-a$.

Selanjutnya perlu dibuktikan bahwa $p|(a+1)^p - (a+1)$. Untuk membuktikan hal ini, perhatikan bahwa :

$$(a+1)^p - (a+1) = a^p + \sum_{i=1}^{p-1} \binom{p}{i} a^{p-i} + 1 - (a+1)$$

atau dapat ditulis menjadi :

$$(a+1)^p - (a+1) = (a^p - a) + \sum_{i=1}^{p-1} \binom{p}{i} a^{p-i} + 1$$

Karena $p|\binom{p}{i}$ untuk $1 \leq i \leq p-1$ dan berdasarkan asumsi $p|a^p - a$, maka dapat disimpulkan $p|(a+1)^p - (a+1)$.

• **Menggunakan Kongruensi**

Kita dapat mengalikan kongruensi, untuk setiap $i = 1, \dots, n$, dan $c_i \equiv d_i \pmod{p}$, sehingga

$$c_1 \cdot c_2 \dots c_n \equiv d_1 \cdot d_2 \dots d_n \pmod{p} \quad (1)$$

Kemudian, misalkan $\gcd(a,p)=1$. Kita bentuk barisan berikut :

$$a, 2a, 3a, \dots, (p-1)a \quad (2)$$

Tidak ada dua dari suku tersebut yang kongruen dengan modulo p .

Karena

$$i \cdot a \equiv k \cdot a \pmod{p} \rightarrow i \equiv k \pmod{p} \rightarrow i = k \quad (3)$$

Oleh sebab itu, setiap suku dari barisan yang dibuat kongruen tepat pada satu dari bilangan berikut :

$$1, 2, 3, \dots, p - 1$$

Dengan menggunakan persamaan (1), (2), dan (3) diperoleh

$$a^{p-1} \cdot 1 \cdot 2 \dots (p - 1) \equiv 1 \cdot 2 \dots (p - 1) \pmod{p}$$

Karena p dan $(p-1)!$ saling prima, maka persamaan diatas dapat ditulis menjadi

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

• Menggunakan Teori Kombinatorik

Misalkan terdapat mutiara-mutiara dengan banyak warna sejumlah a warna. Dari mutiara ini dibentuk kalung dengan tepat menggunakan sejumlah p mutiara. Pertama, dibentuk sebuah untaian mutiara. Terdapat a^p untaian string berbeda yang dapat dibentuk. Jika kita buang untaian tersebut yang hanya terdiri dari satu warna saja, yaitu sebanyak a . Maka terdapat sisa sebanyak $a^p - a$ untaian. Kemudian, ujung dari tiap untaian tersebut untuk mendapatkan kalung. Kita dapat melihat bahwa dua untaian yang dibedakan oleh hanya sebuah permutasi siklis dari mutiarnya menghasilkan kalung yang tak dapat dibedakan. Namun. Terdapat sejumlah p permutasi siklis dari p mutiara pada sebuah

untaian. Oleh sebab itu, banyak kalung yang berbeda adalah sejumlah $\frac{a^p - a}{p}$. Karena banyak kalung ini merepresentasikan bilangan bulat, maka dapat disimpulkan bahwa $p|a^p - a$.

Sebagai catatan sejarah, sekitar 500 tahun sebelum masehi, matematikawan cina sudah mengetahui bahwa jika p adalah sebuah bilangan prima, maka berlaku $2^p \equiv 2 \pmod p$, atau lebih dikenal dengan nama Hipotesis China. Hal ini merupakan kasus khusus dari Fermat's Little Theorem. Namun, mereka dan juga Leibniz ratusan tahun kemudian berpikir bahwa konvers dari teorema tersebut benar, atau dalam hal ini, jika $2^n \equiv 2 \pmod n$, maka n haruslah bilangan prima. **Counterexample terkecil** dari keyakinan mereka tersebut adalah $n = 341 = 11 \cdot 31$, dimana :

$$2^{341} - 2^{10 \cdot 34} \cdot 2 - 1^{34} \cdot 2 - 2 \pmod{341}$$

Bilangan yang memiliki sifat seperti 341 tersebut disebut **pseudoprime terhadap basis 2**. Beberapa bilangan juga merupakan *pseudoprimes* (prima semu) terhadap semu basis.

Contoh soal :

1. Kita akan membuktikan $5^{38} \equiv 4 \pmod{11}$. Ambil $p = 11, a = 5 \rightarrow 5 \nmid 11 \rightarrow 5^{10} \equiv 1 \pmod{11}$. Dengan fakta $5^2 \equiv 3 \pmod{11}$. Maka diperoleh :

$$\begin{aligned} 5^{38} &= 5^{10 \cdot 3 + 8} = (5^{10})^3 (5^2)^4 \\ &\equiv 1 \cdot 3^4 \pmod{11} \\ &\equiv 4 \pmod{11} \end{aligned} \quad [1]$$

2. Kita akan menguji apakah 17 dan 21 bilangan prima atau bukan. Disini kita akan mengambil nilai $a = 21$ karena PBB $(17,2) = 1$ dan $\text{PBB}(21,2) = 2$. Untuk 17,

$$2^{17-1} = 65536 \equiv 1 \pmod{17}$$

- ❖ Karena 17 habis membagi $65536-1 = 65535$
maka $65535 : 17 = 3855$

$$2^{21-1} = 104857 \not\equiv 1 \pmod{21}$$

- ❖ Karena 21 tidak habis membagi $104857-1 = 104856$

Kesimpulannya 17 merupakan bilangan prima dan 21 bukan bilangan prima [7]

3. Tentukan invers dari 6 modulo 11.

Penyelesaian:

a dikatakan invers b dari modulo c apabila memenuhi $a \cdot b \equiv 1 \pmod{c}$.

Kita dapat menggunakan banyak cara.

Cara pertama:

coba-coba, mulai dari 1,2,3,...,11.

$$1 \times 6 \equiv 6 \pmod{11}$$

$2 \times 6 = 12 \equiv 1 \pmod{11}$, maka kita sudah mendapatkan jawabannya, yaitu **2**.

Cara kedua:

dengan algoritma Euclid sampai tahap Bezout identity.

$$6a - 11b = 1$$

$$\mathbf{11} = \mathbf{6} + \mathbf{5}$$

$$6 = 5 + 1$$

$$\text{Jadi, } 1 = 6 - 5 = 6 - (11 - 6) = 2 \cdot 6 - 11$$

Bezout Identity-nya:

$$6 \cdot 2 - 11 = 1$$

Jadi, invers modulo-nya adalah 2.

Cara ketiga:

Dengan Fermat Little Theorem (berlaku karena 11 adalah bilangan prima).

Fermat's Little Theorem $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ dapat dimodifikasi menjadi

$$a \cdot a^{p-2} \equiv 1 \pmod{p}$$

Jadi, a^{p-2} adalah invers dari $a \pmod{p}$.

