

EDGE MAGIC TOTAL LABELING PADA GRAPH (6, 5)-CYCLE BOOKS $B(6, 1, 5, n, 1)$ UNTUK $1 \leq n \leq 4$

Roulitua Gultom¹, Mudin Simanihuruk², Baki Swita³
Mahasiswa Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Bengkulu, Bengkulu¹
Dosen Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Bengkulu, Bengkulu^{2,3}
Email : roulituagultom08@gmail.com¹

ABSTRAK

Edge magic total labeling pada graph $G = (V, E)$ adalah suatu fungsi bijektif $f: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, v + e\}$; dengan $v = |V(G)|$ dan $e = |E(G)|$ sehingga $\forall x, y \in V(G), \forall (x, y) \in E(G)$ berlaku $f(x) + f(x, y) + f(y) = k$. Bilangan k disebut *magic constant*. Graph $G = (V, E)$ mempunyai *super edge magic total labeling* bila label *vertex* adalah $\{1, 2, \dots, v\}$. Graph (a, b) -cycle books $B(a, m, b, n, t)$ adalah graph yang terdiri dari m -copies cycle C_a dan n copies cycle C_b dengan *common path* P_t . Tujuan dari penelitian ini adalah untuk menyelidiki *edge magic total labeling* pada graph $(6, 5)$ -cycle books $B(6, 1, 5, n, 1)$ untuk $1 \leq n \leq 4$. Hasil penelitian menunjukkan bahwa graph $(6, 5)$ -cycle books $B(6, 1, 5, n, 1)$ memiliki *edge magic total labeling* untuk $n = 1$, memiliki *super edge magic total labeling* untuk $n = 3$, dan tidak memiliki *super edge magic total labeling* untuk $n = 1, 2, 4$.

1. PENDAHULUAN

Pelabelan *graph* merupakan salah satu topik penelitian yang menarik pada *graph theory*. Ada beberapa jenis pelabelan *graph*, salah satu diantaranya adalah *edge magic total labeling*. *Edge magic total labeling* adalah pelabelan *vertex* dan *edge* dari suatu *graph* sehingga jumlah label setiap *edge* dan kedua *vertex* yang *incident* dengan *edge* tersebut adalah konstan. Himpunan *vertex* dapat dinotasikan dengan $V(G)$ dan himpunan *edge* dapat dinotasikan dengan $E(G)$. Secara matematis, *edge magic total labeling* adalah suatu fungsi bijektif $f: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, v + e\}$; dengan $v = |V(G)|$ dan $e = |E(G)|$ sehingga $\forall x, y \in V(G), \forall (x, y) \in E(G)$ berlaku $f(x) + f(x, y) + f(y) = k$. Bilangan k disebut *magic constant* pada G (lihat Marr dan Wallis, 2013:15).

Edge magic total labeling pada G disebut *super edge magic total labeling* apabila label *vertex* adalah $\{1, 2, \dots, v\}$ dengan $v = |V(G)|$ (Marr dan Wallis, 2013:15). *Edge magic total labeling* pada beberapa *graph* telah diteliti, diantaranya adalah *edge magic total labeling* pada *cycle* dan *cycle books*. *Edge magic total labeling* pada graph (a, b) -cycle books $B(a, m, b, n, t)$ merupakan salah satu area penelitian yang cukup populer.

Graph (a, b) -cycle books $B(a, m, b, n, t)$ adalah *graph* yang terdiri dari m -copies cycle C_a dan n copies cycle C_b dengan *common path* P_t . Apabila $a = b$ dan $m + n = u$, graph (a, b) -cycle books $B(a, m, b, n, t)$ dinotasikan dengan a -cycle books $B(a, u, t)$. Beberapa hasil penelitian *edge magic total labeling* pada graph (a, b) -cycle books $B(a, m, b, n, t)$ telah ditemukan.

