

**LAPORAN AKHIR PENELITIAN
(Skim: Penelitian Unggulan FMIPA)**



JUDUL PENELITIAN

**REPRESENTASI GRUP $(\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \cdot_n)$, n BILANGAN PRIMA
DALAM GRAF CAYLEY DAN GRAF IDENTITAS SERTA
PENENTUAN KARAKTERISTIK GRAF YANG DIHASILKAN**

Tim Pengusul:

Zulfia Memi Mayasari, S.Si., M.Si. (197312021998022001)

Dr. Mulia Astuti, M.Si (197804222002122003)

Dibiayai oleh:

Dana RBA FMIPA Tahun 2022

Nomor Kontrak : 2010/UN30.12/HK/2022

**UNIVERSITAS BENGKULU
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
2022**

HALAMAN PENGESAHAN

Judul Penelitian : Representasi Grup $(Z_n \setminus \{0\}, \cdot_n)$, n Bilangan Prima dalam Graf Cayley dan Graf Identitas Serta Penentuan Karakteristik Graf yang Dihasilkan

Nama Rumpun Ilmu : Matematika

Ketua Peneliti

Nama Lengkap : Zulfia Memi Mayasari, S.Si., M.Si
a. NIP : 197312021998022001
b. Jabatan Fungsional : Lektor Kepala
c. Program Studi : Matematika
d. Nomor HP : 081367379697
e. Alamat surel (email) : zulfiamm@unib.ac.id;
zulfiamemimaysari@yahoo.com

Anggota Peneliti (1)

Nama Lengkap : Dr. Mulia Astuti, S.Si., M.Sc
NIP/NIDN : 197804222002122003
Perguruan Tinggi : Universitas Bengkulu
Mahasiswa yang Terlibat : 2 Orang
Nama 1 : Melzha Amanda
NPM : F1A018057
Nama 2 : Rasdiana Windarti
NPM : F1A018058
Luaran Penelitian : Jurnal Sinta 2, Prosiding Internasional
Biaya yang diusulkan : Rp. 20.000.000,-

Bengkulu, 07 November 2022

Ketua,



Zulfia Memi Mayasari, S.Si., M.Si
NIP. 197312021998022001



Dr. Jarulis, S.Si., M.Si
NIP. 197511252005011013

Menyetujui
Ketua LPPM Universitas Bengkulu



Dr. Ir. Hery Suhartoyo, M.Sc
NIP. 196306251987031002

RINGKASAN

Salah satu bagian dari ilmu matematika yang banyak berperan dalam perkembangan ilmu dan teknologi adalah aljabar (aljabar abstrak). Salah satu struktur yang terdapat dalam aljabar abstrak adalah grup. Grup merupakan suatu struktur yang bersifat abstrak. Agar lebih mudah dalam pemahaman dan pengembangannya yang tentunya juga akan berdampak dalam perkembangan teknologi, grup dapat direpresentasikan dalam bentuk visual/gambar yang dikenal dengan nama graf. Graf banyak berhubungan dengan kehidupan nyata. Graf membantu merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut sehingga lebih mudah dipahami. Tujuan umum penelitian ini adalah memberikan suatu solusi dalam pengembangan ilmu yang bersifat abstrak sehingga lebih mudah dipahami dengan cara merepresentasikannya dalam bentuk visual/graf, yang pada akhirnya dapat mengembangkan ilmu itu sendiri yang tentunya juga akan berdampak dalam perkembangan teknologi. Tujuan khusus yang hendak dicapai adalah: (1) Mendapatkan pola banyaknya graf Cayley yang terbentuk dari subhimpunan dalam grup bilangan bulat modulo n tanpa nol, n bilangan prima, terhadap operasi pergandaan modulo n $(\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \bullet_n)$, (2) Menentukan karakteristik graf identitas yang terbentuk dari grup $(\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \bullet_n)$, n bilangan prima. Tujuan ini akan dicapai melalui beberapa tahap, yaitu: Melakukan kajian literatur tentang hasil penelitian terdahulu yang berkaitan dengan grup $(\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \bullet_n)$, graf Cayley dan graf identitas, mempelajari konsep representasi grup pada graf Cayley dan Graf identitas, membuat tabel Cayley, menggambarkan graf Cayley dari subhimpunan dalam grup $(\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \bullet_n)$, dan graf identitas grup $(\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \bullet_n)$, mengamati banyaknya graf Cayley yang terbentuk serta mengamati karakteristik graf identitas yang terbentuk dari grup $(\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \bullet_n)$.

PRAKATA

Puji syukur kehadiran Allah SWT, karena atas berkat dan rahmat_Nya peneliti dapat menyelesaikan Laporan Akhir Penelitian Unggulan FMIPA Tahun 2022 dengan judul: **Representasi Grup $(Z_n \setminus \{0\}, \bullet_n)$, n Bilangan Prima dalam Graf Cayley dan Graf Identitas Serta Penentuan Karakteristik Graf yang Dihasilkan.** Penelitian ini dilaksanakan untuk memberikan suatu solusi dalam pengembangan ilmu yang bersifat abstrak sehingga lebih mudah dipahami dengan cara merepresentasikannya dalam bentuk visual/graf, yang pada akhirnya dapat mengembangkan ilmu itu sendiri yang tentunya juga akan berdampak dalam perkembangan teknologi. Laporan akhir penelitian ini disusun sesuai dengan keterbatasan dan kemampuan yang peneliti miliki. Peneliti merasakan banyak sekali kekurangan khususnya dalam menentukan karakteristik graf yang dihasilkan. Untuk itu peneliti mengharapkan kritik dan saran yang bersifat membangun guna penyempurnaan laporan penelitian ini kemudian hari.

Demikianlah laporan ini disusun agar dapat berguna dan kemajuan bagi kita semua di masa yang akan datang.

Bengkulu, November 2022
peneliti

DAFTAR ISI

HALAMAN SAMPUL	i
HALAMAN PENGESAHAN	ii
RINGKASAN	iii
PRAKATA	iv
DAFTAR ISI	v
DAFTAR TABEL	vi
DAFTAR GAMBAR	vii
DAFTAR LAMPIRAN	ix
 BAB I. PENDAHULUAN	 1
1.1. Latar Belakang	1
 BAB II. TINJAUAN PUSTAKA	 3
2.1. Grup dan Subgrup	3
2.1.1. Grup bilangan bulat modulo n tanpa nol, n bilangan prima Terhadap operasi pergandaan modulo n , $(\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \bullet_n)$	4
2,2, Graf	4
2.2.1. Beberapa terminologi dasar dalam graf	5
2.2.2. Graf Cayley	6
2.2.3. Graf Identitas	6
2.3. Peta Jalan Penelitian	6
 Bab III. TUJUAN DAN MANFAAT PENELITIAN	 8
3.1. Tujuan Penelitian	8
3.2. Manfaat Penelitian	8
 Bab IV. METODE PENELITIAN	 10
 Bab V. HASIL DAN PEMBAHASAN	 13
5.1. Pembentukan Tabel Cayley dari $(\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \bullet_n)$, n Prima	13
5.2. Pembentukan Graf Identitas dari $(\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \bullet_n)$, n Prima	31
5.3. Pembentukan Graf Cayley dari Subgrup-Subgrup dalam Grup $(\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \bullet_n)$, n Prima	35
5.4. Penentuan Banyaknya Graf Cayley yang Terbentuk dari Subgrup- Subgrup dalam Grup $(\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \bullet_n)$, n Prima	62
5.5. Karakteristik Graf Identitas dari $(\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \bullet_n)$, n Prima	63
 Bab VI. RENCANA TAHAPAN BERIKUTNYA	 65
 Bab VII.KESIMPULAN DAN SARAN	 66
7.1.Kesimpulan	66
7.2.Saran	66
 DAFTAR PUSTAKA	 67
LAMPIRAN	68

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1. Tabel Cayley untuk $(\mathbb{Z}_4, +_4)$	3
Tabel 2.2. Tabel Cayley untuk $(\mathbb{Z}_7 \setminus \{0\}, \bullet_7)$	4
Tabel 5.1. Tabel Cayley untuk $(\mathbb{Z}_3 \setminus \{0\}, \bullet_3)$	13
Tabel 5.2. Tabel Cayley untuk $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}, \bullet_5)$	13
Tabel 5.3. Tabel Cayley untuk $(\mathbb{Z}_7 \setminus \{0\}, \bullet_7)$	14
Tabel 5.4. Tabel Cayley untuk $(\mathbb{Z}_{11} \setminus \{0\}, \bullet_{11})$	14
Tabel 5.5. Tabel Cayley untuk $(\mathbb{Z}_{13} \setminus \{0\}, \bullet_{13})$	14
Tabel 5.6. Tabel Cayley untuk $(\mathbb{Z}_{17} \setminus \{0\}, \bullet_{17})$	15
Tabel 5.7. Tabel Cayley untuk $(\mathbb{Z}_{19} \setminus \{0\}, \bullet_{19})$	15
Tabel 5.8. Tabel Cayley untuk $(\mathbb{Z}_{23} \setminus \{0\}, \bullet_{23})$	17
Tabel 5.9. Tabel Cayley untuk $(\mathbb{Z}_{29} \setminus \{0\}, \bullet_{29})$	19
Tabel 5.10. Tabel Cayley untuk $(\mathbb{Z}_{31} \setminus \{0\}, \bullet_{31})$	22
Tabel 5.11. Tabel Cayley untuk $(\mathbb{Z}_{37} \setminus \{0\}, \bullet_{37})$	25
Tabel 5.12. Tabel Cayley untuk $(\mathbb{Z}_{41} \setminus \{0\}, \bullet_{41})$	28
Tabel 5.13. Banyaknya Graf Cayley yang Terbentuk dari Subgrup-Subgrup dalam Grup $(\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \bullet_n)$, n Prima, $2 < n < 19$	62
Tabel 5.14. Banyaknya Edge dan Banyaknya Segitiga yang Terbentuk dari Grup $(\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \bullet_n)$, n Prima, $2 < n < 43$	63

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1. Peta Jalan Penelitian	7
Gambar 4.1. Bagan Alir Penelitian	10
Gambar 5.1. Graf Identitas Grup $(\mathbb{Z}_3 \setminus \{0\}, \bullet_3)$	31
Gambar 5.2. Graf Identitas Grup $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}, \bullet_5)$	31
Gambar 5.3. Graf Identitas Grup $(\mathbb{Z}_7 \setminus \{0\}, \bullet_7)$	31
Gambar 5.4. Graf Identitas Grup $(\mathbb{Z}_{11} \setminus \{0\}, \bullet_{11})$	31
Gambar 5.5. Graf Identitas Grup $(\mathbb{Z}_{13} \setminus \{0\}, \bullet_{13})$	32
Gambar 5.6. Graf Identitas Grup $(\mathbb{Z}_{17} \setminus \{0\}, \bullet_{17})$	32
Gambar 5.7. Graf Identitas Grup $(\mathbb{Z}_{19} \setminus \{0\}, \bullet_{19})$	32
Gambar 5.8. Graf Identitas Grup $(\mathbb{Z}_{23} \setminus \{0\}, \bullet_{23})$	33
Gambar 5.9. Graf Identitas Grup $(\mathbb{Z}_{29} \setminus \{0\}, \bullet_{29})$	33
Gambar 5.10. Graf Identitas Grup $(\mathbb{Z}_{31} \setminus \{0\}, \bullet_{31})$	34
Gambar 5.11. Graf Identitas Grup $(\mathbb{Z}_{37} \setminus \{0\}, \bullet_{37})$	34
Gambar 5.12. Graf Identitas Grup $(\mathbb{Z}_{41} \setminus \{0\}, \bullet_{41})$	35
Gambar 5.13. $CAY(\mathbb{Z}_3 \setminus \{0\}, S_1)$	43
Gambar 5.14. $CAY(\mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}, S_1)$	43
Gambar 5.15. $CAY(\mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}, S_2)$	43
Gambar 5.16. $CAY(\mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}, S_3)$	43
Gambar 5.17. $CAY(\mathbb{Z}_7 \setminus \{0\}, S_1)$	43
Gambar 5.18. $CAY(\mathbb{Z}_7 \setminus \{0\}, S_2)$	44
Gambar 5.19. $CAY(\mathbb{Z}_7 \setminus \{0\}, S_4)$	44
Gambar 5.20. $CAY(\mathbb{Z}_7 \setminus \{0\}, S_6)$	44
Gambar 5.21. $CAY(\mathbb{Z}_7 \setminus \{0\}, S_7)$	45
Gambar 5.22. $CAY(\mathbb{Z}_{11} \setminus \{0\}, S_1)$	45
Gambar 5.23. $CAY(\mathbb{Z}_{11} \setminus \{0\}, S_2)$	45
Gambar 5.24. $CAY(\mathbb{Z}_{11} \setminus \{0\}, S_6)$	46
Gambar 5.25. $CAY(\mathbb{Z}_{11} \setminus \{0\}, S_{10})$	46
Gambar 5.26. $CAY(\mathbb{Z}_{11} \setminus \{0\}, S_{16})$	47
Gambar 5.27. $CAY(\mathbb{Z}_{11} \setminus \{0\}, S_{22})$	47
Gambar 5.28. $CAY(\mathbb{Z}_{11} \setminus \{0\}, S_{26})$	48
Gambar 5.29. $CAY(\mathbb{Z}_{11} \setminus \{0\}, S_{30})$	48
Gambar 5.30. $CAY(\mathbb{Z}_{11} \setminus \{0\}, S_{31})$	49
Gambar 5.31. $CAY(\mathbb{Z}_{13} \setminus \{0\}, S_1)$	49
Gambar 5.32. $CAY(\mathbb{Z}_{13} \setminus \{0\}, S_2)$	50
Gambar 5.33. $CAY(\mathbb{Z}_{13} \setminus \{0\}, S_7)$	50
Gambar 5.34. $CAY(\mathbb{Z}_{13} \setminus \{0\}, S_{12})$	51
Gambar 5.35. $CAY(\mathbb{Z}_{13} \setminus \{0\}, S_{22})$	51
Gambar 5.36. $CAY(\mathbb{Z}_{13} \setminus \{0\}, S_{32})$	52
Gambar 5.37. $CAY(\mathbb{Z}_{13} \setminus \{0\}, S_{42})$	52
Gambar 5.38. $CAY(\mathbb{Z}_{13} \setminus \{0\}, S_{52})$	53
Gambar 5.39. $CAY(\mathbb{Z}_{13} \setminus \{0\}, S_{57})$	53
Gambar 5.40. $CAY(\mathbb{Z}_{13} \setminus \{0\}, S_{62})$	54
Gambar 5.41. $CAY(\mathbb{Z}_{13} \setminus \{0\}, S_{63})$	54
Gambar 5.42. $CAY(\mathbb{Z}_{17} \setminus \{0\}, S_1)$	55
Gambar 5.43. $CAY(\mathbb{Z}_{17} \setminus \{0\}, S_2)$	55
Gambar 5.44. $CAY(\mathbb{Z}_{17} \setminus \{0\}, S_9)$	56