Jadi, invers dari $6 \pmod{11}$ adalah $6^9 \pmod{11}$

$$\equiv 36^4 \cdot 6 \pmod{11} \equiv 3^4 \cdot 6 \pmod{11}$$

$$\equiv 9^2 \cdot 6 \pmod{11} \equiv 4 \cdot 6 \pmod{11}$$

$$\equiv 2 \pmod{11}$$

[3]

C. LATIHAN SOAL

1. Berapa sisa pembagian 528 oleh 11 ?
 - a. $4 \pmod{11}$
 - b. $538 \pmod{11}$
 - c. $11 \pmod{528}$
 - d. $11 \pmod{4}$
 - e. $4 \pmod{538}$
2. Tentukan sisa pembagian 62018 oleh 13
 - a. $13 \pmod{62019}$
 - b. $13 \pmod{11}$
 - c. $11 \pmod{62019}$
 - d. $10 \pmod{13}$
 - e. Semua jawaban salah
3. Hitunglah sisanya jika 72013 dibagi 41
 - a. $41 \pmod{41}$
 - b. $14 \pmod{72013}$
 - c. $14 \pmod{41}$
 - d. $41 \pmod{14}$
 - e. $41 \pmod{72013}$
4. Buktikan bahwa pangkat 8 dari sebarang bilangan selalu berbentuk $17m$ atau $17m \pm 1$ untuk suatu m bilangan bulat.
5. Buktikan bahwa $n^{37} - n$ habis dibagi 1919190 untuk semua bilangan asli n .
6. Misalkan p adalah suatu bilangan prima dengan bentuk $3k+2$ dimana k membagi a^2+ab+b^2 untuk suatu bilangan bulat a dan b . Buktikan bahwa a dan b keduanya habis dibagi oleh p .
7. Misalkan p suatu bilangan prima. Tunjukkan bahwa terdapat tak hingga banyaknya bilangan bulat positif n sehingga p habis membagi $2^n - n$.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Hernadi, Julan. 2014. Teorema Fermat dan Wilson. Program Studi Pendidikan Matematika.
- [2] <https://mandorblogger.blogspot.com/2019/03/contoh-soalpenyelesaian-teorema-fermat.html> [Diakses : 18 Maret 2019]
- [3] <http://hendrydext.blogspot.com/2009/09/teorema-kecil-fermat.html> [Diakses : 9 S E P T E M B E R 2 0 0 9]
- [4] Grandini, Ega. 2017. Mengidentifikasi Bilangan Prima-Semu (Pesudoprime) Dalam Pengujian Primalitas Menurut Teorema Kecil Fermat Menggunakan *Mathematica*. ISSN 2355-0074 Volume 4. Nomor 2. STAIN Gajah Putih Takengon.
- [5] Gumbira, Akbar. 2009. **Fermat's Little Theorem dan Aplikasinya pada Algoritma RSA**. *Program Studi Teknik Informatika, Institut Teknologi Bandung. Jl. Ganesha 10, Bandung.*
- [6] Maulana, Faiz. Adhitya Wisnu W, Gede. Switraynic, Ni wayan. (2019). Ekuivalensi Ideal Hampir Prima dan Ideal Prima pada Bilangan Bulat Gauss. *Eigen Mathematics Journal*. Volume 2 No 1. Doi: <https://doi.org/10.29303/emj.v1i1.29>

- [7] Munir, Rinaldi. 2004. Bahan Kuliah ke-3 Teori Bilangan (*Number Theory*). Departement Teknik Informatika Institut teknologi Bandung.
- [8] Raji, Wissam. 2016. An Introductory Course in Elementary Number Theory. Published August 18th 2016 by Lulu.com

BAB XII

Fungsi Euler ϕ

(Oleh : Depi Marliani)

A. PENDAHULUAN

Matematika adalah pola berpikir, mengorganisasikan, pembuktian yang logik. Matematika adalah bahasa yang menggunakan istilah yang didefinisikan dengan cermat, jelas, dan akurat, representasinya dengan simbol.

Dalam matematika, terdapat banyak cabang pembagian ilmu matematika, salah satunya adalah teori bilangan. Teori bilangan adalah cabang dari matematika murni yang mempelajari sifat-sifat bilangan bulat dan mempunyai berbagai masalah terbuka yang dapat dengan mudah dimengerti sekalipun bukan oleh ahli matematika.

Salah satu teori tentang bilangan prima pada teori bilangan yang terkenal adalah teori little Fermat. Namun, teori tersebut hanya berlaku untuk bilangan prima. [1] mengatakan pada tahun 1760, Euler mampu membuat generalisasi dari teori little Fermat untuk semua bilangan asli. Untuk membuat generalisasi tersebut, Euler menggunakan bantuan sebuah fungsi yang kemudian diberi nama fungsi phi Euler dan dinotasikan ϕ .

Fungsi phi Euler $\phi(n)$ didefinisikan sebagai banyaknya bilangan asli tidak lebih dari n dan saling prima dengan n . Untuk

menghitung nilai $\phi(n)$ tanpa harus mendaftarkan bilangan yang memenuhi syarat, diperlukan sebuah formula $\phi(n)$ yang diperoleh berdasarkan sifat-sifat dari fungsi ϕ . Formula $\phi(n)$ juga dapat digunakan untuk memperoleh sifat-sifat lainnya dari fungsi ϕ [1]. Sebagai sebuah fungsi, ϕ tentu memiliki himpunan domain dan range. Menurut [2] tidak semua bilangan asli merupakan elemen range ϕ . Salah satu langkah untuk memudahkan mencari nilai prapeta dari m adalah menentukan batas bawah dan batas atas, sehingga dapat mempersempit ruang pencarian.

Euler phi-function disebut juga Euler totient function. Dalam bahasa Indonesia, kita dapat menyebutnya dengan fungsi phi atau fungsi totient. Meskipun fungsi ini memiliki nama phi, namun fungsi ini dalam perhitungannya sama sekali tidak menggunakan phi (ϕ) yang bernilai 1,61803399... Sebaliknya, fungsi ini hanya menghitung bilangan integer.

B. PEMBAHASAN

Definisi 1:

Misalkan m suatu bilangan bulat positif, maka $\phi(m)$ menyatakan banyaknya elemen dari himpunan residu sederhana modulo m . [3]

Contoh:

Himpunan residu sederhana modulo 30 adalah $\{1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$. Banyaknya elemen dari himpunan ini adalah 8, maka dinyatakan bahwa $\phi(30) = 8$.

Definisi 2:

- Fungsi Euler ϕ mendefinisikan $\phi(n)$ untuk $n \geq 1$ yang menyatakan jumlah bilangan bulat positif $< n$ yang relatif prima dengan n . [4]

Contoh:

Tentukan:

1. $\phi(4)$
2. $\phi(10)$
3. $\phi(15)$
4. $\phi(20)$

Penyelesaian:

1. $\phi(4)$

Bilangan bulat positif yang lebih kecil dari 4 adalah: 1, 2, dan 3

- **Karena $PBB(1,4) = 1$, maka 1 dan 4 relatif prima.**
- Karena $PBB(2,4) = 2$, maka 2 dan 4 tidak relatif prima.
- **Karena $PBB(3,4) = 1$, maka 3 dan 4 relatif prima.**

Di antara bilangan-bilangan tersebut terdapat 2 buah yang relatif prima dengan 4, yaitu 1 dan 3, sehingga $\phi(4) = 2$

2. $\phi(10)$

Bilangan bulat positif yang lebih kecil dari 10 adalah: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, dan 9

- **Karena $PBB(1,10) = 1$, maka 1 dan 10 relatif prima.**
- Karena $PBB(2,10) = 2$, maka 2 dan 10 tidak relatif prima.
- **Karena $PBB(3,10) = 1$, maka 3 dan 10 relatif prima.**

- Karena $PBB(4,10) = 2$, maka 4 dan 10 tidak relatif prima.
- Karena $PBB(5,10) = 5$, maka 5 dan 10 tidak relatif prima.
- Karena $PBB(6,10) = 2$, maka 6 dan 10 tidak relatif prima.
- **Karena $PBB(7,10) = 1$, maka 7 dan 10 relatif prima.**
- Karena $PBB(8,10) = 2$, maka 8 dan 10 tidak relatif prima.
- **Karena $PBB(9,10) = 1$, maka 9 dan 10 relatif prima.**

Di antara bilangan-bilangan tersebut terdapat 4 buah yang relatif prima dengan 10, yaitu 1, 3, 7 dan 9 sehingga $\phi(10) = 4$.