Marr dan Wallis (2013) telah menunjukkan *graph 3-cycle books* $B(3, u, 2)$ memiliki *edge magic total labeling* untuk setiap bilangan bulat positif $u \geq 2$. Slamin, dkk (2002) telah menunjukkan *graph (3)-cycle books* $B(3, u, 1)$ untuk $3 \leq u \leq 5$ dan $u = 7$ memiliki *super edge magic total labeling*.

Figuerola-centeno, Ichisima, dan Muntaner-Batle (2001) telah menunjukkan *edge magic total labeling* pada *graph 4-cycle books* $B(4, u, 2)$ untuk setiap bilangan bulat positif $u \geq 2$, dengan $k = 7u + 6$. Figuerola-centeno, Ichisima, dan Muntaner-Batle (2001) juga telah menunjukkan *super edge magic total labeling* pada *graph 4-cycle books* $B(4, u, 2)$ untuk semua kasus u yang mungkin untuk, $u \leq 12$. Sitohang, Swita dan Simanihuruk (2018) telah menunjukkan bahwa *graph (4,3)-cycle books* $B(4, 1, 3, n, 2)$ memiliki *edge magic total labeling* untuk setiap bilangan bulat positif n dengan $k = 4n + 12$. *Edge magic total labeling* pada *graph (4,3)-cycle books* $B(4, m, 3, n, 2)$ juga telah ditemukan untuk beberapa m dan n yang lain (lihat Anggara, 2018; Ropesa, 2018; Tuplihuna, 2018; Mardalena, 2018).

Syukurillah (2016), Santoso (2016), Sibarani (2017), telah menemukan *edge magic total labeling* pada *graph 5-cycle books* $B(5, u, t)$ untuk beberapa u dan t . Andari (2018), Marbun (2018) telah menunjukkan bahwa *graph (5,3)-cycle books* $B(5, m, 3, n, 2)$ memiliki *edge magic total labeling* untuk beberapa m dan n . Susanti (2018) telah menunjukkan bahwa *graph (5,3)-cycle books* $B(5, 2, 3, n, 2)$ memiliki *super edge magic total labeling* $\forall n$ dengan $k = 3n + 22$.

Amelia (2016), Widiyantini (2016) telah menunjukkan bahwa *graph 7-cycle books* $B(7, u, 2)$ memiliki *edge magic total labeling* untuk beberapa u . Swita, Rafflesia, Mariasiti, Adji dan Simanihuruk (2019) telah menunjukkan bahwa *graph (7,3)-cycle books* $B(7, 1, 3, n, 2)$ memiliki *edge magic total labeling* untuk setiap n dengan $k = 4n + 20$. Swita, Rafflesia, Mariasiti, Adji dan Simanihuruk (2019) juga telah menunjukkan bahwa *graph (7,3)-cycle books* $B(7, 2, 3, n, 2)$ dan *graph (a, 3)-cycle books* $B(a, 1, 3, n, 2)$ untuk $a = 4x - 1$; x adalah bilangan bulat positif, memiliki *super edge magic total labeling*. Pitaloka (2017) telah menunjukkan bahwa *graph (8,3)-cycle books* $B(8, 1, 3, n, 2)$ memiliki *edge magic total labeling* untuk $1 \leq n \leq 6$, masing-masing dengan $k = 26, 30, 34, 38, 40$.

Beberapa hasil penelitian *edge magic total labeling* pada *graph (6, b)-cycle books* $B(6, m, b, n, t)$ juga telah ditemukan. Puspita (2015) telah menunjukkan bahwa *graph 6-cycle books* $B(6, u, 2)$ memiliki *edge magic total labeling* untuk $u = 2$. Wibowo (2015) telah menunjukkan bahwa *graph 6-cycle books* $B(6, u, 3)$ memiliki *edge magic total labeling* untuk $u = 2$ dengan $k = 38$. Basir (2016) telah menunjukkan bahwa *graph 6-cycle books* $B(6, u, 4)$ memiliki *edge magic total labeling* untuk $u = 2$ dengan $k = 26$ dan $u = 3$ dengan $k = 34$. Saputra (2016) telah menunjukkan bahwa *graph 6-cycle books* $B(6, u, 4)$ memiliki *edge magic total labeling* untuk $u = 4$ dengan $k = 42$ dan