Gambar 5.45. $CAY(\mathbb{Z}_{17} \setminus \{0\}, S_{16})$	56
Gambar 5.46. $CAY(\mathbb{Z}_{17} \setminus \{0\}, S_{37})$	57
Gambar 5.47. $CAY(\mathbb{Z}_{17} \setminus \{0\}, S_{58})$	57
Gambar 5.48. $CAY(\mathbb{Z}_{17} \setminus \{0\}, S_{93})$	58
Gambar 5.49. $CAY(\mathbb{Z}_{17} \setminus \{0\}, S_{128})$	58
Gambar 5.50. $CAY(\mathbb{Z}_{17} \setminus \{0\}, S_{163})$	59
Gambar 5.51. $CAY(\mathbb{Z}_{17} \setminus \{0\}, S_{198})$	59
Gambar 5.52. $CAY(\mathbb{Z}_{17} \setminus \{0\}, S_{219})$	60
Gambar 5.53. $CAY(\mathbb{Z}_{17} \setminus \{0\}, S_{240})$	60
Gambar 5.54. $CAY(\mathbb{Z}_{17} \setminus \{0\}, S_{247})$	61
Gambar 5.55. $CAY(\mathbb{Z}_{17} \setminus \{0\}, S_{254})$	61
Gambar 5.56. $CAY(\mathbb{Z}_{17} \setminus \{0\}, S_{255})$	62

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1. LoA Seminar Internasional	68
Gambar 4.1. Draft Jurnal	69

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Matematika adalah ilmu dasar yang memiliki peran penting dalam pengembangan ilmu yang lain. Matematika banyak digunakan dalam memecahkan masalah yang terjadi di berbagai bidang seperti fisika, kimia, ekonomi, komputer dan lain-lain. Salah satu bagian dari ilmu matematika yang banyak berperan dalam perkembangan ilmu dan teknologi adalah aljabar. Disadari atau tidak, banyak sekali teknologi yang kita rasakan saat ini merupakan aplikasi dari ilmu aljabar seperti sistem pengamanan sandi, *barcode*, penyajian data, peta *traffic*, rute penerbangan dan lain-lain.

Aljabar (aljabar abstrak) merupakan bagian dari ilmu matematika yang di dalamnya terdapat berbagai macam struktur yang dilengkapi dengan sifat-sifat tertentu. Salah satu struktur yang terdapat dalam aljabar abstrak adalah grup. Grup merupakan suatu himpunan yang dilengkapi dengan suatu operasi biner yang memenuhi beberapa aksioma tertentu. Beberapa aplikasi dari grup yang dapat ditemui dalam kehidupan sehari-hari adalah penggunaan ATM dan pembayaran melalui *online*.

Grup merupakan suatu struktur yang bersifat abstrak. Agar lebih mudah dalam pemahaman dan pengembangannya yang tentunya juga akan berdampak dalam perkembangan teknologi, grup dapat direpresentasikan dalam bentuk visual/gambar yang dikenal dengan nama graf. Graf banyak berhubungan dengan kehidupan nyata. Graf dimanfaatkan untuk merepresentasikan jaringan komputer, internet, telepon, pipa gas dan lain-lain. Graf juga banyak bermanfaat di bidang kimia, fisika, genetika dan lainnya. Graf membantu merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut sehingga lebih mudah dipahami. Graf didefinisikan sebagai pasangan himpunan simpul dan sisi ditulis dengan notasi $G = (V, E)$ dimana V merupakan himpunan tidak kosong dari himpunan simpul dan E merupakan himpunan sisi yang menghubungkan sepasang simpul.

Peneliti terdahulu telah mengkaji hubungan antara teori grup dan teori graf. Kajian teori graf dan teori grup dinamakan graf aljabar. Graf aljabar pertama kali dikenalkan oleh matematikawan asal Inggris, Norman Biggs pada tahun 1974. Kajian graf aljabar membahas tentang hubungan antara graf dengan aljabar dan mempelajari interaksi antara graf dan aljabar. Pokok bahasan yang banyak dikaji dalam graf aljabar adalah representasi grup pada graf.

Beberapa penelitian mengenai representasi grup pada graf telah dilakukan. Leihitu, Patty dan Patty (2016) meneliti mengenai struktur grup dalam bentuk graf identitas dengan grup yang diteliti adalah grup Z_n untuk beberapa n terhadap operasi penjumlahan modulo n , beberapa grup siklik, grup simetri S_3 serta grup dihedral $D_{2,6}$ dan $D_{2,7}$ yang menghasilkan graf identitas yang terbentuk dari grup-grup ini merupakan graf sederhana. Tripi (2017) dalam artikelnya yang berjudul *Cayley Graphs of Groups and Their Applications* meneliti mengenai graf Cayley yang dibentuk dari beberapa grup yang menghasilkan suatu *conjecture* bahwa graf Cayley dari semua grup (kecuali Z_2) membentuk sirkuit hamilton dan dapat diaplikasikan dalam *campanology* (khususnya pada perubahan dering bel). Latifah (2018) meneliti mengenai matriks insidensi dari graf Cayley yang menghasilkan cara pembentukan matriks insidensi dari graf Cayley yang dapat digunakan dalam analisis jaringan. Okal, Kiftiah dan Fran (2019) meneliti mengenai graf Cayley pada grup simetri S_n yang menghasilkan banyaknya graf Cayley yang isomorfik terhadap grup S_n dan banyaknya graf segitiga K_3 yang merupakan subgraf dari graf Cayley yang dapat terbentuk. Augustin dan Welyyanti (2020), meneliti mengenai grup dalam bentuk graf identitas yang menghasilkan formula untuk menentukan banyaknya graf segitiga K_3 yang termuat dalam grup Z_n , dimana Z_n adalah grup bilangan bulat modulo n terhadap operasi penjumlahan modulo n . Syarifudin dan Wardhana (2021) meneliti mengenai beberapa graf khusus dari grup quaternion yang menghasilkan beberapa teorema tentang graf khusus salah satunya adalah graf identitas dari grup quaternion adalah graf multipartit. Herawati, Henryanti, dan Aditya (2021) dalam artikelnya yang berjudul *Identity Graph of Finite Cyclic Groups* menghasilkan karakteristik graf yang terbentuk (banyaknya graf segitiga K_3 yang terbentuk) dari beberapa grup siklik berhingga.

Penelitian ini merupakan tindak lanjut dari penelitian-penelitian yang telah dilakukan oleh peneliti sebelumnya. Pada penelitian ini dibahas mengenai karakteristik graf identitas dan graf Cayley dari grup $(Z_n \setminus \{0\}, \bullet_n), n$ bilangan prima. Tujuannya adalah untuk mendapatkan pola banyaknya graf Cayley yang terbentuk dari subhimpunan dalam grup tersebut beserta karakteristik dari graf Cayley dan graf identitas yang terbentuk.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Grup dan Subgrup

Definisi 2.1. Diberikan suatu himpunan tak kosong G . Himpunan G terhadap suatu operasi, " $\circ$ " dikatakan grup dan dinotasikan sebagai $(G, \circ)$ jika memenuhi empat aksioma berikut (Subiono, 2015):

- i. $(G, \circ)$ bersifat tertutup, artinya $\forall a, b \in G$ berlaku $a \circ b \in G$
- ii. $(G, \circ)$ bersifat asosiatif, artinya $\forall a, b, c \in G$ berlaku $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$
- iii. $(G, \circ)$ memiliki elemen identitas, artinya $\exists e \in G, \forall a \in G$ berlaku $a \circ e = e \circ a = a$, e dinamakan elemen identitas G
- iv. $(G, \circ)$ memiliki invers, artinya $\forall a \in G, \exists b \in G$ berlaku $a \circ b = b \circ a = e$, b dinamakan invers dari a dan ditulis $b = a^{-1}$.

Pada suatu himpunan berhingga dengan suatu operasi yang didefinisikan pada himpunan tersebut, terdapat cara yang lebih efektif untuk mengetahui apakah himpunan dengan operasi yang diberikan tersebut merupakan grup atau bukan, yaitu dengan membuat suatu tabel yang dinamakan Tabel Cayley. Tabel Cayley berisi semua elemen dalam grup dan hasil operasi antar elemen-elemen tersebut. Dengan menggunakan Tabel Cayley, pembuktian empat aksioma pada grup lebih mudah dilakukan. Berikut diberikan contoh Tabel Cayley untuk $(\mathbb{Z}_4, +_4)$.

Tabel 2.1. Tabel Cayley untuk $(\mathbb{Z}_4, +_4)$

$+_4$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Definisi 2.2. Diberikan suatu grup $(G, \circ)$. Suatu himpunan $H \neq \emptyset \subseteq G$ dikatakan subgrup G dan dinotasikan sebagai $H \leq G$ jika $(H, \circ)$ merupakan grup (Dummit dan Foote, 2004).

Dalam setiap grup $(G, \circ)$ terdapat minimal dua subgrup yaitu $\{e\}$ dan G yang dinamakan *trivial subgroup* (subgrup sejati). Jika ada subgrup lain selain $\{e\}$ dan G , dinamakan *nontrivial subgroup* (subgrup tak sejati).

2.1.1. Grup bilangan bulat modulo n tanpa nol, n bilangan prima, terhadap operasi perkalian modulo n ($Z_n \setminus \{0\}, \bullet_n$).

Diberikan himpunan bilangan bulat modulo n tanpa nol $Z_n \setminus \{0\}$ yang elemennya adalah $\{1, 2, 3, \dots, n-1\}$. Himpunan $Z_n \setminus \{0\}$ terhadap operasi perkalian modulo n yang dinotasikan sebagai $(Z_n \setminus \{0\}, \bullet_n)$, untuk n bilangan prima merupakan grup. Berikut diberikan contoh grup $(Z_n \setminus \{0\}, \bullet_n)$, untuk $n = 7$. Himpunan $Z_7 \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Hasil operasi setiap elemen dalam $Z_n \setminus \{0\}$ dapat dilihat pada Tabel 2.2

Tabel 2.2. Tabel Cayley untuk $(Z_7 \setminus \{0\}, \bullet_7)$

$\bullet_7$	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	1	3	5
3	3	6	2	5	1	4
4	4	1	5	2	6	3
5	5	3	1	6	4	2
6	6	5	4	3	2	1

Berdasarkan Tabel 2.2 terlihat bahwa:

- $(Z_7 \setminus \{0\}, \bullet_7)$ bersifat tertutup, artinya $\forall a, b \in Z_7 \setminus \{0\}$ berlaku $a \circ b \in Z_7 \setminus \{0\}$. Hal ini dapat dilihat dari hasil operasi pada tabel.
- $(Z_7 \setminus \{0\}, \bullet_7)$ bersifat asosiatif, artinya $\forall a, b, c \in Z_7 \setminus \{0\}$ berlaku $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$. Hal ini dapat dilihat dari operasi pada tabel.
- $(Z_7 \setminus \{0\}, \bullet_7)$ memiliki elemen identitas, artinya $\exists e = 1 \in Z_7 \setminus \{0\}$, $\forall a \in Z_7 \setminus \{0\}$ berlaku $a \circ 1 = 1 \circ a = a$, 1 adalah elemen identitas $Z_7 \setminus \{0\}$
- $(Z_7 \setminus \{0\}, \bullet_7)$ memiliki invers, artinya $\forall a \in Z_7 \setminus \{0\}$, $\exists a^{-1} \in Z_7 \setminus \{0\}$ berlaku $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = 1$. Dari tabel terlihat bahwa invers masing-masing elemen $Z_7 \setminus \{0\}$ adalah:

$$1^{-1} = 1, \quad 2^{-1} = 4, \quad 3^{-1} = 5, \quad 4^{-1} = 2, \quad 5^{-1} = 3, \quad 6^{-1} = 6$$

2.2. Graf

Salah satu bagian dalam matematika yang memiliki banyak terapan adalah teori graf. Graf digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antar objek tersebut. Suatu graf $G(V, E)$ adalah pasangan (V, E) dengan V adalah himpunan tidak kosong yang anggotanya disebut *vertex* (simpul) dan E adalah himpunan yang

anggotanya adalah pasangan-pasangan tak berurut dari titik yang disebut *edge* (sisi). Secara matematis, jika $G(V, E)$ adalah graf maka G terdiri dari himpunan simpul di G , dinyatakan dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ dan himpunan sisi di G , dinyatakan dengan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_m\}$. Banyaknya elemen $V(G)$ dinyatakan dengan $|V(G)| = n$ dan banyaknya elemen $E(G)$ dinyatakan dengan $|E(G)| = m$ (Munir, 2010).