3. $\phi(15)$

Bilangan bulat positif yang lebih kecil dari 15 adalah: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, dan 14

- **Karena $PBB(1,15) = 1$, maka 1 dan 15 relatif prima.**
- **Karena $PBB(2,15) = 1$, maka 2 dan 15 relatif prima.**
- Karena $PBB(3,15) = 3$, maka 3 dan 15 tidak relatif prima.
- **Karena $PBB(4,15) = 1$, maka 4 dan 15 relatif prima.**
- Karena $PBB(5,15) = 5$, maka 5 dan 15 tidak relatif prima.
- Karena $PBB(6,15) = 3$, maka 6 dan 15 tidak relatif prima.
- **Karena $PBB(7,15) = 1$, maka 7 dan 15 relatif prima.**
- **Karena $PBB(8,15) = 1$, maka 8 dan 15 relatif prima.**
- Karena $PBB(9,15) = 3$, maka 9 dan 15 tidak relatif prima.
- Karena $PBB(10,15) = 5$, maka 10 dan 15 tidak relatif prima.
- **Karena $PBB(11,15) = 1$, maka 11 dan 15 relatif prima.**
- Karena $PBB(12,15) = 3$, maka 12 dan 15 tidak relatif prima.

- **Karena $PBB(13,15) = 1$, maka 13 dan 15 relatif prima.**
- **Karena $PBB(14,15) = 1$, maka 14 dan 15 relatif prima.**

Di antara bilangan-bilangan tersebut terdapat 8 buah yang relatif prima dengan 15, yaitu 1, 2, 4, 7, 8, 11, 13 dan 14 sehingga $\phi(15) = 8$

4. Bilangan bulat positif yang lebih kecil dari 20 adalah: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, dan 19.
- **Karena $PBB(1,20) = 1$, maka 1 dan 20 relatif prima.**
 - Karena $PBB(2,20) = 2$, maka 2 dan 20 tidak relatif prima.
 - **Karena $PBB(3,20) = 1$, maka 3 dan 20 relatif prima.**
 - Karena $PBB(4,20) = 4$, maka 4 dan 20 tidak relatif prima.
 - Karena $PBB(6,20) = 3$, maka 6 dan 20 tidak relatif prima.
 - **Karena $PBB(7,20) = 1$, maka 7 dan 20 relatif prima.**
 - Karena $PBB(8,20) = 4$, maka 8 dan 20 tidak relatif prima.
 - **Karena $PBB(9,20) = 1$, maka 9 dan 20 relatif prima.**
 - Karena $PBB(10,20) = 10$,
maka 10 dan 20 tidak relatif prima.
 - **Karena $PBB(11,20) = 1$, maka 11 dan 20 relatif prima.**
 - Karena $PBB(12,20) = 4$, maka 12 dan 20 tidak relatif prima.
 - **Karena $PBB(13,20) = 1$, maka 13 dan 20 relatif prima.**
 - Karena $PBB(14,20) = 2$, maka 14 dan 20 tidak relatif prima.
 - Karena $PBB(15,20) = 5$, maka 15 dan 20 tidak relatif prima.

- Karena $PBB(16,20) = 4$, maka 16 dan 20 tidak relatif prima.
- **Karena $PBB(17,20) = 1$, maka 17 dan 20 relatif prima.**
- Karena $PBB(18,20) = 2$, maka 18 dan 20 tidak relatif prima.
- **Karena $PBB(19,20) = 1$, maka 19 dan 20 relatif prima.**

Di antara bilangan-bilangan tersebut terdapat 8 buah yang relatif prima dengan 20, yaitu 1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19, sehingga $\phi(20) = 8$

Untuk $n = 1, 2, \dots, 10$, fungsi Euler adalah:

$\phi(1) = 1$	$\phi(6) = 2$
$\phi(2) = 1$	$\phi(7) = 6$
$\phi(3) = 2$	$\phi(8) = 4$
$\phi(4) = 2$	$\phi(9) = 6$
$\phi(5) = 4$	$\phi(10) = 4$

Teorema 1:

- ***Jika p prima, maka setiap bilangan bulat yang lebih kecil dari p relatif prima terhadap p . Dengan kata lain, $\phi(p) = p - 1$ hanya jika n prima.[5]***

Bukti :

Jika p adalah bilangan prima, berdasarkan sifat bilangan prima yang hanya habis dibagi bilangan 1 atau bilangan p sendiri, maka jika dibagi dengan bilangan yang lebih kecil dari n sisa terakhir yang tidak nol adalah 1. Oleh karena itu, setiap bilangan bulat positif yang lebih kecil dari p adalah relatif prima terhadap p . Dapat dikatakan juga bahwa $\phi(p) = p - 1$

Sebaliknya jika p adalah bilangan komposit dan n memiliki sebuah bilangan pembagi d dengan $1 < d < p$ dan d tidak relatif prima terhadap p . Jika didapat salah satu bilangan yang lebih kecil dari p adalah d yang tidak relatif prima terhadap p maka $\phi(p) \leq p - 2$. Oleh karena itu, Jika $\phi(p) = p - 1$, maka p harus merupakan bilangan prima.

Contoh:

Diberikan bilangan prima: 3, 5, 7, 11, dan 13. Tentukan:

1. $\phi(3)$
2. $\phi(5)$
3. $\phi(7)$
4. $\phi(11)$
5. $\phi(13)$

Penyelesaian :

1. Karena 3 adalah bilangan prima, maka $\phi(3) = 3 - 1 = 2$, yaitu: 1 dan 2
2. Karena 5 adalah bilangan prima, maka $\phi(5) = 5 - 1 = 4$, yaitu: 1, 2, 3, dan 4
3. Karena 7 adalah bilangan prima, maka $\phi(7) = 7 - 1 = 6$, yaitu: 1, 2, 3, 4, 5, dan 6.
4. Karena 11 adalah bilangan prima, maka $\phi(11) = 11 - 1 = 10$, yaitu: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, dan 10.
5. Karena 13 adalah bilangan prima, maka $\phi(13) = 13 - 1 = 12$, yaitu: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, dan 12

C. LATIHAN SOAL

1. Tentukan:
 - a. $\phi(11)$
 - b. $\phi(16)$
 - c. $\phi(25)$
2. Hitung nilai dari :
 - a. $\phi(1061)$
 - b. $\phi(2351)$