$u = 5$ dengan $k = 50$. Sianturi (2017) telah menunjukkan bahwa $graph(6,3)$ -cycle books $B(6,1,3,n,2)$ memiliki *edge magic total labeling* untuk $1 \leq n \leq 8$, masing-masing dengan $k = 22, 26, 30, 34, 38, 42, 46$, dan 50. *Edge magic total labeling* pada $graph(6,5)$ -cycle books $B(6,1,5,n,1)$ belum ditemukan untuk $1 \leq n \leq 4$. Oleh karena itu, penulis tertarik untuk melakukan penelitian lebih lanjut tentang *edge magic total labeling* pada $graph(a,b)$ -cycle books $B(a,m,b,n,t)$.

2. TINJAUAN PUSTAKA

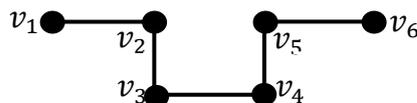
2.1 Konsep Dasar Graph

Graph G terdiri dari himpunan berhingga $V(G)$ dari objek yang disebut titik (*vertex*) dan himpunan $E(G)$ dari pasangan *vertex* yang tidak berurutan, $E(G)$ disebut sisi (*edge*) (Marr dan Wallis, 2013:6). Contoh sebuah *graph* G dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$. Bila *edge* e_i menghubungkan *vertex* v_k dan v_j , *edge* e_i dapat ditulis sebagai $e_i = \{v_k, v_j\}$.

2.2 Walk, Path dan Cycle

Definisi 2.1 (Simanihuruk, 2009). Perhatikan $W = v_0, e_1, v_1, \dots, e_k, v_k$, W disebut *walk* yaitu barisan yang suku-sukunya bergantian diantara *vertex* dan *edge* sedemikian sehingga v_{i-1} dan v_i *incident* dengan *edge* e_i . *Walk* dari v_0 dan v_k sering dituliskan (v_0, v_k) . Perhatikanlah bahwa e_i kemungkinan bisa sama dengan e_j atau v_i sama dengan v_j . Jika setiap v_0, v_1, \dots, v_k dari W semuanya berbeda maka W disebut *path*. *Path* yang *vertex* awalnya sama dengan *vertex* akhir disebut *cycle*. *Path* dengan n *vertex* disimbolkan dengan P_n dan *cycle* dengan n *vertex* disimbolkan dengan C_n .

Contoh *graph* P_6 dapat dilihat pada Gambar 2.2 berikut.



Gambar 2.1 Path 6-vertex (P_6)

2.3 Edge Magic Total Labeling

Diberikan suatu *graph* $G = (V(G), E(G))$ dengan $v = |V(G)|$ dan $e = |E(G)|$.

Definisi 2.2 (Marr dan Wallis, 2013:15). *Edge magic total labeling* adalah suatu fungsi bijektif $f: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, v + e\}$; dengan $v = |V(G)|$ dan $e = |E(G)|$ sehingga $\forall x, y \in V(G), \forall (x, y) \in E(G)$ berlaku $f(x) + f(x, y) + f(y) = k$. Bilangan k disebut *magic constant* pada G .

2.4 Edge Magic Total Labeling pada Graph Cycle Books

Cycle books adalah *graph* yang mengandung dua komponen utama sebagaimana yang dimiliki sebuah buku atau *book*, yaitu lembaran/halaman yang