2.2.1. Beberapa terminologi dasar dalam graf

Dalam mempelajari teori graf, terdapat beberapa terminologi dasar yang perlu dipahami, antara lain:

i. *Adjacent* (bertetangga)

Diberikan suatu graf G . Simpul u dan simpul v pada graf G dikatakan bertetangga jika keduanya terhubung langsung oleh sebuah sisi. Dengan kata lain, u bertetangga dengan v jika (u, v) adalah sebuah sisi pada graf G (Munir, 2010).

ii. *Incident* (bersisian)

Diberikan suatu graf G dan misalkan u, v merupakan simpul dari graf G . Jika $e = (u, v)$ merupakan sisi dari graf G , maka sisi e dikatakan bersisian dengan simpul u dan simpul v (Munir, 2010).

iii. Derajat

Diberikan suatu graf G dan misalkan v adalah simpul dari graf G . Derajat simpul v didefinisikan sebagai banyaknya sisi yang terkait dengan simpul v . Derajat simpul v dinotasikan dengan $\deg(v)$. Derajat simpul terbesar dari graf G disebut dengan derajat maksimum yang dinotasikan sebagai $\Delta(G)$ dan derajat simpul terkecil dari graf G disebut dengan derajat minimum yang dinotasikan sebagai $\delta(G)$ (Chartand, Lesnaik, dan Zhang, 2016).

iv. Lintasan

Lintasan adalah barisan berselang-seling antara simpul dan sisi. Panjang lintasan adalah jumlah sisi dari lintasan. Misalkan terdapat sebuah lintasan yang panjangnya n dari simpul awal v_0 ke simpul tujuan v_n . Bentuk dari lintasannya adalah $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n$ sedemikian sehingga $e_1 = (v_0, v_1), e_2 = (v_1, v_2), \dots, e_n = (v_{n-1}, v_n)$ (Munir, 2010).

v. Terhubung

Diberikan suatu graf G . Simpul u dan simpul v pada graf G dikatakan terhubung jika terdapat lintasan dari u ke v (Munir, 2010)

2.2.2. Graf Cayley

Graf Cayley pertama kali diperkenalkan oleh Arthur Cayley pada tahun 1878 untuk merepresentasikan suatu grup ke dalam bentuk graf. Misal diberikan grup berhingga G dengan e sebagai elemen identitasnya. Grup berhingga G dapat direpresentasikan ke dalam bentuk Graf Cayley dengan mengambil S sebagai subhimpunan dari G dengan syarat $e \notin S$ dan jika $s \in S$ berlaku $s^{-1} \in S$. Secara matematis Graf Cayley dengan subhimpunan S didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.3. Graf Cayley dari grup berhingga G dengan subhimpunan S dinotasikan dengan $CAY(G, S)$ didefinisikan sebagai graf yang himpunan simpul dan himpunan sisinya memenuhi dua aksioma berikut:

1. Untuk setiap elemen di G merupakan himpunan simpul pada $CAY(G, S)$.
2. Pasangan simpul g, h merupakan sisi dari $CAY(G, S)$ jika dan hanya jika $h = g \circ s$, untuk suatu $s \in S$ (Beineke dan Wilson, 2005)

2.2.3. Graf identitas

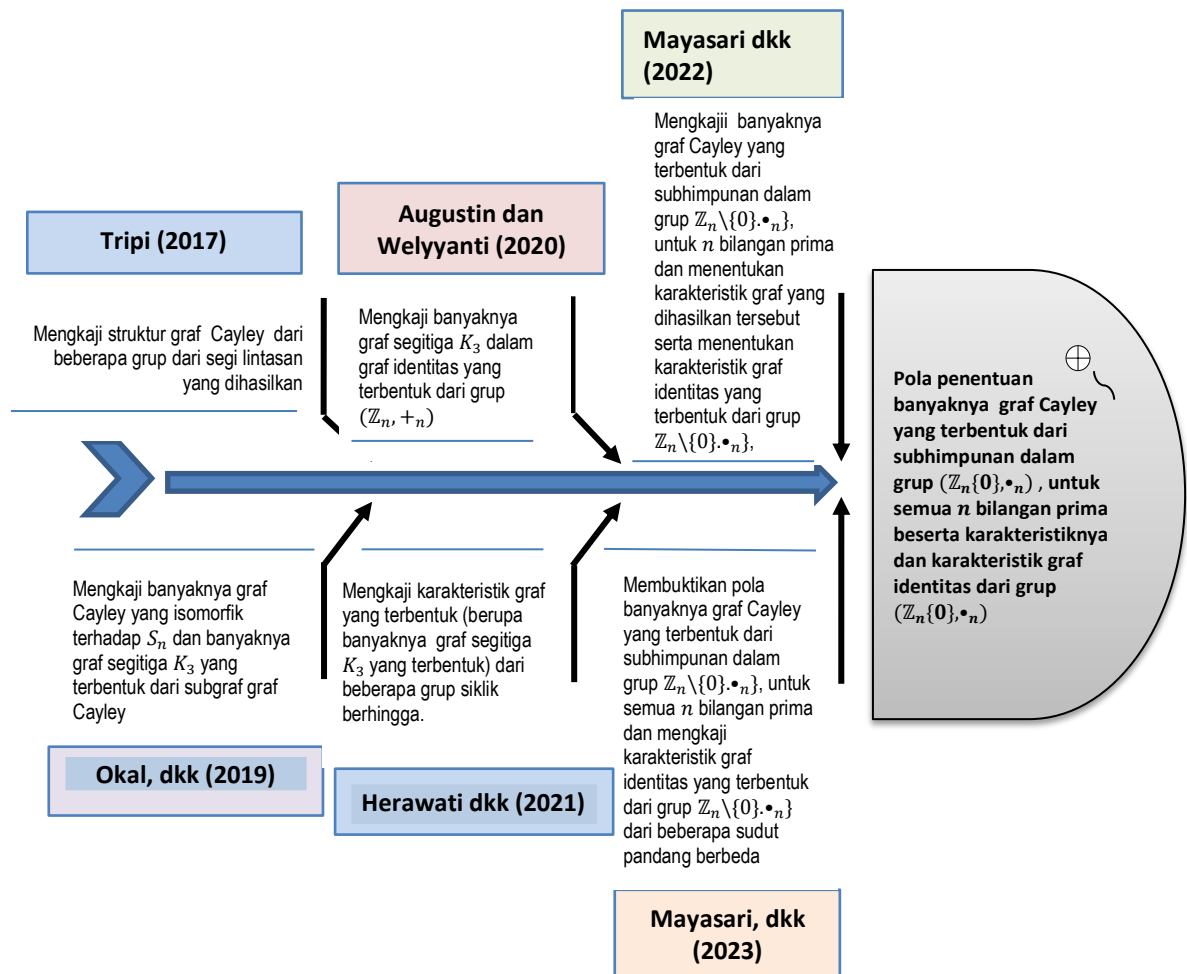
Definisi 2.4. Misalkan $(G, \circ)$ suatu grup berhingga. Graf identitas dari grup $(G, \circ)$ adalah graf yang simpulnya adalah semua elemen grup G dimana dua simpul yang berbeda u dan v bertetangga jika hanya jika $u \circ v = v \circ u = e$ dan setiap elemen grup terhubung langsung dengan elemen identitas pada grup. Graf identitas ini dinotasikan dengan $I(G)$ (Kandasamy dan Smarandache, 2009).

Berdasarkan Definisi 2.4, dalam graf identitas berlaku bahwa dua simpul terhubung jika dua simpul tersebut saling invers.

2.3. Peta Jalan Penelitian

Dalam matematika, bidang ilmu yang memberi kontribusi cukup banyak dalam perkembangan teknologi adalah aljabar (aljabar abstrak), khususnya teori grup. Untuk mengaplikasikan teori grup yang bersifat abstrak ini perlu adanya representasi dalam bentuk visual (dalam hal ini dalam bentuk graf) sehingga mudah dipahami. Penelitian ini memberikan suatu solusi dalam pengembangan ilmu yang bersifat abstrak sehingga lebih mudah dipahami dengan cara merepresentasikannya dalam bentuk gambar (graf), yang pada akhirnya dapat mengembangkan ilmu itu sendiri yang tentunya juga akan berdampak dalam perkembangan teknologi.

Secara ringkas, peta jalan penelitian digambarkan dalam diagram berikut:



Gambar 2.1. Peta Jalan Penelitian

BAB III

TUJUAN DAN MANFAAT PENELITIAN

3.1. Tujuan Penelitian

Tujuan umum penelitian ini adalah memberikan suatu solusi dalam pengembangan ilmu yang bersifat abstrak sehingga lebih mudah dipahami dengan cara merepresentasikannya dalam bentuk visual/graf, yang pada akhirnya dapat mengembangkan ilmu itu sendiri yang tentunya juga akan berdampak dalam perkembangan teknologi. Beberapa tujuan khusus yang hendak dicapai adalah:

1. Mendapatkan pola banyaknya graf Cayley yang terbentuk dari subhimpunan dalam grup bilangan bulat modulo n tanpa nol, n bilangan prima, terhadap operasi pergandaan modulo n $(Z_n \setminus \{0\}, \bullet_n)$.
2. Menentukan karakteristik graf Cayley yang terbentuk dari subhimpunan dalam grup $(Z_n \setminus \{0\}, \bullet_n)$, serta karakteristik graf identitas dari grup $(Z_n \setminus \{0\}, \bullet_n)$.

Luaran yang akan dicapai dalam penelitian ini adalah: (1) Artikel yang akan diterbitkan dalam Jurnal Matematika terindeks Sinta 2 “Jurnal Barekeng” Universitas Pattimura p-ISSN:1978-7221, e-ISSN: 2615-3017, DOI Prefix 10.30598/Crossref, <https://ojs3.unpatti.ac.id/index.php/barekeng/oai>, (2) Prosiding Internasional terindeks scopus melalui seminar pada Joint Seminar; The 6th International Seminar of Innovation in Mathematics and Mathematics Education (6th ISIMMED) and The 8th International Seminar on Science Education (8th ISSE); Faculty of Mathematics and Natural Sciences, Universitas Negeri Yogyakarta, Indonesia: Jumat-Sabtu, 11-12 November 2022.

Target lain yang hendak dicapai dalam penelitian ini adalah terlibatnya dua orang mahasiswa S1 Program Studi Matematika dalam penelitian awal khususnya pada penentuan pola banyaknya graf Cayley yang terbentuk dari subgrup-subgrup dalam grup $(Z_n \setminus \{0\}, \bullet_n)$. n bilangan prima dan karakteristik dari graf identitas dari grup yang ditentukan. Dengan terlibatnya mahasiswa, diharapkan mahasiswa tersebut dapat menyelesaikan skripsi lebih cepat.

3.2. Manfaat Penelitian

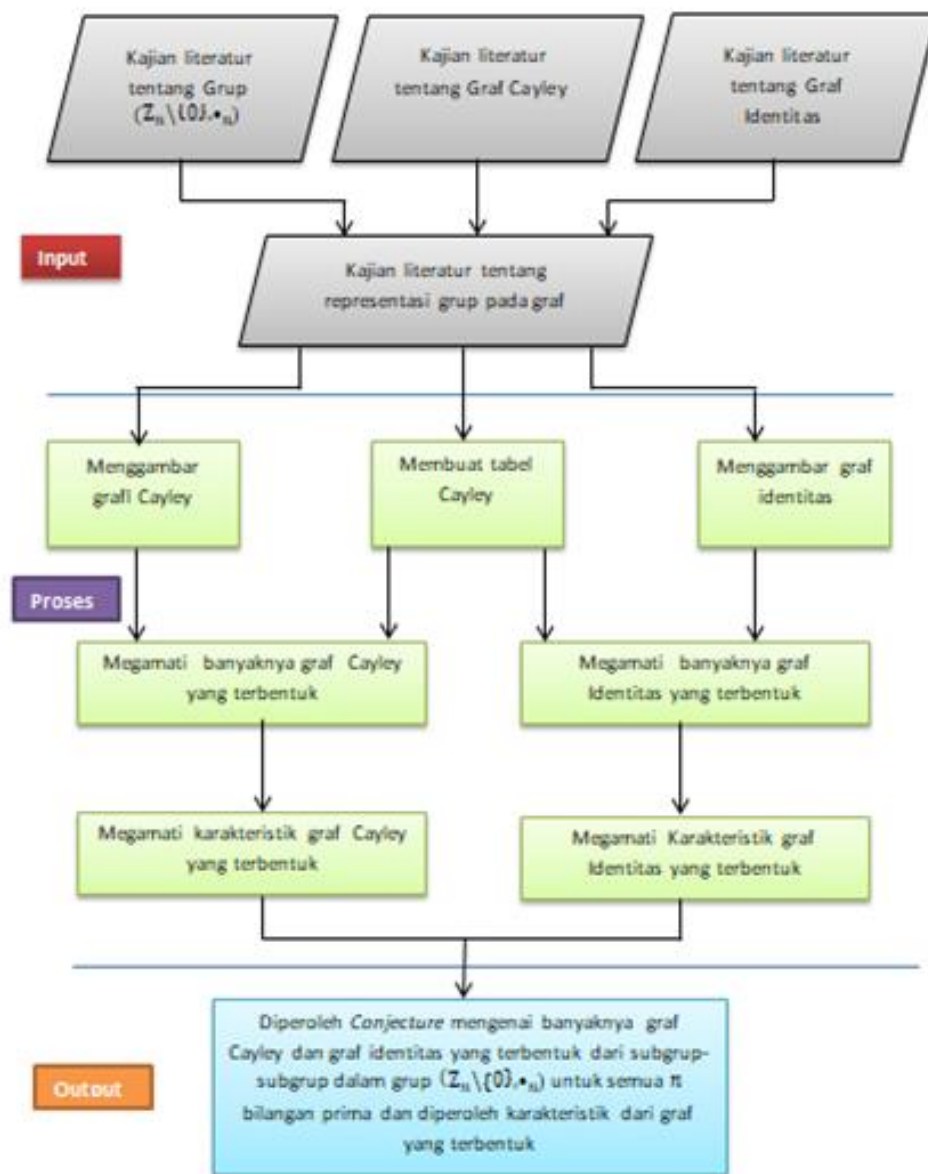
Dalam matematika, bidang ilmu yang memberi kontribusi cukup banyak dalam perkembangan teknologi adalah aljabar (aljabar abstrak), khususnya teori grup. Untuk mengaplikasikan teori grup yang bersifat abstrak ini perlu adanya representasi dalam

bentuk visual sehingga mudah dipahami. Diharapkan dengan penelitian ini dapat memberikan suatu solusi dalam pengembangan ilmu yang bersifat abstrak sehingga lebih mudah dipahami yang akan berdampak dalam perkembangan teknologi.

BAB IV

METODE PENELITIAN

Penelitian ini dilakukan untuk mendapatkan suatu solusi dalam pengembangan ilmu yang bersifat abstrak sehingga lebih mudah dipahami dan dikembangkan dengan cara merepresentasikannya dalam bentuk visual/graf, Tujuan ini akan dicapai melalui tahapan yang dapat dilihat pada Gambar 4.1 berikut.



Gambar 4.1. Bagan Alir Penelitian

Tahapan kegiatan yang digambarkan pada Gambar 4.1 dijelaskan secara detail sebagai berikut:

Tahap 1. Melakukan kajian literatur tentang hasil penelitian terdahulu yang berkaitan dengan grup $(\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \bullet_n)$, graf Cayley dan graf identitas

Pada tahap ini akan dilakukan kegiatan kajian literatur tentang hasil penelitian terdahulu maupun yang akan diteliti yang berkaitan dengan grup $(\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \bullet_n)$, graf Cayley dan graf identitas.