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Burton, D. M. 2011. *Elementary Number Theory Seventh Edition*. McGraw Hill: New York.
- [2] Gupta, H. 1981. *Euler's totient function and its inverse*. Indian J. Pure appl. Math., 12(1): 22-30.
- [3] https://www.google.com/url?sa=t&source=web&rct=j&url=https://www.slideshare.net/mobile/vionk/fungsi-phi-dan-teorema-euler&ved=2ahUKEwiamsmOtpXuAhWQcn0KHUWQC1wQFjAVegQILxAB&usg=A0vVaw3CLUmEuppqhYh_KvFoFT&cshid=161042193040
- [4] Munir, Rinaldi. 2004. *Bahan Kuliah ke-3 Teory Bilangan (Number Theory)*. Departement Teknik Informatika Institut Teknologi Bandung.
- [5] Raji, Wissam. 2016. *An Introductory Course in Elementary Number Theory*. Published August 18th 2016 by Lulu.com

BAB XIII

” RELATIF PRIMA DAN BILANGAN KOMPOSIT”

(Oleh : Annie Rachmawati Nalman)

A. PENDAHULUAN

Bilangan prima adalah bilangan asli yang bernilai lebih dari 1 dan mempunyai 2 faktor pembagi yaitu 1 dan bilangan itu sendiri. Bilangan prima memiliki 2 faktor, berarti bilangan itu hanya habis dibagi oleh angka 1 dan bilangan itu sendiri. [1] Dua buah bilangan bulat a dan b dikatakan relatif prima jika PBB (a, b) = 1. [2]

Bilangan komposit merupakan lawan dari bilangan prima dengan nilai diatas 1 (satu). Dapat dikatakan bahwa bilangan komposit adalah bilangan asli (*natural number*) yang lebih dari 1 (satu) dan dapat dibagi habis dengan bilangan selain 1 (satu) dan bilangan itu sendiri. Pengertian lainnya yaitu suatu bilangan yang dapat dinyatakan sebagai faktorisasi bilangan bulat atau bilangan yang tercipta dari hasil perkalian setidaknya dua bilangan prima. [3]

B. PEMBAHASAN

Bilangan merupakan suatu konsep matematika yang digunakan untuk pencacahan dan pengukuran atau lebih mudahnya bilangan adalah suatu sebutan untuk menyatakan jumlah/banyaknya sesuatu. Simbol ataupun lambang yang

digunakan untuk mewakili suatu bilangan juga dapat disebut sebagai angka atau lambang bilangan.

Bilangan Prima yaitu suatu bilangan asli yang lebih besar dari 1, yang faktor pembagiya adalah 1 dan bilangan itu sendiri, 2 dan 3 adalah bilangan prima, 4 bukan bilangan prima karena 4 bisa dibagi 2.

Bilangan bulat positif p ($p > 1$) disebut bilangan prima jika pembagiya hanya 1 dan p . Contoh: 23 adalah bilangan prima karena ia hanya habis dibagi oleh 1 dan 23. Karena bilangan prima harus lebih besar dari 1, maka barisan bilangan prima dimulai dari 2, yaitu 2, 3, 5, 7, 11, 13,Seluruh bilangan prima adalah bilangan ganjil, kecuali 2 yang merupakan bilangan genap. Bilangan selain prima disebut bilangan **komposit** (*composite*). Misalnya 20 adalah bilangan komposit karena 20 dapat dibagi oleh 2, 4, 5, dan 10, selain 1 dan 20 sendiri.

Soal dan Pembahasan Bilangan Prima [4]

1. Manakah dari bilangan berikut yang merupakan bilangan prima? 11, 15, 21, 37, 27, 56

Pembahasan:

a) Pembagi 15 = 1, 3, 5, 15 (bukan bilangan prima)

15 bukan bilangan prima, karena habis dibagi 1, 3, 5, 15.

$15 : 5 = 3$, $15 : 3 = 5$, $15 : 15 = 1$. Sedangkan syarat bilangan prima, suatu bilangan yang habis dibagi dengan 1 dan bilangan itu sendiri.

b) Pembagi 21 = 1,3,7,21 (bukan bilangan prima)

21 bukan bilangan prima, karena habis di bagi 1, 3,7, 21.

$21 : 1 = 21$, $21 : 3 = 7$, $21 : 7 = 3$, $21 : 21 = 1$. Sedangkan syarat bilangan prima, suatu bilangan yang habis dibagi dengan 1 dan bilangan itu sendiri.

c) Pembagi 27 = 1,3,9,27 (bukan bilangan prima)

27 bukan bilangan prima, karena habis dibagi 1,3,9,27.

$27 : 1 = 27$, $27 : 3 = 9$, $27 : 9 = 3$, $27 : 27 = 1$. Sedangkan syarat bilangan prima, suatu bilangan yang habis dibagi dengan 1 dan bilangan itu sendiri.

d) Pembagi 56 = 1,2,4,7,8,14,28,56 (bukan bilangan prima).

56 bukan bilangan prima, karena habis di bagi 1,2,4,7,8,14,28,56.

$56 : 1 = 56$, $56 : 2 = 28$, $56 : 4 = 14$, $56 : 7 = 8$, $56 : 8 = 7$,
 $56 : 14 = 4$, $56 : 28 = 2$, $56 : 56 = 1$. Sedangkan syarat bilangan prima, suatu bilangan yang habis dibagi dengan 1 dan bilangan itu sendiri.

e) Pembagi 11 = 1 dan 11 (bilangan prima)

2. Jumlah semua bilangan prima antara 10 – 30 adalah

Pembahasan :

Bilangan prima antara 10 sampai 30 adalah 11, 13, 17, 19, 23, 29.

Jumlah : $11 + 13 + 17 + 19 + 23 + 29 = 112$ [5]

a) Bilangan komposit

Bilangan komposit merupakan lawan dari bilangan prima dengan nilai diatas 1 (satu). Dapat dikatakan bahwa bilangan komposit adalah bilangan asli (*natural number*) yang lebih dari 1 (satu) dan dapat dibagi habis dengan bilangan selain 1 (satu) dan bilangan itu sendiri. Pengertian lainnya yaitu suatu bilangan yang dapat dinyatakan sebagai faktorisasi bilangan bulat atau bilangan yang tercipta dari hasil perkalian setidaknya dua bilangan prima. [3]

Contohnya: 50 bilangan komposit pertama yaitu 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 30, 32, 33, 34, 35, 36, 38, 39, 40, 42, 44, 45, 46, 48, 49, 50, 51, 52, 54, 55, 56, 57, 58, 60, 62, 63, 64, 65, 66, 68, 69, dan 70.

Contoh Soal Bilangan Komposit

- Jika G adalah himpunan bilangan komposit yang kurang dari atau sama dengan 30, maka tentukan anggota dari himpunan G .

Jawaban:

$G = \{4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 30\}$

- Berapakah anggota kedelapan, anggota kesebelas, dan anggota ketujuh belas dari himpunan G?

Jawaban :

Anggota kedelapan dari himpunan G adalah 15, anggota kesebelas dari himpunan G adalah 20, dan anggota ketujuh belas dari himpunan G adalah 27.

- Tentukan pembagi habis dari anggota himpunan G yang terdapat pada soal b.