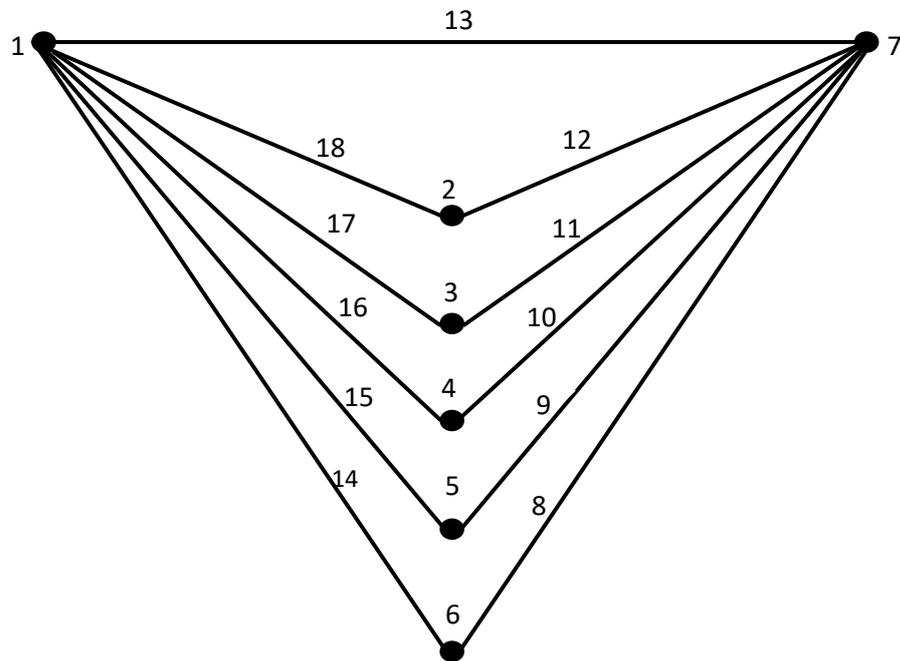
merefleksikan bentuk *graph cycle* dan pengikat lembaran yang strukturnya merupakan *graph* jenis *path*. *Graph (a,b)-cycle books* $B(a, m, b, n, t)$ merupakan *graph* yang memuat m -copies cycle C_a dan n copies cycle C_b dengan *common path* P_t . Para peneliti telah berhasil menyelidiki *edge magic total labeling* pada *graph (a,b)-cycle books* $B(a, m, b, n, t)$ untuk beberapa nilai a, b, m, n, t . Berikut beberapa hasil penelitian *edge magic total labeling* pada *graph (a,b)-cycle books* $B(a, m, b, n, t)$ yang telah ditentukan.

2.4.1 *Edge Magic Total Labeling* pada *Graph (3,b)-Cycle Books* $B(3, m, b, n, 2)$

Marr dan Wallis (2013) telah menunjukkan *edge magic total labeling* pada *graph 3-cycle books* $B(3, u, 2)$ untuk setiap bilang bulat positif $u \geq 2$ sebagaimana ditunjukkan pada teorema berikut.

Teorema 2.3 (Marr dan Wallis, 2013). Jika G adalah *graph 3-cycle books* $B(3, u, 2)$, maka G memiliki *edge magic total labeling* untuk setiap bilang bulat positif ≥ 2 .

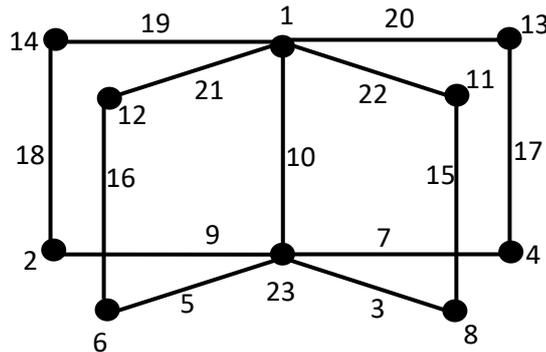
Gambar berikut merupakan contoh *edge magic total labeling* pada *graph 3-cycle books* $B(3, 5, 2)$ dengan *magic constant* $k = 21$.



Gambar 2.2 *Edge magic total labeling* pada *graph 3-cycle books* $B(3, 5, 2)$

2.4.2 Edge Magic Total Labeling pada Graph $(4, b)$ -Cycle Books $B(4, m, b, n, 2)$

Figuerola-centeno, Ichisima, dan Muntaner-Batle (2001) telah menunjukkan *edge magic total labeling* dari *graph 4-cycle books* $B(4, u, 2)$ untuk setiap bilangan bulat positif u , dengan $k = 7u + 6$. Gambar berikut merupakan contoh *edge magic total labeling* dari *graph 4-cycle books* $B(4, 4, 2)$ dengan $k = 7u + 6 = 34$.