Tahap 2. Mempelajari konsep representasi grup pada graf Cayley dan Graf identitas.

Pada tahap ini dilakukan kegiatan mempelajari proses-proses dalam pembentukan graf Cayley dan graf identitas.

Tahap 3. Membuat tabel Cayley dari grup $(\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \bullet_n)$

Pada tahap ini dilakukan pembuatan tabel Cayley dari grup yang diteliti. Dari tabel ini akan dicari elemen identitas grup dan subgrup-subgrup yang terbentuk.

Tahap 4. Menggambarkan graf identitas dari grup $(\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \bullet_n)$ dan graf Cayley dari subgrup-subgrup dalam grup $(\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \bullet_n)$

Pada tahap ini dilakukan representasi grup $(\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \bullet_n)$ dalam bentuk graf identitas dan subgrup-subgrupnya dalam grup $(\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \bullet_n)$ dalam bentuk graf Cayley

Tahap 5. Mengamati banyaknya graf Cayley yang terbentuk dari subgrup-subgrup dalam grup $(\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \bullet_n)$

Pada tahap ini dilakukan pengamatan terhadap banyaknya graf Cayley yang terbentuk dari subgrup-subgrup dalam grup $(\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \bullet_n)$. Selanjutnya dibuat pola dalam menentukan banyaknya graf Cayley yang terbentuk dari subgrup-subgrup dalam grup $(\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \bullet_n)$ untuk semua n bilangan prima.

Tahap 6. Mengamati karakteristik graf identitas yang terbentuk

Pada tahap ini dilakukan pengamatan terhadap karakteristik graf identitas yang terbentuk

Tahap 7. Menarik kesimpulan

Pada tahap ini ditarik kesimpulan tentang banyaknya graf Cayley yang terbentuk dari subgrup-subgrup dalam grup $(\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \bullet_n)$ yang diperoleh dalam Tahap 5 serta karakteristik graf identitas yang diperoleh pada Tahap 6.

Indikator keberhasilan dari kegiatan penelitian adalah dihasilkannya suatu solusi dalam pengembangan ilmu yang bersifat abstrak sehingga lebih mudah dipahami dengan cara merepresentasikannya dalam bentuk visual/graf, artikel yang akan diterbitkan dalam jurnal nasional terakreditasi Sinta 2 dan prosiding internasional terindeks scopus.

BAB V

HASIL DAN PEMBAHASAN

5.1. Pembentukan Tabel Cayley dari $(\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \bullet_n)$, n Prima

Misalkan G adalah suatu himpunan berhingga dan didefinisikan suatu operasi " $*$ " pada G dan ditulis sebagai $(G, *)$. Untuk menunjukkan bahwa $(G, *)$ merupakan suatu grup, terdapat cara yang lebih mudah yaitu dengan menuliskan elemen-elemen G beserta operasi dan hasil operasinya dalam suatu tabel yang dikenal dengan nama Tabel Cayley. Tabel Cayley dari $(G, *)$ merupakan tabel dengan baris dan kolomnya sesuai dengan elemen-elemen pada G dimana elemen yang dioperasikan dicantumkan pada baris pertama dan dengan urutan yang sama dicantumkan pada kolom pertama menurun. Tabel ini digunakan untuk melihat berlakunya aksioma dari suatu grup.

Himpunan $\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$ dengan suatu operasi " $\bullet_n$ " merupakan grup untuk n bilangan prima. Dalam penelitian ini, nilai n bilangan prima dimulai dari $n = 3$, karena untuk $n = 2$, $\mathbb{Z}_2 \setminus \{0\} = \{1\}$ yang mana dalam graf identitas digambarkan sebagai satu titik. Berikut diberikan Tabel Cayley untuk $(\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \bullet_n)$, n prima, $2 < n < 43$

Tabel 5.1. Tabel Cayley untuk $(\mathbb{Z}_3 \setminus \{0\}, \bullet_3)$

$\bullet_3$	1	2
1	1	2
2	2	1

Berdasarkan Tabel 5.1, dapat dilihat bahwa $e =$ elemen identitas
 $(\mathbb{Z}_3 \setminus \{0\}, \bullet_3) = 1$. Invers masing-masing elemen adalah $1^{-1} = 1$,
 $2^{-1} = 2$

Tabel 5.2. Tabel Cayley untuk $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}, \bullet_5)$

$\bullet_5$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

Berdasarkan Tabel 5.2, dapat dilihat bahwa $e =$ elemen identitas
 $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}, \bullet_5) = 1$, Invers masing-masing elemen adalah:
 $1^{-1} = 1, 2^{-1} = 3, 3^{-1} = 2, 4^{-1} = 4$

Tabel 5.3. Tabel Cayley untuk $(\mathbb{Z}_7 \setminus \{0\}, \bullet_7)$

$\bullet_7$	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	1	3	5
3	3	6	2	5	1	4
4	4	1	5	2	6	3
5	5	3	1	6	4	2
6	6	5	4	3	2	1

Berdasarkan Tabel 5.3, dapat dilihat bahwa

$e = \text{elemen identitas, } (\mathbb{Z}_7 \setminus \{0\}, \bullet_7) = 1.$

Invers masing-masing elemen adalah: $1^{-1} = 1.$

$2^{-1} = 4, 3^{-1} = 5, 4^{-1} = 2, 5^{-1} = 3, 6^{-1} = 6$

Tabel 5.4. Tabel Cayley untuk $(\mathbb{Z}_{11} \setminus \{0\}, \bullet_{11})$

$\bullet_{11}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	1	3	5	7	9
3	3	6	9	1	4	7	10	2	5	8
4	4	8	1	5	9	2	6	10	3	7
5	5	10	4	9	3	8	2	7	1	6
6	6	1	7	2	8	3	9	4	10	5
7	7	3	10	6	2	9	5	1	8	4
8	8	5	2	10	7	4	1	9	6	3
9	9	7	5	3	1	10	8	6	4	2
10	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Berdasarkan Tabel 5.4, dapat dilihat

Bahwa: $e = \text{elemen identitas}$

$(\mathbb{Z}_{11} \setminus \{0\}, \bullet_{11}) = 1,$

Invers masing-masing elemen adalah:

$1^{-1} = 1, 2^{-1} = 6,$

$3^{-1} = 4, 4^{-1} = 3, 5^{-1} = 9, 6^{-1} = 2,$

$7^{-1} = 8, 8^{-1} = 7, 9^{-1} = 5,$

$10^{-1} = 10$

Tabel 5.5. Tabel Cayley untuk $(\mathbb{Z}_{13} \setminus \{0\}, \bullet_{13})$

$\bullet_{13}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	2	4	6	8	10	12	1	3	5	7	9	11
3	3	6	9	12	2	5	8	11	1	4	7	10
4	4	8	12	3	7	11	2	6	10	1	5	9
5	5	10	2	7	12	4	9	1	6	11	3	8
6	6	12	5	11	4	10	3	9	2	8	1	7
7	7	1	8	2	9	3	10	4	11	5	12	6
8	8	3	11	6	1	9	4	12	7	2	10	5
9	9	5	1	10	6	2	11	7	3	12	8	4
10	10	7	4	1	11	8	5	2	12	9	6	3
11	11	9	7	5	3	1	12	10	8	6	3	2
12	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Berdasarkan Tabel 5.5, dapat dilihat bahwa $e = \text{elemen identitas } (\mathbb{Z}_{13} \setminus \{0\}, \bullet_{13}) = 1$,

Invers masing-masing elemen adalah:

$$1^{-1} = 1, 2^{-1} = 7, 3^{-1} = 9, 4^{-1} = 10, 5^{-1} = 8, 6^{-1} = 11, 7^{-1} = 2, 8^{-1} = 5,$$

$$9^{-1} = 3, 10^{-1} = 4, 11^{-1} = 6, 12^{-1} = 12$$

Tabel 5.6. Tabel Cayley untuk $(\mathbb{Z}_{17} \setminus \{0\}, \bullet_{17})$

$\bullet_{17}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2	2	4	6	8	10	12	14	16	1	3	5	7	9	11	13	15
3	3	6	9	12	15	1	4	7	10	13	16	2	5	8	11	14
4	4	8	12	16	3	7	11	15	2	6	10	14	1	5	9	13
5	5	10	15	3	8	13	1	6	11	16	4	9	14	2	7	12
6	6	12	1	7	13	2	8	14	3	9	15	4	10	16	5	11
7	7	14	4	11	1	8	15	5	12	2	9	16	6	13	3	10
8	8	16	7	15	6	14	5	13	4	12	3	11	2	10	1	9
9	9	1	10	2	11	3	12	4	13	5	14	6	15	7	16	8
10	10	3	13	6	16	9	2	12	5	15	8	1	11	4	14	7
11	11	5	16	10	4	15	9	3	14	8	2	13	7	1	12	6
12	12	7	2	14	9	4	16	11	6	1	13	8	3	15	10	5
13	13	9	5	1	14	10	6	2	15	11	7	3	16	12	8	4
14	14	11	8	5	2	16	13	10	7	4	1	15	12	9	6	3
15	15	13	11	9	7	5	3	1	16	14	12	10	8	6	4	2
16	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Berdasarkan Tabel 5.6, dapat dilihat bahwa $e = \text{elemen identitas } (\mathbb{Z}_{17} \setminus \{0\}, \bullet_{17}) = 1$,

Invers masing-masing elemen adalah:

$$1^{-1} = 1, \quad 2^{-1} = 9, \quad 3^{-1} = 6, \quad 4^{-1} = 13, \quad 5^{-1} = 7, \quad 6^{-1} = 3,$$

$$7^{-1} = 5, \quad 8^{-1} = 15, \quad 9^{-1} = 2, \quad 10^{-1} = 12, \quad 11^{-1} = 14, \quad 12^{-1} = 10,$$

$$13^{-1} = 4, \quad 14^{-1} = 11, \quad 15^{-1} = 8, \quad 16^{-1} = 16$$

Tabel 5.7. Tabel Cayley untuk $(\mathbb{Z}_{19} \setminus \{0\}, \bullet_{19})$

$\bullet_{19}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	1	3	5	7	9	11	13	15	17
3	3	6	9	12	15	18	2	5	8	11	14	17	1	4	7	10	13	16
4	4	8	12	16	1	5	9	13	17	2	6	10	14	18	3	7	11	15
5	5	10	15	1	6	11	16	2	7	12	17	3	8	13	18	4	9	14

6	6	12	18	5	11	17	4	10	16	3	9	15	2	8	14	1	7	13
7	7	14	2	9	16	4	11	18	6	13	1	8	15	3	10	17	5	12
8	8	16	5	13	2	10	18	7	15	4	12	1	9	17	6	14	3	11
9	9	18	8	17	7	16	6	15	5	14	4	13	3	12	2	11	1	10
10	10	1	11	2	12	3	13	4	14	5	15	6	16	7	17	8	18	9
11	11	3	14	6	17	9	1	12	4	15	7	18	10	2	13	5	16	8
12	12	5	17	20	3	15	8	1	13	6	18	11	4	16	9	2	14	7
13	13	7	1	24	8	2	15	9	3	16	10	4	17	11	5	18	12	6
14	14	9	4	18	13	8	3	17	12	7	2	16	11	6	1	15	10	5
15	15	11	7	3	18	14	10	6	2	17	13	9	5	1	16	12	8	4
16	16	13	10	7	4	1	17	14	11	8	5	2	18	15	12	9	6	3
17	17	15	13	11	9	7	5	3	1	28	16	14	12	10	8	6	4	2
18	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Berdasarkan Tabel 5.7, dapat dilihat bahwa $e = \text{elemen identitas } (\mathbb{Z}_{19} \setminus \{0\}, \bullet_{19}) = 1$,

Invers masing-masing elemen adalah:

$$\begin{aligned}
 1^{-1} &= 1, & 2^{-1} &= 10, & 3^{-1} &= 13, & 4^{-1} &= 5, & 5^{-1} &= 4, & 6^{-1} &= 16, \\
 7^{-1} &= 11, & 8^{-1} &= 12, & 9^{-1} &= 17, & 10^{-1} &= 2, & 11^{-1} &= 7, & 12^{-1} &= 8, \\
 13^{-1} &= 3, & 14^{-1} &= 15, & 15^{-1} &= 14, & 16^{-1} &= 6, & 17^{-1} &= 9, & 18^{-1} &= 18
 \end{aligned}$$

Tabel 5.8. Tabel Cayley untuk $(\mathbb{Z}_{23} \setminus \{0\}, \bullet_{23})$

$\bullet_{23}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
3	3	6	9	12	15	18	21	1	4	7	10	13	16	19	22	2	5	8	11	14	17	20
4	4	8	12	16	20	1	5	9	13	17	21	2	6	10	14	18	22	3	7	11	15	19
5	5	10	15	20	2	7	12	17	22	4	9	14	19	1	6	11	16	21	3	8	13	18
6	6	12	18	1	7	13	19	2	8	14	20	3	9	15	21	4	10	16	22	5	11	17
7	7	14	21	5	12	19	3	10	17	1	8	15	22	6	13	20	4	11	18	2	9	16
8	8	16	1	9	17	2	10	18	3	11	19	4	12	20	5	13	21	6	14	22	7	15
9	9	18	4	13	22	8	17	3	12	21	7	16	2	11	20	6	15	1	10	19	5	14
10	10	20	7	17	4	14	1	11	21	8	18	5	15	2	12	22	9	19	6	16	3	13
11	11	22	10	21	9	20	8	19	7	18	6	17	5	16	4	15	3	14	2	13	1	12
12	12	1	13	2	14	3	15	4	16	5	17	6	18	7	19	8	20	9	21	10	22	11
13	13	3	16	6	19	9	22	12	2	15	5	18	8	21	11	1	14	4	17	7	20	10
14	14	5	19	10	1	15	6	20	11	2	16	7	21	12	3	17	8	22	13	3	18	9
15	15	7	22	14	6	21	13	5	20	12	4	17	11	3	18	10	2	17	9	1	16	8
16	16	9	2	18	11	4	20	13	6	22	15	8	1	17	10	3	19	12	5	21	14	7
17	17	11	5	22	16	10	4	21	15	9	3	20	14	8	2	19	13	7	1	18	12	6
18	18	13	8	3	21	16	11	6	1	19	14	9	4	22	17	12	7	2	20	15	10	5
19	19	15	11	7	3	22	18	14	10	6	2	21	17	13	9	5	1	20	16	12	8	4
20	20	17	14	11	8	5	2	22	19	16	13	10	7	3	1	21	18	15	12	9	6	3
21	21	19	17	15	13	11	9	7	5	3	1	22	20	18	16	14	12	10	8	6	4	2
22	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Berdasarkan Tabel 5.8, dapat dilihat bahwa $e =$ elemen identitas $(\mathbb{Z}_{23} \setminus \{0\}, \bullet_{23}) = 1$. Invers masing-masing elemen adalah:
 $1^{-1} = 1, 2^{-1} = 12, 3^{-1} = 8, 4^{-1} = 6, 5^{-1} = 14, 6^{-1} = 4, 7^{-1} = 10, 8^{-1} = 3,$
 $9^{-1} = 18, 10^{-1} = 7, 11^{-1} = 21, 12^{-1} = 2, 13^{-1} = 16, 14^{-1} = 5, 15^{-1} = 20,$
 $16^{-1} = 13, 17^{-1} = 19, 18^{-1} = 9, 19^{-1} = 17, 20^{-1} = 15, 21^{-1} = 11, 22^{-1} = 22.$