Jawaban :

Faktor dari anggota kedelapan = 1, 2, 3, 5, 15

Faktor dari anggota kesebelas = 1, 2, 4, 5, 10, 20

Faktor dari anggota ketujuh belas = 1, 2, 3, 9, 27

Setelah kita mengetahui apa itu bilangan komposit, kita akan semakin mudah membedakan antara bilangan prima dan bilangan bukan prima (komposit).

b) Relatif Prima [2]

Dua buah bilangan bulat a dan b dikatakan relatif prima jika $PBB(a, b) = 1$.

Contoh :

20 dan 3 relatif prima sebab $PBB(20, 3) = 1$.

Begitu juga 7 dan 11 relatif prima karena $PBB(7, 11) = 1$.

Tetapi 20 dan 5 tidak relatif prima sebab $PBB(20, 5) = 5$.

Bilangan 20 dan 3 adalah relatif prima karena $PBB(20, 3) = 1$,

atau dapat ditulis

$$2 \cdot 20 + (-13) \cdot 3 = 1, \text{ dengan } m = 2 \text{ dan } n = -13.$$

Tetapi 20 dan 5 tidak relatif prima karena $\text{PBB}(20, 5) = 5 \neq 1$ sehingga 20 dan 5 tidak dapat dinyatakan dalam $m \cdot 20 + n \cdot 5 = 1$.

Teorema 5.

Jika $n = pq$ adalah bilangan komposit dengan p dan q prima, maka $\phi(n) = \phi(p) \cdot \phi(q) = (p - 1)(q - 1)$. [6]

Contoh :

Tentukan $f(21)$.

Penyelesaian:

Karena $21 = 7 \times 3$,

$$f(21) = f(7 - 1) f(3 - 1)$$

$$= 6 \times 2$$

$= 12$ buah bilangan bulat yang relatif prima terhadap 21, yaitu 1, 2, 4, 5, 8, 10, 11, 13, 16, 17, 19, 20. [5]

- Relatif prima dari 21 terhadap 1 adalah 1, karena $\text{PBB}(21,1) = 1$
- Relatif prima dari 21 terhadap 2 adalah 1 karena $\text{PBB}(21,2) = 1$
- 21 terhadap 3 adalah 3 karena $\text{PBB}(21,3) = 3$ (tidak relatif prima)
- Relatif prima dari 21 terhadap 4 adalah 1 karena $\text{PBB}(21,4) = 1$

- Relatif prima dari 21 terhadap 5 adalah 1
karena $PBB(21,5) = 1$
- 21 terhadap 6 adalah 3
karena $PBB(21,6) = 3$ (tidak relatif prima)
- 21 terhadap 7 adalah 7
karena $PBB(21,7) = 7$ (tidak relatif prima)
- Relatif prima dari 21 terhadap 8 adalah 1
karena $PBB(21,8) = 1$
- 21 terhadap 9 adalah 3
karena $PBB(21,9) = 3$ (tidak relatif prima)
- Relatif prima 21 terhadap 10 adalah 1
karena $PBB(21,10) = 1$
- Relatif prima dari 21 terhadap 11 adalah 1
karena $PBB(21,11) = 1$
- 21 terhadap 12 adalah 3
karena $PBB(21,12) = 3$ (tidak relatif prima)
- Relatif prima dari 21 terhadap 13 adalah 1
karena $PBB(21,13) = 1$
- 21 terhadap 14 adalah 7
karena $PBB(21,14) = 7$ (tidak relatif prima)
- 21 terhadap 15 adalah 3
karena $PBB(21,15) = 3$ (tidak relatif prima)
- Relatif prima dari 21 terhadap 16 adalah 1
karena $PBB(21,16) = 1$
- Relatif prima dari 21 terhadap 17 adalah 1

karena PBB $(21,17) = 1$

- 21 terhadap 18 adalah 3
karena PBB $(21,18) = 3$ (tidak relatif prima)
- Relatif prima dari 21 terhadap 19 adalah 1
karena PBB $(21,19) = 1$
- Relatif prima dari 21 terhadap 20 adalah 1
karena PBB $(21,20) = 1$

Teorema 38.

Misalkan m dan n adalah dua bilangan bulat positif yang relatif prima. Kemudian $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$ [7]

Bukti :

Dinyatakan $\phi(m)$ oleh s dan misalkan k_1, k_2, \dots, k_s adalah modulo sistem residu tereduksi m . Demikian pula, dinyatakan $\phi(n)$ oleh t dan misalkan k'_1, k'_2, \dots, k'_t menjadi sistem residu tereduksi modulo n . Perhatikan bahwa jika x termasuk dalam sistem residu tereduksi modulo mn , maka

$$(x, m) = (x, n) = 1$$

Jadi $x \equiv k_i \pmod{m}$ dan $x \equiv k'_j \pmod{n}$

untuk i, j . Sebaliknya jika

$$x \equiv k_i \pmod{m} \text{ dan } x \equiv k'_j \pmod{n}$$

untuk i, j kemudian $(x, mn) = 1$ dan dengan demikian x termasuk dalam modulo sistem residu tereduksi mn . Dengan demikian modulo mn sistem residu tereduksi dapat diperoleh dengan cara

menentukan semua x yang kongruen dengan k_i dan k'_j modulo m dan n masing-masing. Oleh Teorema sisa Cina, sistem persamaan

$$x \equiv k_i \pmod{m} \text{ dan } x \equiv k'_j \pmod{n}$$

memiliki solusi unik. Jadi, perbedaan i dan j akan menghasilkan jawaban yang berbeda. Jadi $\phi(mn) = st$ [7].

C. LATIHAN SOAL

1. Manakah dari bilangan – bilangan berikut yang merupakan bilangan prima 11,15,21,37,27,56 ?.
2. Tentukan :
 - a) Bilangan komposit dari 10.
 - b) Mengapa angka 2 tidak termasuk bilangan komposit ?.
3. Apakah kumpulan bilangan – bilangan berikut merupakan relatif prima atau bukan ?
 - a) 21, 34, 55
 - b) 14, 15, 21
 - c) 15, 21, 51
4. Tentukan :
 - a) $\phi(27)$
 - b) $\phi(21)$
 - c) $\phi(15)$
 - d) $\phi(6)$
 - e) $\phi(12)$

DAFTAR PUSTAKA

- [1] <https://www.advernesia.com/blog/matematika/pengertian-bilangan-prima-adalah/> [Diakses, 11/1/2021].
- [2] <https://ihnformatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/kriptografi/teori%20Bilangan.pdf/> [Diakses,9/1/2021]
- [3] <https://rumuspintar.com/bilangan-komposit/>, [Diakses, 8/1/2021]
- [4] <https://rumuspintar.com/bilangan-prima/>, [Diakses, 8/1/2021]
- [5] <https://rumus.co.id/bilangan-prima/>, [Diakses, 8/1/2021]
- [6] Munir, Rinaldi M.T. 2004. Tahun kuliah ke-3 IF5054 kriptografi Teori bilangan (*Number Teory*). Departemen Teknik Informatika ITB. Bandung.
- [7] Raji, Wissam. 2016. An Introductory Course in Elementary Number Theory, published August 18th2016 by Lulu.com

BAB XIV
RELATIF PRIMA (KOPRIMA) DAN TEOREMA
FERMAT

(Oleh : Sukiman)

A. PENDAHULUAN

A.1. Latar Belakang

Dalam mengenal teori-teori bilangan ada tiga matematikawan yang memberikan kontribusi besar dalam pengembangan teori bilangan yaitu Fermat, Wilson, dan Euler. Ketiga matematikawan ini menciptakan teorema-teorema yang diberikan nama sesuai nama mereka yaitu Teori Fermat, Teori Wilson dan Teori Euler.