Gambar 2.3 Edge magic total labeling pada graph 4-cycle books $B(4, 4, 2)$

Figuerola-centeno, Ichisima, dan Muntaner-Batle (2001) juga telah menunjukkan *super edge magic total labeling* pada *graph 4-cycle books* $B(4, u, 2)$ untuk semua kasus u yang mungkin $u \leq 12$. Salah satu teorema yang telah ditemukan Figuerola-centeno, Ichisima, dan Muntaner-Batle dinyatakan pada teorema 2.4 berikut.

Teorema 2.4 (Figuerola-centeno, Ichisima, dan Muntaner-Batle, 2001). *Graph* $G = (V, E)$ dikatakan *super edge magic* jika dan hanya jika terdapat fungsi bijektif $f: V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, v\}$ sedemikian sehingga,

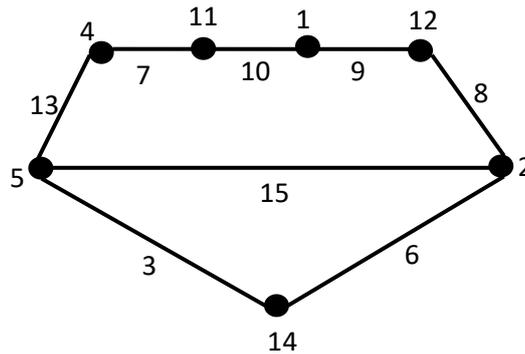
$$S = \{f(u) + f(v) ; u, v \in E(G)\}$$

memuat e bilangan bulat berurut. Dalam kasus ini, f dikatakan *super edge magic total labeling* dari *graph* G dengan $k = v + e + s$ dimana $s = \min(S)$ dan

$$S = \{k - (v + 1), k - (v + 2), \dots, k - (v + e)\}.$$

2.4.3 Edge Magic Total Labeling pada Graph $(6,b)$ -Cycle Books $B(6, m, b, n, 2)$

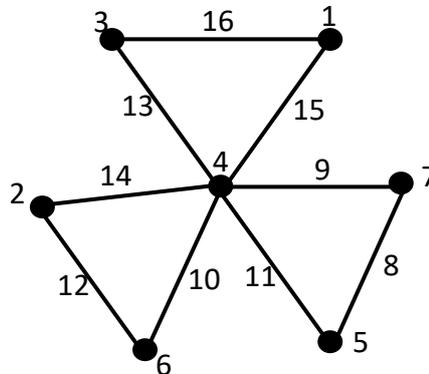
Sianturi (2017) telah menunjukkan bahwa graph $(6,3)$ -cycle books $B(6,1,3,n,2)$ memiliki *edge magic total labeling* untuk $1 \leq n \leq 8$. Berikut merupakan contoh *edge magic total labeling* pada graph $B(6,1,3,1,2)$ dengan $k = 22$.



Gambar 2.4 Edge magic total labeling pada $(6, 3)$ -cycle books $B(6, 1, 3, 1, 2)$

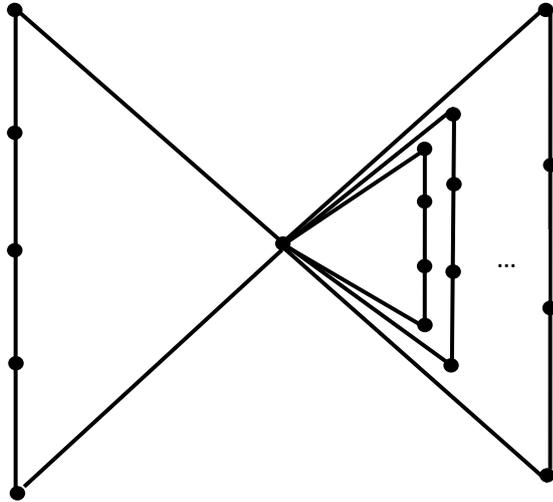
2.4.4 Edge Magic Total Labeling pada Graph (a,b) -Cycle Books $B(a, m, b, n, 1)$