Tabel 5.9. Tabel Cayley untuk $(\mathbb{Z}_{29} \setminus \{0\}, \bullet_{29})$

$\bullet_{29}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	1	4	7	10	13	16	19	22	25	28	2	5	8	11	14	17	20	23	26
4	4	8	12	16	20	24	28	3	7	11	15	19	23	27	2	6	10	14	18	22	26	1	5	9	13	17	21	25
5	5	10	15	20	25	1	6	11	16	21	26	2	7	12	17	22	27	3	8	13	18	23	28	4	9	14	19	24
6	6	12	18	24	1	7	13	19	25	2	8	14	20	26	3	9	15	21	27	4	10	16	22	28	5	11	17	23
7	7	14	21	28	6	13	20	27	5	12	19	26	4	11	18	25	3	10	17	24	2	9	16	23	1	8	15	22
8	8	16	24	3	11	19	27	6	14	22	1	9	17	25	4	12	20	28	7	15	23	2	10	18	26	5	13	21
9	9	18	27	7	16	25	5	14	23	3	12	21	1	10	19	28	8	17	26	6	15	24	4	13	22	2	11	20
10	10	20	1	11	21	2	12	22	3	13	23	4	14	24	5	15	25	6	16	26	7	17	27	8	18	28	9	19
11	11	22	4	15	26	8	19	1	12	23	5	16	27	9	20	2	13	24	6	17	28	10	21	3	14	25	7	18
12	12	24	7	19	2	14	26	9	21	4	16	28	11	23	6	18	1	13	25	8	20	3	15	27	10	22	5	17
13	13	26	10	23	7	20	4	17	1	14	27	11	24	8	21	5	18	2	15	28	12	25	9	22	6	19	3	16
14	14	28	13	27	12	26	11	25	10	24	9	23	8	22	7	21	6	20	5	19	4	18	3	17	2	16	1	15
15	15	1	16	2	17	3	18	4	19	5	20	6	21	7	22	8	23	9	24	10	25	11	26	12	27	13	28	14
16	16	3	19	6	22	9	25	12	28	15	2	18	5	21	8	24	11	27	14	1	17	4	20	7	23	10	26	13
17	17	5	22	10	27	15	3	20	8	25	13	1	18	6	23	11	28	16	4	21	9	26	14	2	19	7	24	12
18	18	7	25	14	3	21	10	28	17	6	24	13	2	20	9	27	16	5	23	12	1	19	8	26	15	4	22	11
19	19	9	28	18	8	27	17	7	26	16	6	25	15	5	24	14	4	23	13	3	22	12	2	21	11	1	20	10
20	20	11	2	22	13	4	24	15	6	26	17	8	28	19	10	1	21	12	3	23	14	5	25	16	7	27	18	9
21	21	13	5	26	18	10	2	23	15	7	28	20	12	4	25	17	9	1	22	14	6	27	19	11	3	24	16	8
22	22	15	8	1	23	16	9	2	24	17	10	3	25	18	11	4	26	19	12	5	27	20	13	3	28	21	14	7
23	23	17	11	5	28	22	16	10	4	27	21	15	9	3	26	20	14	8	2	25	19	13	7	1	24	18	12	6

24	24	19	14	9	4	28	23	18	13	8	3	27	22	17	12	7	2	26	21	16	11	3	1	25	20	15	10	5
25	25	21	17	13	9	5	1	26	22	18	14	10	6	2	27	23	19	15	11	7	3	28	24	20	16	12	8	4
26	26	23	20	17	14	11	8	5	2	28	25	22	19	16	13	10	7	4	1	27	24	21	18	15	12	9	6	3
27	27	25	23	21	19	17	15	13	11	9	7	5	3	1	28	26	24	22	20	18	16	14	12	10	8	6	4	2
28	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Berdasarkan Tabel 5.9, dapat dilihat bahwa $e = \text{elemen identitas } (\mathbb{Z}_{29} \setminus \{0\}, \bullet_{29}) = 1$.

Invers masing-masing elemen adalah:

$$\begin{array}{cccccccccc}
 1^{-1} = & 2^{-1} = & 3^{-1} & 4^{-1} = & 5^{-1} & 6^{-1} & 7^{-1} & 8^{-1} & 9^{-1} & 10^{-1} \\
 1, & 15, & = 10, & 22, & = 6, & = 5, & = 25, & = 11, & = 13, & = 3, \\
 11^{-1} & 12^{-1} & 13^{-1} & 14^{-1} & 15^{-1} & 16^{-1} & 17^{-1} & 18^{-1} & 19^{-1} & 20^{-1} \\
 = 8, & = 17, & = 9, & = 27, & = 2, & = 20, & = 12, & = 21, & = 26, & = 16, \\
 21^{-1} & 22^{-1} & 23^{-1} & 24^{-1} & 25^{-1} & 26^{-1} & 27^{-1} & 28^{-1} & & \\
 = 18, & = 4, & = 24, & = 23, & = 7, & = 19, & = 14, & = 28. & &
 \end{array}$$

Tabel 5.10. Tabel Cayley untuk $(\mathbb{Z}_{31} \setminus \{0\}, \bullet_{31})$

$\bullet_{31}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	2	5	8	11	14	17	20	23	26	29	1	4	7	10	13	16	19	22	25	28
4	4	8	12	16	20	24	28	1	5	9	13	17	21	25	29	2	6	10	14	18	22	26	30	3	7	11	15	19	23	27
5	5	10	15	20	25	30	4	9	14	19	24	29	3	8	13	18	23	28	2	7	12	17	22	27	1	6	11	16	21	26
6	6	12	18	24	30	5	11	17	23	29	4	10	16	22	28	3	9	15	21	27	2	8	14	20	26	1	7	13	19	25
7	7	14	21	28	4	11	18	25	1	8	15	22	29	5	12	19	26	2	9	16	23	30	6	13	20	27	3	10	17	24
8	8	16	24	1	9	17	25	2	10	18	26	3	11	19	27	4	12	20	28	5	13	21	29	6	14	22	30	7	15	23
9	9	18	27	5	14	23	1	10	19	28	6	15	24	2	11	20	29	7	16	25	3	12	21	30	8	17	26	4	13	22
10	10	20	30	9	19	29	8	18	28	7	17	27	6	16	26	5	15	25	4	14	24	3	13	23	2	12	22	1	11	21
11	11	22	2	13	24	4	15	26	6	17	28	8	19	30	10	21	1	12	23	3	14	25	5	16	27	7	18	29	9	20
12	12	24	5	17	29	10	22	3	15	27	8	20	1	13	25	6	18	30	11	23	4	16	28	9	21	2	14	26	7	19
13	13	26	8	21	3	16	29	11	24	6	19	1	14	27	9	22	4	17	30	12	25	7	20	2	15	28	10	23	5	18
14	14	28	11	25	8	22	5	19	2	16	30	13	27	10	24	7	21	4	18	1	15	29	12	26	9	23	6	20	3	17
15	15	30	14	29	13	28	12	27	11	26	10	25	9	24	8	23	7	22	6	21	5	20	4	19	3	18	2	17	1	16
16	16	1	17	2	18	3	19	4	20	5	21	6	22	7	23	8	24	9	25	10	26	11	27	12	28	13	29	14	30	15
17	17	3	20	6	23	9	26	12	29	15	1	18	4	21	7	24	10	27	13	30	16	2	19	5	22	8	25	11	28	14
18	18	5	23	10	28	15	2	20	7	25	12	30	17	4	22	9	27	14	1	19	6	24	11	29	16	3	21	8	26	13
19	19	7	26	14	2	21	9	28	16	4	23	11	30	18	6	25	13	1	20	8	27	15	3	22	10	29	17	5	24	12
20	20	9	29	18	7	27	16	5	25	14	3	23	12	1	21	10	30	19	8	28	17	6	26	15	4	24	13	2	22	11
21	21	11	1	22	12	2	23	13	3	24	14	4	25	15	5	26	16	6	27	17	7	28	18	8	29	19	9	30	20	10
22	22	13	4	26	17	8	30	21	12	3	25	16	7	29	20	11	2	24	15	6	28	19	10	1	23	14	5	27	18	9
23	23	15	7	30	22	14	6	29	21	13	5	28	20	12	4	27	19	11	3	26	18	10	2	25	17	9	1	24	16	8

24	24	17	10	3	27	20	13	6	30	23	16	9	2	26	19	12	5	29	22	15	8	1	25	18	11	4	28	21	14	7
25	25	19	13	7	1	26	20	14	8	2	27	21	15	9	3	28	22	6	10	4	29	23	17	11	5	30	24	18	12	6
26	26	21	16	11	6	1	27	22	17	12	7	2	28	23	18	13	8	3	29	24	19	14	9	4	30	25	20	15	10	5
27	27	23	19	15	11	7	3	30	26	22	18	14	10	6	2	29	25	21	17	13	9	5	1	28	24	20	16	12	8	4
28	28	25	22	19	16	13	10	7	4	1	29	26	23	20	17	14	11	8	5	2	30	27	24	21	18	15	12	9	6	3
29	29	27	25	23	21	19	17	15	13	11	9	7	5	3	1	30	28	26	24	22	20	18	16	14	12	10	8	6	4	2
30	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Berdasarkan Tabel 5.10, dapat dilihat bahwa $e = \text{elemen identitas } (\mathbb{Z}_{31} \setminus \{\mathbf{0}\}, \bullet_{31}) = 1$,
Invers masing-masing elemen adalah:

$1^{-1} =$	$2^{-1} =$	3^{-1}	$4^{-1} =$	5^{-1}	6^{-1}	7^{-1}	8^{-1}	9^{-1}	10^{-1}
1,	16,	$= 21,$	8,	$= 25,$	$= 26,$	$= 9,$	$= 4,$	$= 7,$	$= 28,$
11^{-1}	12^{-1}	13^{-1}	14^{-1}	15^{-1}	16^{-1}	17^{-1}	18^{-1}	19^{-1}	20^{-1}
$= 17,$	$= 13,$	$= 12,$	$= 20,$	$= 29,$	$= 2,$	$= 11,$	$= 19,$	$= 18,$	$= 14,$
21^{-1}	22^{-1}	23^{-1}	24^{-1}	25^{-1}	26^{-1}	27^{-1}	28^{-1}	29^{-1}	30^{-1}
$= 3,$	$= 24,$	$= 27,$	$= 22,$	$= 5,$	$= 6,$	$= 23,$	$= 10,$	$= 15,$	$= 30.$

Tabel 5.11. Tabel Cayley untuk $(\mathbb{Z}_{37} \setminus \{0\}, \bullet_{37})$

$\bullet_{31}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	2	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	35	1	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31	34
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	3	7	11	15	19	23	27	31	35	2	6	10	14	18	22	26	30	34	1	5	9	13	17	21	25	29	33
5	5	10	15	20	25	30	35	3	8	13	18	23	28	33	1	6	11	16	21	26	31	36	4	9	14	19	24	29	34	2	7	12	17	22	27	32
6	6	12	18	24	30	36	5	11	17	23	29	35	4	10	16	22	28	34	3	9	15	21	27	33	2	8	14	20	26	32	1	7	13	19	25	31
7	7	14	21	28	35	5	12	19	26	33	3	10	17	24	31	1	8	15	22	29	36	6	13	20	27	34	4	11	18	25	32	2	9	16	23	30
8	8	16	24	32	3	11	19	27	35	6	14	22	30	1	9	17	25	33	4	12	20	28	36	7	15	23	31	2	10	18	26	34	5	13	21	29
9	9	18	27	36	8	17	26	35	7	16	25	34	6	15	24	33	5	14	23	32	4	13	22	31	3	12	21	30	2	11	20	29	1	10	19	28
10	10	20	30	3	13	23	33	6	16	26	36	9	19	29	2	12	22	32	5	15	25	35	8	18	28	1	11	21	31	4	14	24	34	7	17	27
11	11	22	33	7	18	29	3	14	25	36	10	21	32	6	17	28	2	13	24	35	9	20	31	5	16	27	1	12	23	34	8	19	30	4	15	26
12	12	24	36	11	23	35	10	22	34	9	21	33	8	20	32	7	19	31	6	18	30	5	17	29	4	16	28	3	15	27	2	14	26	1	13	25
13	13	26	2	15	28	4	17	30	6	19	32	8	21	34	10	23	36	12	25	1	14	27	3	16	29	5	18	31	7	20	33	9	22	35	11	24
14	14	28	5	19	33	10	24	1	15	29	6	20	34	11	25	2	16	30	7	21	35	12	26	3	17	31	8	22	36	13	27	4	18	32	9	23
15	15	30	8	23	1	16	31	9	24	2	17	32	10	25	3	18	33	11	26	4	19	34	12	27	5	20	35	13	28	6	21	36	14	29	7	22
16	16	32	11	27	6	22	1	17	33	12	28	7	23	2	18	34	13	29	8	24	3	19	35	14	30	9	25	4	20	36	15	31	10	26	5	21
17	17	34	14	31	11	28	8	25	5	22	2	19	36	16	33	13	30	10	27	7	24	4	21	1	18	35	15	32	12	29	9	26	6	23	3	20
18	18	36	17	35	16	34	15	33	14	32	13	31	12	30	11	29	10	28	9	27	8	26	7	25	6	24	5	23	4	22	5	21	6	20	1	19
19	19	1	20	2	21	3	22	4	23	5	24	6	25	7	26	8	27	9	28	10	29	11	30	12	31	13	32	14	33	15	34	16	35	17	36	18
20	20	3	23	6	26	9	29	12	32	15	35	18	1	21	4	24	7	27	10	30	13	33	16	36	19	2	22	5	25	8	28	11	31	14	34	17
21	21	5	26	10	31	15	36	20	4	25	9	30	14	35	19	3	24	8	29	13	34	18	2	23	7	28	12	33	17	1	22	6	27	11	32	16
22	22	7	29	14	36	21	6	28	13	35	20	5	27	12	34	19	4	26	11	33	18	3	25	10	32	17	2	24	9	31	16	1	23	8	30	15
23	23	9	32	18	4	27	13	36	22	8	31	17	3	26	12	35	21	7	30	16	2	25	11	34	20	6	29	15	1	24	10	33	19	5	28	14
24	24	11	35	22	9	33	20	7	31	18	5	29	16	3	27	14	1	25	12	36	23	10	34	21	8	32	19	6	30	17	4	28	15	2	26	13
25	25	13	1	26	14	2	27	15	3	28	16	4	29	17	5	30	18	6	31	19	7	32	20	8	33	21	9	34	22	10	35	23	11	36	24	12