Teorema dan konsep terkait yang dikembangkan oleh tiga matematikawan ini memotivasi kami sebagai mahasiswa untuk membuat makalah agar pembaca lebih mengenal bagaimana teori ini digunakan dalam pengembangan ilmu pengetahuan. Dengan mempelajari teorema ini juga, kita bisa mengetahui apa sebenarnya teorema yang didedikasikan oleh Fermat, Wilson, dan Euler serta bagaimana keterkaitan antara ketiga teorema ini.

Salah satu teori tentang bilangan prima pada teori bilangan yang terkenal adalah teori little Fermat. Tetapi teori Fermat hanya berlaku untuk bilangan prima. Pada tahun 1760 Euler dapat menggeneralisasi dari teori little Fermat untuk semua bilangan asli. Untuk membuat generalisasi tersebut, Euler menggunakan

bantuan sebuah fungsi yang kemudian diberi nama fungsi phi Euler dan dinotasikan ϕ . [3]

Fungsi Phi Euler (ϕ) didefinisikan sebagai banyaknya bilangan asli tidak lebih dari n dan saling prima dengan n . Untuk menghitung nilai (n) tanpa harus mendaftarkan bilangan yang memenuhi syarat, diperlukan sebuah formula (n) yang didapat berdasarkan sifat-sifat dari fungsi ϕ . Formula (n) juga dapat digunakan untuk memperoleh sifat-sifat lainnya dari fungsi ϕ . Sebagai sebuah fungsi ϕ tentu memiliki himpunan domain dan range. Tetapi tidak semua bilangan asli merupakan elemen range ϕ . [4]

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan apa yang telah diuraikan diatas, maka akan dibahas mengenai bagaimana menentukan nilai ϕ pada pangkat utama.

1.3 Pembatasan Masalah

Dalam proses penyandian teknik yang dapat digunakan cukup banyak, maka dibutuhkan pembatasan masalah. Berdasarkan dari rumusan masalah diatas maka permasalahan dibatasi pada Teorema 16. Jika p bilangan prima dan $k > 0$, maka

$$\binom{k}{p} = p^k - p^{k-1}$$

B. PEMBAHASAN

1. Relatif Prima (koprime)

Bilangan relatif prima merupakan beberapa bilangan yang memiliki FPB berupa 1. FPB (Faktor Persekutuan Terbesar) adalah faktor terbesar yang membagi habis bilangan. Bilangan relatif prima didefinisikan dua buah bilangan bulat a dan b dikatakan relatif prima jika pembagi bersama besar /PPB (a,b)
 $= 1$ [6]

Contoh:

1. Bilangan 2 dan 3 adalah bilangan relatif prima karena PPB dari 2 dan 3 adalah 1.
2. Bilangan 20 dan 3 adalah bilangan relatif prima karena PPB dari 20 dan 3 adalah 1.
3. Bilangan 6 dan 13 adalah bilangan relatif prima karena PPB dari 6 dan 13 adalah 1.

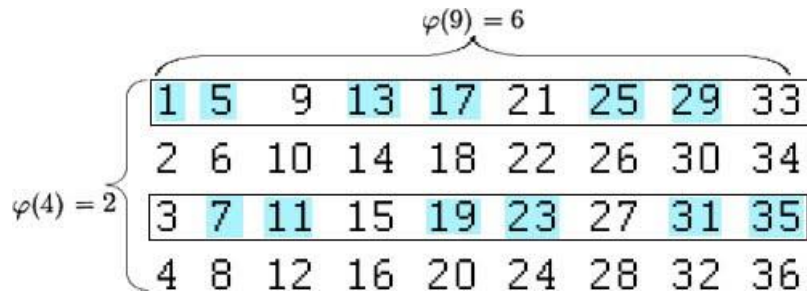
a dan b relatif prima, maka terdapat bilangan bulat m dan n sedemikian sehingga $ma+nb = 1$. a dan b tidak relatif prima jika terdapat bilangan bulat $ma + nb \neq 1$.

Jika a dan b relatif prima, maka terdapat bilangan bulat m dan n sedemikian sehingga : $ma + nb = 1$

Contoh:

1. Bilangan 20 dan 5 bukan bilangan relatif prima karena PPB dari 20 dan 5 adalah 5.
2. Bilangan 12 dan 26 bukan bilangan relatif prima karena PPB dari 12 dan 26 adalah 3.

3. Bilangan yang diberi warna biru adalah bilangan koprima dengan 36 [7]



Seperti didefinisi sebelumnya, fungsi φ Euler menghitung jumlah bilangan bulat yang lebih kecil dari dan relatif prima ke bilangan bulat tertentu. Pertama-tama menghitung nilai fungsi phi pada bilangan prima dan pangkat prima.

Fungsi Phi Euler $\varphi(m)$ atau $\mathcal{Q}(m)$ menyatakan kardinal himpunan bilangan asli dimana $\text{fpb}(m,n) = 1$. Dikemukakan oleh Leonhard Euler (L. 15 April 1707, Swiss. w. 18 September 1783, Rusia). Pada kisaran tahun 1750-an. Lalu, Notasi $\varphi(m)$ atau $\mathcal{Q}(m)$ ditulis pertama kali oleh Gauss [3]

Contoh :

Bilangan bulat positif yang < 10 adalah 1,2,3,4,5,6 7,8,9. Diantara bilangan-bilangan tersebut yang saling prima terhadap 10 adalah 1,3,7,9, maka banyaknya bilangan yang saling prima terhadap 10 adalah sebanyak 4 sehingga $\varphi(10) = 4$.

2. Fungsi Phi Euler (φ)

Fungsi phi euler merupakan salah satu teori tentang bilangan prima. Dalam teori bilangan fungsi phi euler dikenal dengan teori little Fermat. Dua bilangan bulat p dan q dihitung $n = pq$ untuk mendapatkan nilai totient dari n digunakan fungsi phi euler (φ).

Definisi 2.4. [5]

Fungsi phi euler (φ) didefinisikan sebagai fungsi yang menyatakan banyaknya bilangan bulat positif yang lebih kecil dari sebuah bilangan bulat dan relatif prima terhadap bilangan bulat tersebut.

Maka terdapat bilangan bulat positif n , maka nilai $\varphi(n)$ merupakan banyaknya bilangan bulat positif yang lebih kecil dari n dan relatif prima terhadap n .

Contoh:

Misalkan diberikan $n = 10$, maka bilangan yang kecil dari adalah 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Bilangan yang relatif prima terhadap 10 hanya 1, 3, 7, dan 9 sehingga

$$\varphi(10) = 4$$

Defenisi 1 [8]

Jika n prima, maka $\varphi(n) = n - 1$ maka prima

Bukti : Jika p adalah bilangan prima berdasarkan sifat bilangan prima yang hanya habis dibagi bilangan 1 atau bilangan p sendiri, maka jika dibagi dengan bilangan yang lebih kecil dari p sisa

terakhir yang tidak nol adalah 1 oleh karena itu setiap bilangan bulat positif yang lebih kecil dari p adalah relative prima terhadap p. Dapat dikatakan juga bahwa $\varphi(n)$.