Bila $a = b$ dan $m + n = u$, maka graph $B(a, m, b, n, t)$ akan disimbolkan dengan $B(a, u, t)$. *Edge magic total labeling* pada graph $B(a, u, t)$ belum banyak diketahui. Namun demikian, beberapa *edge magic total labeling* dari $B(a, u, t)$ sudah ditemukan. Slamin, dkk (2002) telah menunjukkan bahwa graph a -cycle books $B(a, u, t)$ adalah *super edge magic total labeling* jika dan hanya jika $3 \leq u \leq 5$ dan $u = 7$ untuk $a = 3$. Graph $B(3, u, t)$ mereka sebut *friendship graph*. Gambar berikut merupakan contoh *super edge magic total labeling* pada graph 3-cycle books $B(3, u, 1)$ untuk $u = 4$.



Gambar 2.5 Super edge magic total labeling pada graph 3-cycle books $B(3, 3, 1)$

Skripsi ini menyelidiki *edge magic total labeling* pada $(6,1,5, n, 1)$. Gambar berikut merupakan *graph (6,5)-cycle books* $B(6,1,5, n, 1)$.



Gambar 2.6 *Graph (6,5)-cycle books* $B(6, 1, 5, n, 1)$

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 *Edge Magic Total Labeling* pada *Graph (6,5)-Cycle Books* $B(6, 1, 5, 1, 1)$

Hasil 1. Jika G adalah *graph (6,5)-Cycle Books* $B(6,1,5,1,1)$, maka G memiliki *edge magic total labeling* dengan $k = 30$.

Hasil 2 : Jika G adalah *graph (6,5)-cycle books* $B(6,1,5,1,1)$, maka G tidak mempunyai *super edge magic total labeling*.

3.2 *Super Edge Magic Total Labeling* pada *Graph (6,5)-Cycle Books* $B(6, 1, 5, 2, 1)$

Hasil 3 : Jika G adalah *graph (6,5)-Cycle Books* $B(6,1,5,2,1)$, maka G tidak mempunyai *super edge magic total labeling*.

3.3 *Super Edge Magic Total Labeling* pada *Graph (6,5)-Cycle Books* $B(6, 1, 5, 3, 1)$

Hasil 4 : *Graph (6,5)-Cycle Books* $B(6,1,5,3,1)$ mempunyai *super edge magic total labeling* jika dan hanya jika :

i) $f(v_1) = \frac{1}{6} (21s - 132)$

ii) $3 \leq s \leq 16$

iii) $k = p + q + s$

3.4 Super Edge Magic Total Labeling pada Graph (6,5)-Cycle Books $B(6,1,5,3,1)$

Hasil 3 : Jika G adalah graph (6,5)-Cycle Books $B(6,1,5,2,1)$, maka G tidak mempunyai *super edge magic total labeling*.