26	26	15	4	30	19	8	34	23	12	1	27	16	5	31	20	9	35	24	13	2	28	17	6	32	21	10	36	25	14	3	29	18	7	33	22	11
27	27	17	7	34	24	14	4	31	21	11	1	28	18	8	35	25	15	5	32	22	12	2	29	19	9	36	26	16	6	33	23	13	3	30	20	10
28	28	19	10	1	29	20	11	2	30	21	12	3	31	22	13	4	32	23	14	5	33	24	15	6	34	25	16	7	35	26	17	8	36	27	18	9
29	29	21	13	5	34	26	18	10	2	31	23	15	7	36	28	20	12	4	33	25	17	9	1	30	22	14	6	35	27	19	11	3	32	24	16	8
30	30	23	16	9	2	32	25	18	11	4	34	27	20	13	6	36	29	22	15	8	1	31	24	17	10	3	33	26	19	12	5	35	28	21	14	7
31	31	25	19	13	7	1	32	26	20	14	8	2	33	27	21	15	9	3	34	28	22	16	10	4	35	29	23	17	11	5	36	30	24	18	12	6
32	32	27	22	17	12	7	2	34	29	24	19	14	9	4	36	31	26	21	16	11	6	1	33	28	23	18	13	8	3	35	30	25	20	15	10	5
33	33	29	25	21	17	13	9	5	1	34	30	24	22	18	14	10	6	2	35	31	27	23	19	15	11	7	3	36	32	28	24	20	16	12	8	4
34	34	31	28	25	22	19	16	13	10	7	4	1	35	32	29	26	23	20	17	14	11	8	5	2	36	33	30	27	24	21	18	15	12	9	6	3
35	35	33	31	29	27	25	23	21	19	17	15	13	11	9	7	5	3	1	36	34	32	30	28	26	24	22	20	18	16	14	12	10	8	6	4	2
36	36	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Berdasarkan Tabel 5.11, dapat dilihat bahwa $e = \text{elemen identitas } (\mathbb{Z}_{37} \setminus \{0\}, \bullet_{37}) = 1$,

Invers masing-masing elemen adalah:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 1^{-1} = & 2^{-1} = & 3^{-1} & 4^{-1} = & 5^{-1} & 6^{-1} & 7^{-1}16, & 8^{-1} & 9^{-1} & 10^{-1} \\
 1, & 19, & = 25, & 28, & = 15, & = 31, & & = 14, & = 33, & = 26, \\
 11^{-1} & 12^{-1} & 13^{-1} & 14^{-1} & 15^{-1} & 16^{-1} & 17^{-1} & 18^{-1} & 19^{-1} & 20^{-1} \\
 = 27, & = 34, & = 20, & = 8, & = 5, & = 7, & = 24, & = 35, & = 2, & = 13, \\
 21^{-1} & 22^{-1} & 23^{-1} & 24^{-1} & 25^{-1} & 26^{-1}10, & 27^{-1} & 28^{-1} & 29^{-1} & 30^{-1} \\
 = 30, & = 32, & = 29, & = 17, & = 3, & & = 11, & = 4, & = 3, & = 21 \\
 31^{-1} & 32^{-1} & 33^{-1} & 34^{-1} & 35^{-1} & 36^{-1} & & & & \\
 = 6, & = 22, & = 9, & = 12, & = 18, & = 36. & & & &
 \end{array}$$

Tabel 5.12. Tabel Cayley untuk $(\mathbb{Z}_{41} \setminus \{0\}, \bullet_{41})$

$\bullet_{41}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	1	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31	34	37	40	2	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	35	38
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	3	7	11	15	19	23	27	31	35	39	2	6	10	14	18	22	26	30	34	38	1	5	9	13	17	21	25	29	33	37
5	5	10	15	20	25	30	35	40	4	9	14	19	24	29	34	39	3	8	13	18	23	28	33	38	2	7	12	17	22	27	32	37	1	6	11	16	21	26	31	36
6	6	12	18	24	30	36	1	7	13	19	25	31	37	2	8	14	20	26	32	38	3	9	15	21	27	33	39	4	10	16	22	28	34	40	5	11	17	23	29	35
7	7	14	21	28	35	1	8	15	22	29	36	2	9	16	23	30	34	3	10	17	24	31	38	4	11	18	25	32	39	5	12	19	26	33	40	6	13	20	27	34
8	8	16	24	32	40	7	15	23	31	39	6	14	22	30	38	5	13	21	29	37	4	12	20	28	36	3	11	19	27	35	2	10	18	26	34	1	9	17	25	33
9	9	18	27	36	4	13	22	31	40	8	17	26	35	3	12	21	30	39	7	16	25	34	2	11	20	29	38	6	15	24	33	1	10	19	28	37	5	14	23	32
10	10	20	30	40	9	19	29	39	8	18	28	38	7	17	27	37	6	16	26	36	5	15	25	35	4	14	24	34	3	13	23	33	2	12	22	32	1	11	21	31
11	11	22	33	3	14	25	36	6	17	28	39	9	20	31	1	12	23	34	4	15	26	37	7	18	29	40	10	21	32	2	13	24	35	5	16	27	38	8	19	30
12	12	24	36	7	19	31	2	14	26	38	9	21	33	4	16	28	40	11	23	35	6	18	30	1	13	25	37	8	20	32	3	15	27	39	10	22	34	5	17	29
13	13	26	39	11	24	37	9	22	35	7	20	33	5	18	31	3	16	29	1	14	27	40	12	25	38	10	23	36	8	21	34	6	19	32	4	17	30	2	15	28
14	14	28	1	15	29	2	16	30	3	17	31	4	18	32	5	18	33	6	20	34	7	21	35	8	22	36	9	23	37	10	24	38	11	25	39	12	26	40	13	27
15	15	30	4	19	34	8	23	38	12	27	1	16	31	5	20	35	9	24	39	13	28	2	17	32	6	21	36	10	25	40	14	29	3	18	33	7	22	37	11	26
16	16	32	7	23	39	14	30	5	21	37	12	28	3	18	35	10	26	1	17	33	8	24	40	15	31	6	22	38	13	29	4	20	36	11	27	2	18	34	9	25
17	17	34	10	27	3	20	37	13	30	6	23	40	16	33	9	26	2	19	36	12	29	5	22	39	15	32	8	25	1	18	35	11	28	4	21	38	14	31	7	24
18	18	36	13	31	8	26	3	21	39	16	34	11	29	6	24	1	19	37	14	32	9	27	4	22	40	17	35	12	30	7	25	2	20	38	15	33	10	28	5	23
19	19	38	16	35	13	32	10	29	7	26	4	23	1	20	39	17	36	14	33	11	30	8	27	5	24	2	21	40	18	37	15	34	12	31	9	28	6	25	3	22
20	20	40	19	39	18	38	17	37	16	36	15	35	14	34	13	33	12	32	11	31	10	30	9	29	8	28	7	27	6	26	5	25	4	24	3	23	2	22	1	21
21	21	1	22	2	23	3	24	4	25	5	26	6	27	7	28	8	29	9	30	10	31	11	32	12	33	13	34	14	35	15	36	16	37	17	38	18	39	19	40	20
22	22	3	25	6	28	9	31	12	34	15	37	18	40	21	2	24	5	27	8	30	11	33	14	36	17	39	20	1	23	4	26	7	29	10	32	13	35	16	38	19
23	23	5	28	10	33	15	38	20	2	25	7	30	12	35	17	40	22	4	27	9	32	14	37	19	1	24	6	29	11	34	16	39	21	3	26	8	31	13	36	18
24	24	7	31	14	38	21	4	28	11	35	18	1	25	8	32	15	39	22	5	29	12	36	19	2	26	9	33	16	40	23	6	30	13	37	20	3	27	10	34	17
25	25	9	34	18	2	27	11	36	20	4	29	13	38	22	6	31	15	40	24	8	33	17	1	26	10	35	19	3	28	12	37	21	5	30	14	39	23	7	32	16
26	26	11	37	22	7	33	18	3	29	14	40	25	10	36	21	6	32	18	2	28	13	39	24	8	35	20	5	31	16	1	27	12	38	23	8	34	19	4	30	15
27	27	13	40	26	12	39	25	11	38	24	10	37	23	9	36	22	8	35	21	7	34	20	6	33	19	5	32	18	4	31	17	3	30	16	2	29	15	1	28	14
28	28	15	2	30	17	4	32	19	6	34	21	8	36	23	10	38	25	12	40	27	14	1	29	16	3	31	18	5	33	20	7	35	22	9	37	24	11	39	26	13
29	29	17	5	34	22	10	39	27	15	3	32	20	8	37	25	13	1	30	18	6	35	23	11	40	28	16	4	33	21	9	38	26	14	2	31	19	7	36	24	12
30	30	19	8	38	27	16	5	35	24	13	2	32	21	10	40	29	18	7	37	26	15	4	34	23	12	1	31	20	9	39	28	17	6	36	25	14	3	33	22	11
31	31	21	11	1	32	22	12	2	33	23	13	3	34	24	14	4	35	25	15	5	36	26	16	6	37	27	17	7	38	28	18	8	39	29	16	9	40	30	20	10
32	32	23	14	5	37	28	19	10	1	33	24	15	6	38	29	20	11	2	34	25	16	7	39	30	21	12	3	35	26	17	8	40	31	22	13	4	36	27	18	9
33	33	25	17	9	1	34	26	18	10	2	35	27	19	11	3	36	28	20	12	4	37	29	21	13	5	38	30	22	14	6	39	31	23	15	7	40	32	24	16	8
34	34	27	20	13	6	40	33	26	19	12	5	39	32	25	18	11	4	38	31	24	17	10	3	37	30	23	16	9	2	36	29	22	15	8	1	35	28	21	14	7

35	35	29	23	17	11	5	40	34	28	22	16	10	4	39	33	27	21	15	9	3	38	32	26	20	14	8	2	37	31	25	19	13	7	1	36	30	24	18	12	6
36	36	31	26	21	16	11	6	1	37	32	27	22	17	12	7	2	38	33	28	23	18	13	8	3			29	24	19	14	9	4	40	35	30	25	20	15	10	5
37	37	33	28	25	21	17	13	9	5	1	38	34	30	26	22	18	14	10	6	2	39	35	31	27	23	19	15	11	7	3	40	36	32	28	24	20	16	12	8	4
38	38	35	32	29	26	23	20	17	14	11	8	5	2	40	37	34	31	28	25	22	19	16	13	10	7	4	1	39	36	33	30	27	24	21	18	15	12	9	6	3
39	39	37	35	33	31	29	27	25	23	21	19	17	15	13	11	9	7	5	3	1	40	38	36	34	32	20	28	26	24	22	20	18	16	14	12	10	8	6	4	2
40	40	39	38	37	36	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

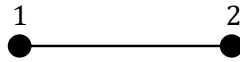
Berdasarkan Tabel 5.12, dapat dilihat bahwa $e = \text{elemen identitas } (\mathbb{Z}_{41} \setminus \{0\}, \bullet_{41}) = 1$,

Invers masing-masing elemen adalah:

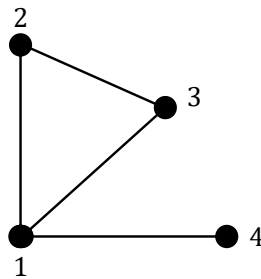
$1^{-1} =$	$2^{-1} =$	3^{-1}	$4^{-1} =$	5^{-1}	6^{-1}	7^{-1}	8^{-1}	9^{-1}	10^{-1}
1,	21,	= 14,	31,	= 33,	= 7,	= 6,	= 36,	= 32,	= 37,
11^{-1}	12^{-1}	13^{-1}	14^{-1}	15^{-1}	16^{-1}	17^{-1}	18^{-1}	19^{-1}	20^{-1}
= 15,	= 24,	= 19,	= 3,	= 11,	= 18,	= 29,	= 16,	= 13,	= 39,
21^{-1}	22^{-1}	23^{-1}	24^{-1}	25^{-1}	26^{-1}	27^{-1}	28^{-1}	29^{-1}	30^{-1}
= 2,	= 28,	= 25,	= 12,	= 23,	= 30,	= 38,	= 22,	= 17,	= 26,
31^{-1}	32^{-1}	33^{-1}	34^{-1}	35^{-1}	36^{-1}	37^{-1}	38^{-1}	39^{-1}	40^{-1}
= 4,	= 9,	= 5,	= 35,	= 34,	= 8,	= 10,	= 27,	= 20,	= 40.

5.2. Pembentukan Graf Identitas dari $(\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \bullet_n)$, n Prima

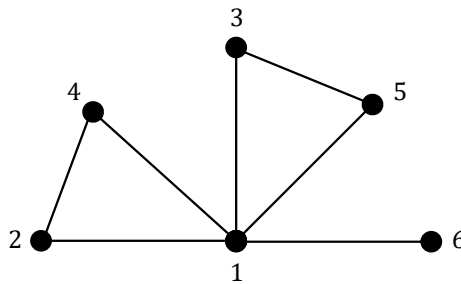
Pada subbab 5.1 telah diberikan Tabel Cayley untuk $(\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \bullet_n)$, n prima, $2 < n < 43$. Berikut merupakan gambar graf identitas untuk setiap grup $(\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \bullet_n)$, n prima, $2 < n < 43$, yang dibentuk berdasarkan Tabel 5.1-5.12.