Sebaliknya jika p adalah bilangan komposit dan p memiliki sebuah bilangan pembagi d dengan $1 < d < p$ dan d tidak relative prima terhadap p. Jika didapat salah satu bilangan yang lebih kecil dari p adalah d yang tidak relatif $\varphi(p)$.

Contoh :

Misalkan diberikan bilangan prima $p = 7$ tentukan $\varphi(7)$?

Penyelesaian :

Karena 7 adalah bilangan prima maka

$$\begin{aligned} \varphi(7) &= 7 - 1 \\ &= 6 \end{aligned}$$

Maka ada 6 bilangan yang relatif prima terhadap 7 yaitu 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Teorema 2 [8]

Jika m dan n adalah bilangan bulat positif yang relatif prima, maka

$$\varphi(mn) = \varphi(m) \varphi(n)$$

Bukti:

Ambil sembarang bilangan asli m dan n dengan $(m,n) = 1$

Misalkan

$$m = p_1^{a_1}, p_2^{a_2}, p_3^{a_3}, p_4^{a_4}, \dots p_k^{a_k} \quad \text{dan}$$

$$n = q_1^{b_1}, q_2^{b_2}, q_3^{b_3}, q_4^{b_4}, \dots q_k^{b_k}$$

karena $(m,n) = 1$ maka faktor-faktor prima p dan q tidak ada yang sama sehingga

$$mn = p_1^{a_1}, p_2^{a_2}, p_3^{a_3}, p_4^{a_4}, \dots, p_k^{a_k} \quad q_1^{b_1}, q_2^{b_2}, q_3^{b_3}, q_4^{b_4}, \dots, q_k^{b_k}$$

Dengan demikian:

$$\varphi(mn) = \varphi(p_1^{a_1}, p_2^{a_2}, p_3^{a_3}, p_4^{a_4}, \dots, p_k^{a_k} \quad q_1^{b_1}, q_2^{b_2}, q_3^{b_3}, q_4^{b_4}, \dots, q_k^{b_k})$$

$$\varphi(mn) = \varphi((p_1^{a_1}, p_2^{a_2}, p_3^{a_3}, p_4^{a_4}, \dots, p_k^{a_k}) (q_1^{b_1}, q_2^{b_2}, q_3^{b_3}, q_4^{b_4}, \dots, q_k^{b_k}))$$

$$\begin{aligned} \varphi(mn) &= \varphi(p_1^{a_1}, p_2^{a_2}, p_3^{a_3}, p_4^{a_4}, \dots, p_k^{a_k}) \varphi(q_1^{b_1}, q_2^{b_2}, q_3^{b_3}, q_4^{b_4}, \dots, q_k^{b_k}) \\ &= \varphi(m) \varphi(n) \end{aligned}$$

Jadi $\varphi(mn)$ adalah fungsi ganda

Identitas : [6]

$$\varphi(1) = 0$$

$$\varphi(2) = 1$$

$$\varphi(P) = P - 1 \text{ untuk } P \text{ prima}$$

$$\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n) \text{ jika } \text{fpb}(m,n)=1$$

$$\varphi(P^n) = P^{n-1} (P-1)$$

$$\varphi(P_1 \times P_2 \times \dots \times P_n) = (P_1-1)(P_2-1)(P_3-1)\dots(P_n-1)$$

•

•

•

$$\varphi(m,n) = \Phi(m).\varphi(n) .$$

Contoh :

Diketahui $\varphi(6)$ dan $\varphi(5)$ tentukan $\varphi(6.5)$?

Penyelesaian :

$\varphi(6) = 2$ yaitu 1 dan 3

$\varphi(5) = 4$ yaitu 1, 2, 3, dan 4

Maka

$\varphi(6.5) = 2.4$

$\varphi(30) = 8$

Jadi bilangan yang relatif prima $\varphi(30)$ adalah 8 yaitu 1, 7, 11, 17, 19, 23, 29

3. Teorema Fermat

Teorema 2.9.1. Fermat Little Theorem [7]

Jika p adalah prima dan a adalah bilangan bulat positif yang tidak habis dibagi p ,

Maka

$$a^{p-1} = 1 \pmod{p}$$

Bukti:

Misalkan $p - 1$ bilangan bulat yang pertama sebagai pengali-pengalih dari a , maka

$$a, 2a, 3a, \dots, (p-1)a$$

Tidak satupun bilangan-bilangan diatas yang kongruen terhadap modulo p atau kongruen terhadap nol. Jika persyaratan tersebut terpenuhi

Maka

$$ra \equiv sa \pmod{p} \quad 1 = r = s = p-1$$

kemudian a dapat dihilangkan

sehingga

$$r = s \pmod{p}$$

dimana hal ini tidak mungkin . oleh karena itu, bilangan-bilangan bulat yang sebelumnya haruslah kongruen modulo

$a, 2a, 3a, \dots, (p-1)a$ terhadap p dalam satu urutan tertentu.

Dengan mengalikan semua kongruensian tersebut bersama-sama didapat

$$a \cdot 2a \cdot 3a \cdot \dots \cdot (p-1)a \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (p-1) \pmod{p}$$

dimana

$$a^{p-1} (p-1)! \equiv ((p-1)! \pmod{p})$$

Setelah $(p-1)!$ dihilangkan dari kedua ruas sisi persamaan kekongruensian diatas (maka terdapat p relative prima terhadap p , sehingga $p \nmid (p-1)!$, sehingga akhir persamaan tersebut adalah

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \quad \text{Persamaan ini dinamakan}$$

persamaan Fermat

Teorema 2.9.2 teorema Akibat [7]

Jika p adalah bilang prima, maka $a^p \equiv a \pmod{p}$ untuk semua bilangan a

4. Menentukan nilai ϕ pada pangkat utama.

Theorem 37. Let p be a prime and m a positive integer, then

$$\phi(p^m) = p^m - p^{m-1}. \quad [1]$$

Proof. Note that all integers that are relatively prime to p^m and that are less than p^m are those that are not multiple of p . Those integers are $p, 2p, 3p, \dots, p^{m-1}p$. There are p^{m-1} of those integers that are not relatively prime to p^m and that are less than p^m . Thus

$$\begin{aligned} \phi(p^m) &= \\ p^m - p^{m-1}. \quad [1] \end{aligned}$$

Teorema 6.

Jika p bilangan prima dan $k > 0$, maka

$$\begin{aligned} \phi(p^k) &= p^k - p^{k-1} \\ &= p^{k-1}(p-1). \quad [2] \end{aligned}$$

Bukti

Perhatikan bahwa semua bilangan bulat yang relatif prima terhadap p^k dan yang kurang dari p^k adalah mereka yang bukan kelipatan p . Bilangan tersebut adalah $p, 2p, 3p, \dots, p^{m-1}p$. Ada p^{m-1} dari bilangan bulat tersebut yang tidak relatif prima terhadap p^m dan itu adalah kurang dari p^m . [1]

Contoh:

$$\begin{aligned} 1. \quad \varphi(7^3) &= 7^3 - 7^2 \\ &= 343 - 49 \\ &= 294. \end{aligned} \quad [1]$$

$$\begin{aligned} 2. \quad \varphi(2^{10}) &= 2^{10} - 2^9 \\ &= 512 \end{aligned} \quad [1]$$

3. Tentukan $\varphi(16)$. [2]

$$\begin{aligned} \varphi(16) &= \varphi(2^4) \\ &= 2^4 - 2^{4-1} \\ &= 2^4 - 2^3 \\ &= 16 - 8 \\ &= 8 \end{aligned}$$

4. Tentukan bilangan-bilangan berikut prima atau relati prima

a. Bilangan 3 dan 7 ?