DAFTAR PUSTAKA

- Amelia., 2016, Edge Magic Total Labeling dari 7-Cycle Books $(7,3, P_2)$, *Skripsi*, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Universitas Bengkulu, Bengkulu.
- Andari, F., 2018, Edge Magic Total Labeling pada (5,3)-Cycle Books $B[(5,2), (3,1), P_2]$, *Skripsi*, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam. Universitas Bengkulu, Bengkulu.
- Anggara, M.B.J., 2018, Edge Magic Total Labeling pada (4,3)-Cycle Books $B[(4,3), (3,1), P_2]$, *Skripsi*, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam. Universitas Bengkulu, Bengkulu.
- Basir, M., 2016, Edge Magic Total Labeling dari 6-Cycle Books $B(6, n, P_4)$, *Skripsi*, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Universitas Bengkulu, Bengkulu.
- Figueroa-Centeno,R,M., Ichishima,R., dan Muntaner_Batle,F,A., 2001, The Place of Super Edge-Magic Labelings among other classes of Labelings, *Discrete Mathematics*, Vol 231,153-168.
- Marbun, Y.A., 2018, Edge Magic Total Labeling pada (5,3)-Cycle Books $B[(5,1), (3,1), P_2]$, *Skripsi*, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam. Universitas Bengkulu, Bengkulu.
- Mardalena., 2018, Super Edge Magic Total Labeling pada (4,3)-Cycle Books $B[(4,2), (3, s), P_2]$, *Skripsi*, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam. Universitas Bengkulu, Bengkulu.
- Marr, A.M. dan Wallis, W.D. 2013.*Magic Graphs*. 2ndedition. Springer Science+Business Media New York
- Pitaloka., 2017,Edge Magic Total Labeling pada (8,3)-Cycle Books $B[(8,1), (3, s), P_2]$, *Skripsi*, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam. Universitas Bengkulu, Bengkulu.
- Puspita., 2015, Edge Magic Total Labeling dari k-Cycle Books B_{k,n,P_2} , *Skripsi*, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Universitas Bengkulu, Bengkulu.
- Ropesa, R., 2018,Edge Magic Total Labeling pada (4,3)-Cycle Books $B[(4,2), (3, s), P_2]$, *Skripsi*, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam. Universitas Bengkulu, Bengkulu.

- Santoso, J., 2016, Edge Magic Total Labeling 5-Cycle Books, *Skripsi*, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Bengkulu, Bengkulu.
- Saputra, A., 2016, Edge Magic Total Labeling dari 6-Cycle Books dengan empat dan lima copies, *Skripsi*, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Bengkulu, Bengkulu.
- Sianturi, J., 2017, Edge Magic Total Labeling pada (6,3)-Cycle Books $B[(6,1), (3,1), P_2]$, *Skripsi*, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam. Universitas Bengkulu, Bengkulu.
- Sibarani, C., 2017, Edge Magic Total Labeling dari 5-Cycle Books $B(5, n, P_m)$ dengan $4 \leq n \leq 7$ untuk $m=2$ dan $2 \leq n \leq 10$ untuk $m=3$, *Skripsi*, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Universitas Bengkulu, Bengkulu.
- Simanihuruk, M. 2009. *Pengantar Pewarnaan Graph*. UNIB PRESS. Bengkulu
- Sitohang, A.S., Swita, B., dan Simanihuruk, M., 2018, On Edge Magic Total Labeling of Cycle Books, *Journal of Physics* 1116:1.
- Susanti, S., 2018, Super Edge Magic Total Labeling pada (5,3)-Cycle Books $B[(5,2), (3,1), P_2]$, *Skripsi*, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam. Universitas Bengkulu, Bengkulu.
- Slamin., Bača, M., Lin, Y., Miller, M., dan Simanjuntak, R., 2002, Edge magic total labeling of wheels, fans and friendship graphs, *Bulletin of the ICA*, vol. 35, pp. 94-97.
- Swita, B., Rafflesia, U., Mariasiti, N.H., Adji, D.S., dan Simanihuruk, M., 2019, On Edge Magic Total Labeling of (7,3)-Cycle Books, *International Journal Of Mathematics and Mathematical Sciences*, vol. 2019, pp. 2-7.
- Syukurillah., 2016, Edge Magic Total Labeling pada 5-Cycle Books dengan 3-copies, *Skripsi*, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam. Universitas Bengkulu, Bengkulu.
- Tuplihuna., 2018, Super Edge Magic Total Labeling pada (4,3)-Cycle Books $B[(4,2), (3,1), P_2]$, *Skripsi*, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam. Universitas Bengkulu, Bengkulu.
- Wibowo, D., 2015, Edge Magic Total Labeling dari k-Cycle Books $B(k, n, P_3)$, *Skripsi*, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam. Universitas Bengkulu, Bengkulu.
- Widiyantini., 2016, Edge Magic Total Labeling dari 7-Cycle Books dan 8-cycle books, *Skripsi*, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam. Universitas Bengkulu, Bengkulu.