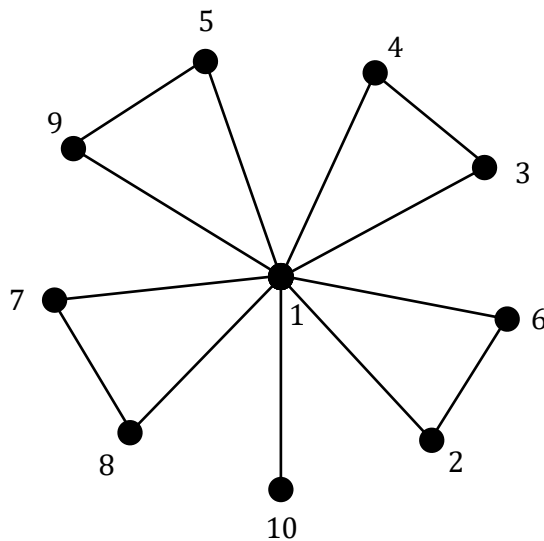
Gambar 5.1. Graf Identitas Grup $(\mathbb{Z}_3 \setminus \{0\}, \bullet_3)$



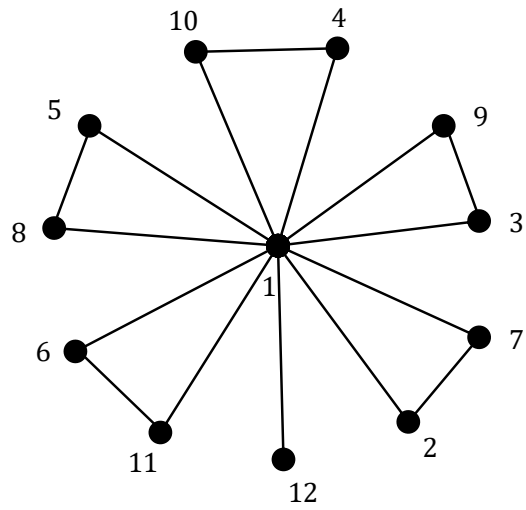
Gambar 5.2. Graf Identitas Grup $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}, \bullet_5)$



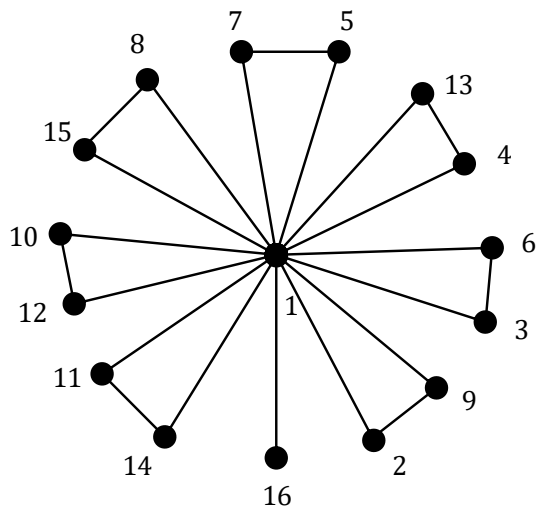
Gambar 5.3. Graf Identitas Grup $(\mathbb{Z}_7 \setminus \{0\}, \bullet_7)$



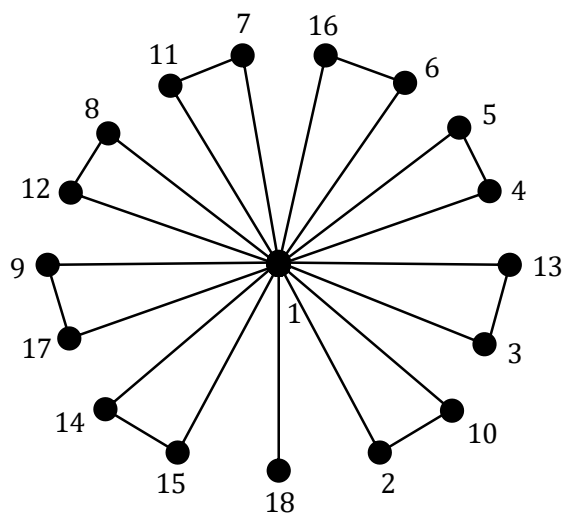
Gambar 5.4. Graf Identitas Grup $(\mathbb{Z}_{11} \setminus \{0\}, \bullet_{11})$



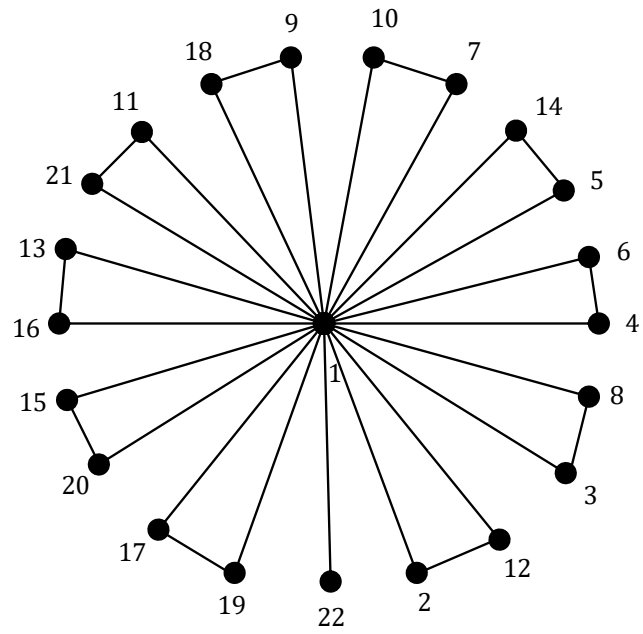
Gambar 5.5. Graf Identitas Grup $(\mathbb{Z}_{13} \setminus \{0\}, \bullet_{13})$



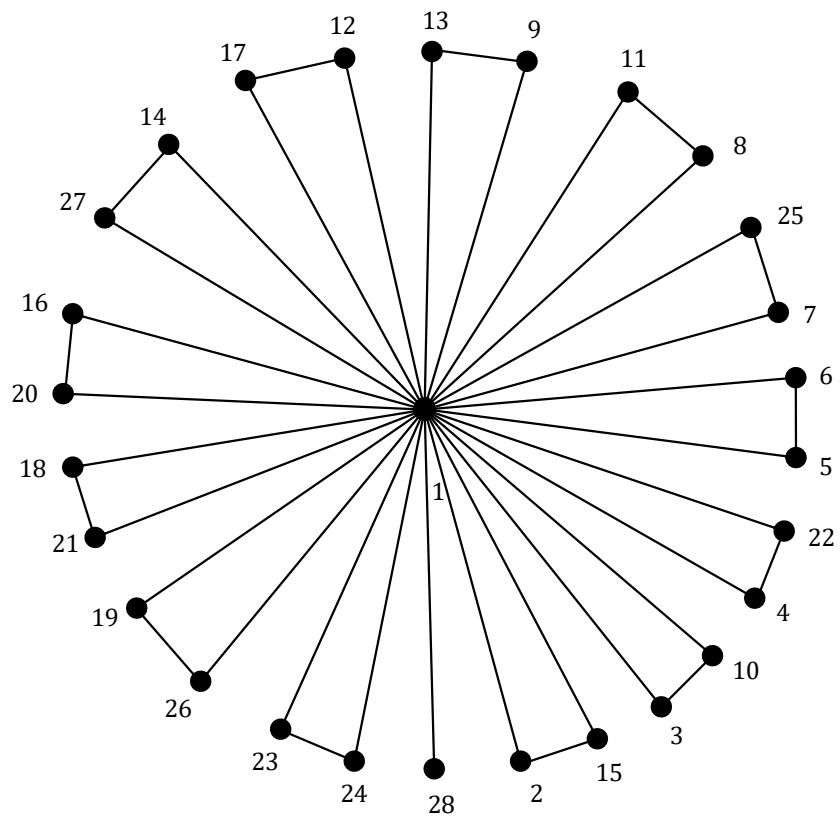
Gambar 5.6. Graf Identitas Grup $(\mathbb{Z}_{17} \setminus \{0\}, \bullet_{17})$



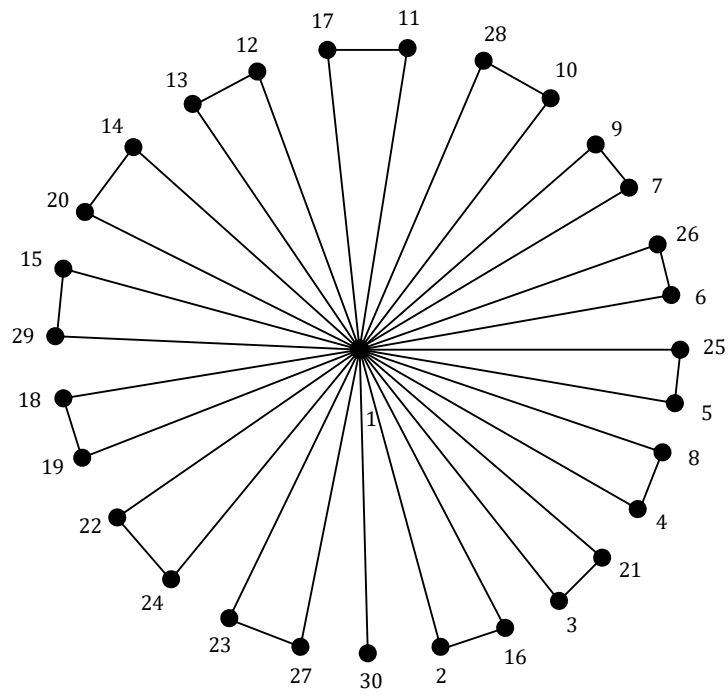
Gambar 5.7. Graf Identitas Grup $(\mathbb{Z}_{19} \setminus \{0\}, \bullet_{19})$



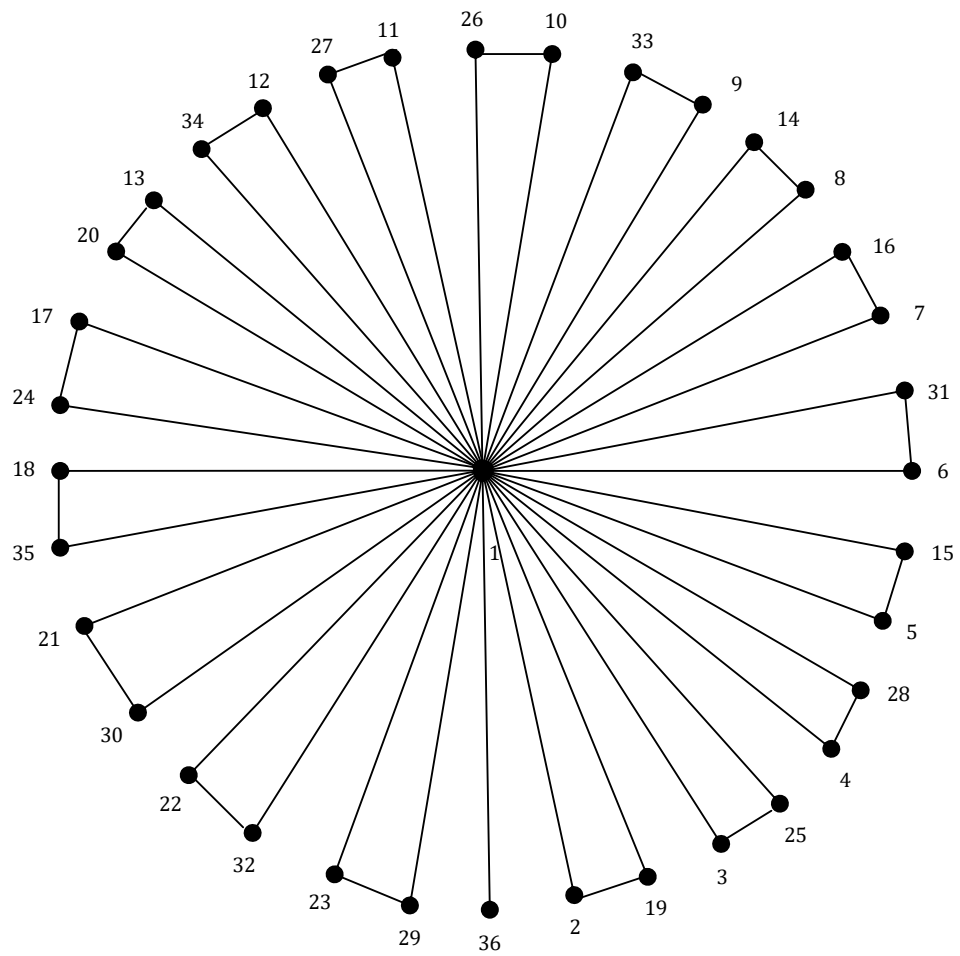
Gambar 5.8. Graf Identitas Grup $(\mathbb{Z}_{23} \setminus \{0\}, \cdot_{23})$