Penyelesaian :

Bilangan 3 dan 7 adalah bilangan relatif prima karena PPB dari 3 dan 7 adalah 1.

b. Bilangan 5 dan 14?

Penyelesaian :

Bilangan 5 dan 14 adalah bilangan relatif prima karena PPB dari 5 dan 14 adalah 1.

c. Bilangan 23 dan 33?

Penyelesaian :

Bilangan 23 dan 33 adalah bilangan relatif prima karena PPB dari 23 dan 33 adalah 1.

5. Tunjukkan bahwa bilangan-bilangan berikut relatif prima pada fungsi ganda?

a. $\varphi(3)$ dan $\varphi(8)$? ...

Jawab

$$\varphi(3) = 2 \text{ yaitu } 1 \text{ dan } 2$$

$$\varphi(8) = 4 \text{ yaitu } 1, 3, 5, \text{ dan } 7$$

Maka

$$\varphi(3 \cdot 8) = 2 \cdot 4$$

$$\varphi(24) = 8$$

Jadi bilangan yang relatif prima $\varphi(24)$ adalah 8 yaitu 1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23,

b. $\varphi(5)$ dan $\varphi(7)$? ...

Jawab

$$\varphi(5) = 4 \text{ yaitu } 1, 2, 3, 4$$

$$\varphi(7) = 6 \text{ yaitu } 1, 2, 3, 4, 5, \text{ dan } 6$$

Maka

$$\varphi(5 \cdot 7) = 4 \cdot 6$$

$$\varphi(35) = 24$$

Jadi bilangan yang relatif prima $\varphi(35)$ adalah 24 yaitu

1, 2, 3, 4, 6, 8
9, 11, 12, 13, 14, 16,
17, 18, 19, 22, 23, 26,
27, 29, 31, 32, 33, 34

6. Diketahui

a. $\phi(81) = \dots$

Jawab:

$$\begin{aligned}\phi(81) &= \phi(3^4) \\ &= 3^4 - 3^3 \\ &= 81 - 27 \\ &= 54\end{aligned}$$

b. $\phi(64) = \dots$

Jawab:

$$\begin{aligned}\phi(64) &= \phi(2^6) \\ &= 2^6 - 2^5 \\ &= 64 - 32 \\ &= 32\end{aligned}$$

c. $\phi(625) = \dots$

Jawab:

$$\begin{aligned}\phi(625) &= \phi(5^4) \\ &= 5^4 - 5^3 \\ &= 625 - 125 \\ &= 500\end{aligned}$$

C. LATIHAN SOAL

1. Tentukan bilangan-bilangan berikut prima atau relati prima
 - a. Bilangan 4 dan 13 ?
 - b. Bilangan 8 dan 24?
 - c. Bilangan 17 dan 26?
- .
3. Tunjukkan bahwa bilangan-bilangan berikut relatif prima pada fungsi ganda?
 - a. $\phi(4)$ dan $\phi(5)$? ...
 - b. $\phi(3)$ dan $\phi(8)$? ...
4. Diketahui
 - a. $\phi(216) = \dots$
 - b. $\phi(243) = \dots$
 - c. $\phi(2.401) = \dots$

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Raji Wissam. 2013. *An Introductory Course in Elementary Number Theory*. American University of Beirut
- [2] Rinaldi Munir, 2004. *Teori Bilangan (Number Theory)*. Departemen Teknik Informatika Institut Teknologi Bandung. Bandung
- [3] https://id.wikipedia.org/wiki/Fungsi_phi_Euler
- [4] <http://hendrydext.blogspot.com/2009/09/mengenal-euler-phi-function.html>
- [5] Syirazi, Thresye, dkk. 2017. Sifat-sifat Fungsi Phi EULER dan Batas Prapeta Fungsi Phi EULER. *Jurnal Matematika Terapan*. F MIPA Universitas Lambung Mangkurat.
- [6] <https://nursatria.com/2013/09/20/kemungkinan-2-bilangan-adalah-relatif-prima/>
- [7] <http://library.binus.ac.id/eColls/eThesisdok/Bab2HTML/LKT20040020Bab2/page13.html>
- [8] <https://www.slideshare.net/vionk/fungsi-phi-dan-teorema-euler>



TEORI BILANGAN

Konsep bilangan awalnya hanya untuk kepentingan menghitung dan mengingat jumlah. Lambat laun, setelah para ahli matematika menambah pebendaharaan simbol dan kata-kata yang tepat untuk mendefinisikan bilangan, bahasa matematika ini menjadi sesuatu yang penting dalam setiap perubahan kehidupan. Bilangan senantiasa hadir dan dibutuhkan dalam sains, teknologi, dan ekonomi bahkan di gua-gua dengan mengandalkan makanannya dari tanaman dan pepohonan di sekitar gua atau berburu untuk sekali makan, kehadiran bilangan, hitung menghitung, atau matematika tidaklah terlalu dibutuhkan.

Namun, beriring waktu manusia menggunakan kerikil, menggunakan simpul pada tali, menggunakan jari jemarinya atau memakai ranting untuk menyatakan banyak hewan dan kawannya atau anggota keluarga yang tinggal bersamanya. Ketika seseorang berpikir tentang bilangan dua, maka dalam beranaknyanya telah tertanam pengertian terdapat benda sebanyak dua buah. Misalnya ada dua katak dan dua keping, dan selanjutnya kata "dua" dilambangkan dengan "2". Karena menyatakan bilangan dengan menggunakan kerikil, ranting, atau jari dirasakan tidak cukup praktis, maka mulai berpikir untuk menggambarkan bilangan itu dalam suatu lambang. Lambang (simbol) untuk menulis sebuah bilangan disebut angka.

Teori Bilangan adalah salah satu cabang dari matematika murni yang mempelajari sifat-sifat bilangan bulat dan mengandung berbagai masalah terbuka yang dapat dengan mudah dimengerti sekalipun oleh ahli matematika. Dalam teori bilangan dasar, bilangan bulat dipelajari tanpa menggunakan teknik dari area matematika lainnya. Pertanyaan tentang sifat dapat dibagi, algoritme euklidean untuk menghitung faktor persekutuan terbesar, faktorisasi bilangan bulat dalam bilangan prima, penelitian tentang bilangan sempurna dan kongruensi.

ISBN 978-623-7074-62-5



9 786237 074625

UPP
FKIP UNIB

Penerbitan dan Publikasi Fkip Univ. Bengkulu
Gedung Laboraturium Pembelajaran FKIP
Jalan W.R. Supratman, Kandang Limun, Kota Bengkulu 38371A
Telp. (0736) 21186, 0811737956 Fax. (0736) 21186
Laman : <http://fkip.unib.ac.id/unit-penerbitan>
Email : uppfkip@unib.ac.id