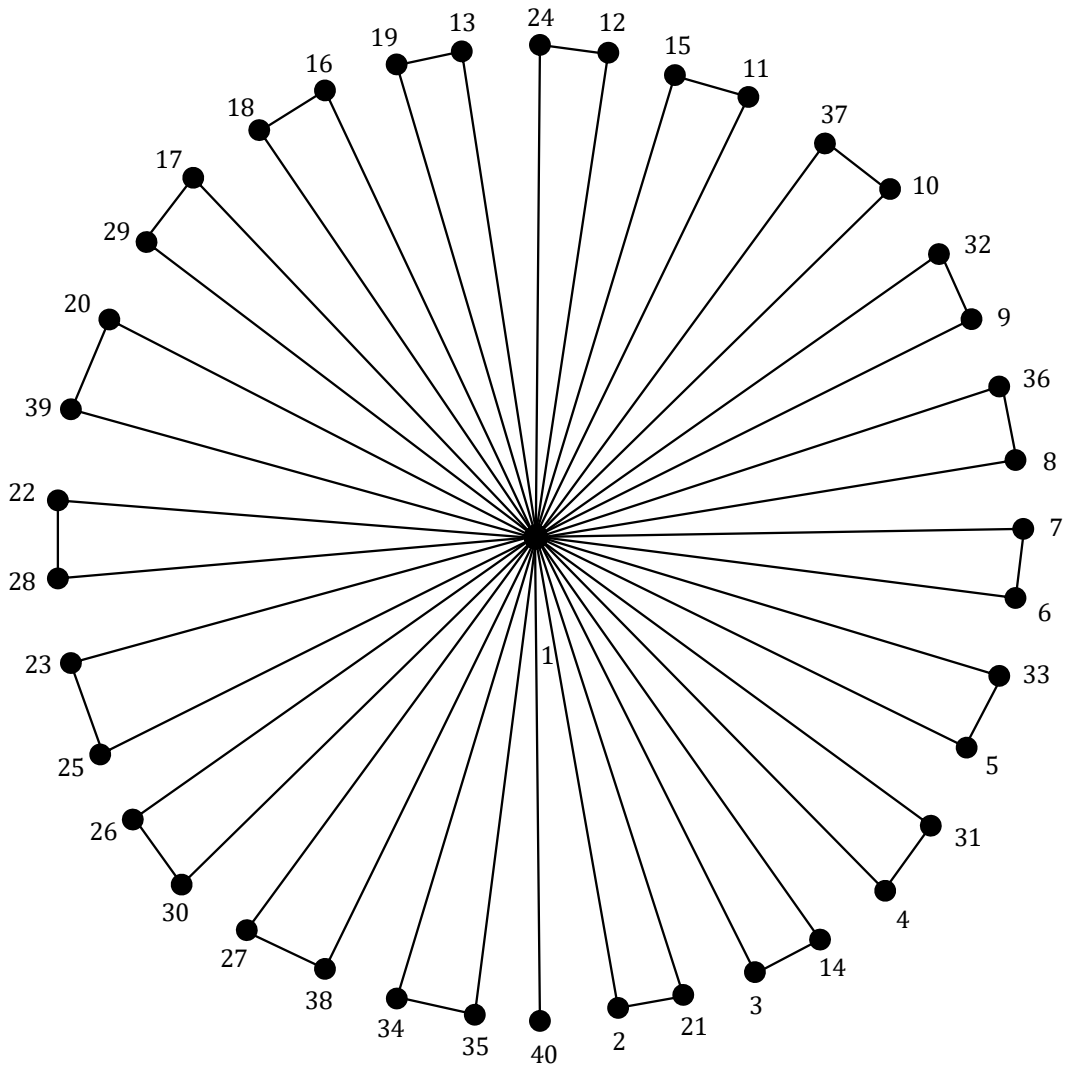
Gambar 5.9. Graf Identitas Grup $(\mathbb{Z}_{29} \setminus \{0\}, \cdot_{29})$



Gambar 5.10. Graf Identitas Grup $(\mathbb{Z}_{31} \setminus \{0\}, \bullet_{31})$



Gambar 5.11. Graf Identitas Grup $(\mathbb{Z}_{37} \setminus \{0\}, \bullet_{37})$



Gambar 5.12. Graf Identitas Grup $(\mathbb{Z}_{41} \setminus \{0\}, \bullet_{41})$

5.3. Pembentukan Graf Cayley dari Subgrup-Subgrup dalam Grup $(\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \bullet_n)$, n Prima

Pada subbab 5.1 telah diberikan Tabel Cayley untuk $(\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \bullet_n)$, n prima, $2 < n < 43$. Pada bagian ini diberikan gambar graf Cayley dari subhimpunan dalam grup $(\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \bullet_n)$, n prima, $2 < n < 19$, yang dibentuk berdasarkan Tabel 5.1-5.6. Berdasarkan Definisi 2.3, subhimpunan S yang memenuhi definisi graf Cayley untuk setiap grup $(\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \bullet_n)$, n prima, $2 < n < 19$, diberikan berikut ini.

1. Grup $(\mathbb{Z}_3 \setminus \{0\}, \bullet_3)$ terdiri dari 2 elemen

Satu elemen: $S_1 = \{2\}$

2. Grup $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}, \bullet_5)$ terdiri dari empat elemen

Satu elemen: $S_1 = \{4\}$,

Dua elemen:	$S_2 = \{2,3\},$
Tiga elemen:	$S_3 = \{2,3,4\}$

3. Grup $(\mathbb{Z}_7 \setminus \{0\}, \bullet_7)$ terdiri dari enam elemen

Satu elemen:	$S_1 = \{6\},$
Dua elemen:	$S_2 = \{2,4\},$ $S_3 = \{3,5\},$
Tiga elemen:	$S_4 = \{2,4,6\},$ $S_5 = \{3,5,6\},$
Empat elemen:	$S_6 = \{2,3,4,5\},$
Lima elemen:	$S_7 = \{2,3,4,5,6\},$

4. Grup $(\mathbb{Z}_{11} \setminus \{0\}, \bullet_{11})$ terdiri dari sepuluh elemen

Satu elemen:	$S_1 = \{10\},$
Dua elemen:	$S_2 = \{2,6\},$ $S_3 = \{3,4\},$ $S_4 = \{5,9\},$ $S_5 = \{7,8\},$
Tiga elemen:	$S_6 = \{2,6,10\}$ $S_7 = \{3,4,10\},$ $S_8 = \{5,9,10\},$ $S_9 = \{7,8,10\},$
Empat elemen:	$S_{10} = \{2,3,4,6\},$ $S_{11} = \{2,5,6,9\},$ $S_{12} = \{2,6,7,8\},$ $S_{13} = \{3,4,5,9\},$ $S_{14} = \{3,4,7,8\},$ $S_{15} = \{5,7,8,9\},$
Lima elemen:	$S_{16} = \{2,3,4,6,10\},$ $S_{17} = \{2,5,6,9,10\},$ $S_{18} = \{2,6,7,8,10\},$ $S_{19} = \{3,4,5,9,10\},$ $S_{20} = \{3,4,7,8,10\},$ $S_{21} = \{5,7,8,9,10\},$
Enam elemen:	$S_{22} = \{2,3,4,5,6,9\},$ $S_{23} = \{2,5,6,7,8,9\},$ $S_{24} = \{3,4,5,7,8,9\},$ $S_{25} = \{2,3,4,6,7,8\},$
Tujuh elemen:	$S_{26} = \{2,3,4,5,6,9,10\},$ $S_{27} = \{2,5,6,7,8,9,10\},$ $S_{28} = \{3,4,5,7,8,9,10\},$ $S_{29} = \{2,3,4,6,7,8,10\},$
Delapan elemen:	$S_{30} = \{2,3,4,5,6,7,8,9\},$
Sembilan elemen:	$S_{31} = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

5. Grup $(\mathbb{Z}_{13} \setminus \{0\}, \bullet_{13})$ terdiri dari dua belas elemen

Satu elemen:	$S_1 = \{12\},$
Dua elemen:	$S_2 = \{2,7\},$ $S_3 = \{3,9\},$

	$S_4 = \{4,10\},$	$S_5 = \{5,8\},$
	$S_6 = \{6,11\},$	
Tiga elemen:	$S_7 = \{2,7,12\},$ $S_9 = \{4,10,12\},$ $S_{11} = \{6,11,12\}$	$S_8 = \{3,9,12\},$ $S_{10} = \{5,8,12\},$
Empat elemen:	$S_{12} = \{2,3,7,9\},$ $S_{14} = \{2,5,7,8\},$ $S_{16} = \{3,4,9,10\},$ $S_{18} = \{3,6,9,11\},$ $S_{20} = \{4,6,10,11\},$	$S_{13} = \{2,4,7,10\},$ $S_{15} = \{2,6,7,11\},$ $S_{17} = \{3,5,8,9\},$ $S_{19} = \{4,5,8,10\},$ $S_{21} = \{5,8,6,11\},$
Lima elemen:	$S_{22} = \{2,3,7,9,12\},$ $S_{24} = \{2,5,7,8,12\},$ $S_{26} = \{3,4,9,10,12\},$ $S_{28} = \{3,6,9,11,12\},$ $S_{30} = \{4,6,10,11,12\},$	$S_{23} = \{2,4,7,10,12\},$ $S_{25} = \{2,6,7,11,12\},$ $S_{27} = \{3,5,8,9,12\},$ $S_{29} = \{4,5,8,10,12\},$ $S_{31} = \{5,8,6,11,12\},$
Enam elemen:	$S_{32} = \{2,3,4,7,9,10\},$ $S_{34} = \{2,3,6,7,9,11\},$ $S_{36} = \{2,4,6,7,10,11\},$ $S_{38} = \{3,4,5,8,9,10\},$ $S_{40} = \{3,5,6,8,9,11\},$	$S_{33} = \{2,3,5,7,8,9\},$ $S_{35} = \{2,4,5,7,8,10\},$ $S_{37} = \{2,5,6,7,8,11\},$ $S_{39} = \{3,4,6,9,10,11\},$ $S_{41} = \{4,5,6,8,10,11\},$
Tujuh elemen:	$S_{42} = \{2,3,4,7,9,10,12\},$ $S_{44} = \{2,3,6,7,9,11,12\},$ $S_{46} = \{2,4,6,7,10,11,12\},$ $S_{48} = \{3,4,5,8,9,10,12\},$ $S_{50} = \{3,5,6,8,9,11,12\},$	$S_{43} = \{2,3,5,7,8,9,12\},$ $S_{45} = \{2,4,5,7,8,10,12\},$ $S_{47} = \{2,5,6,7,8,11,12\},$ $S_{49} = \{3,4,6,9,10,11,12\},$ $S_{51} = \{4,5,6,8,10,11,12\},$
Delapan elemen:	$S_{52} = \{2,3,4,5,7,8,9,10\},$ $S_{54} = \{2,3,5,6,7,8,9,11\},$ $S_{56} = \{3,4,5,6,8,9,10,11\},$	$S_{53} = \{2,3,4,6,7,9,10,11\},$ $S_{55} = \{2,4,5,6,7,8,10,11\},$
Sembilan elemen:	$S_{57} = \{2,3,4,5,7,8,9,10,12\},$ $S_{59} = \{2,3,5,6,7,8,9,11,12\},$ $S_{61} = \{3,4,5,6,8,9,10,11,12\},$	$S_{58} = \{2,3,4,6,7,9,10,11,12\},$ $S_{60} = \{2,4,5,6,7,8,10,11,12\},$
Sepuluh elemen:	$S_{62} = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\},$	

Sebelas elemen: $S_{63} = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$,

6. Grup $(\mathbb{Z}_{17} \setminus \{0\}, \bullet_{17})$ terdiri dari enam belas elemen

Satu elemen:	$S_1 = \{16\}$,	
Dua elemen:	$S_2 = \{2,9\}$, $S_4 = \{4,13\}$, $S_6 = \{8,15\}$, $S_8 = \{11,14\}$,	$S_3 = \{3,6\}$, $S_5 = \{5,7\}$, $S_7 = \{10,12\}$,
Tiga elemen:	$S_9 = \{2,9,16\}$, $S_{11} = \{4,13,16\}$, $S_{13} = \{8,15,16\}$, $S_{15} = \{11,14,16\}$,	$S_{10} = \{3,6,16\}$ $S_{12} = \{5,7,16\}$, $S_{14} = \{10,12,16\}$,
Empat elemen:	$S_{16} = \{2,3,6,9\}$, $S_{18} = \{2,5,7,9\}$, $S_{20} = \{2,9,10,12\}$, $S_{22} = \{3,4,6,13\}$, $S_{24} = \{3,6,8,15\}$, $S_{26} = \{3,6,11,14\}$, $S_{28} = \{4,8,13,15\}$, $S_{30} = \{4,11,13,14\}$, $S_{32} = \{5,7,10,12\}$, $S_{34} = \{8,10,12,15\}$, $S_{36} = \{10,11,12,14\}$,	$S_{17} = \{2,4,9,13\}$, $S_{19} = \{2,8,9,15\}$, $S_{21} = \{2,9,11,14\}$, $S_{23} = \{3,5,6,7\}$, $S_{25} = \{3,6,10,12\}$, $S_{27} = \{4,5,7,13\}$, $S_{29} = \{4,10,12,13\}$, $S_{31} = \{5,7,8,15\}$, $S_{33} = \{5,7,11,14\}$, $S_{35} = \{8,11,14,15\}$,
Lima elemen:	$S_{37} = \{2,3,6,9,16\}$, $S_{39} = \{2,5,7,9,16\}$, $S_{41} = \{2,9,10,12,16\}$, $S_{43} = \{3,4,6,13,16\}$, $S_{45} = \{3,6,8,15,16\}$, $S_{47} = \{3,6,11,14,16\}$, $S_{49} = \{4,8,13,15,16\}$, $S_{51} = \{4,11,13,14,16\}$,	$S_{38} = \{2,4,9,13,16\}$, $S_{40} = \{2,8,9,15,16\}$, $S_{42} = \{2,9,11,14,16\}$, $S_{44} = \{3,5,6,7,16\}$, $S_{46} = \{3,6,10,12,16\}$, $S_{48} = \{4,5,7,13,16\}$, $S_{50} = \{4,10,12,13,16\}$, $S_{52} = \{5,7,8,15,16\}$,

	$S_{53} = \{5,7,10,12,16\},$	$S_{54} = \{5,7,11,14,16\},$
	$S_{55} = \{8,10,12,15,16\},$	$S_{56} = \{8,11,14,15,16\},$
	$S_{57} = \{10,11,12,14,16\},$	
Enam elemen:	$S_{58} = \{2,3,4,6,9,13\},$	$S_{59} = \{2,3,5,6,7,9\},$
	$S_{60} = \{2,3,6,8,9,15\},$	$S_{61} = \{2,3,6,9,10,12\},$
	$S_{62} = \{2,3,6,9,11,14\},$	$S_{63} = \{2,4,5,7,9,13\},$
	$S_{64} = \{2,4,8,9,13,15\},$	$S_{65} = \{2,4,9,10,12,13\},$
	$S_{66} = \{2,4,9,11,13,14\},$	$S_{67} = \{2,5,7,8,9,15\},$
	$S_{68} = \{2,5,7,9,10,12\},$	$S_{69} = \{2,5,7,9,11,14\},$
	$S_{70} = \{2,8,9,11,14,15\},$	$S_{71} = \{2,8,9,11,14,15\},$
	$S_{72} = \{2,9,10,11,12,14\},$	$S_{73} = \{3,4,5,6,7,13\},$
	$S_{74} = \{3,4,6,8,13,15\},$	$S_{75} = \{3,4,6,10,12,13\},$
	$S_{76} = \{3,4,6,11,13,14\},$	$S_{77} = \{3,5,6,7,8,15\},$
	$S_{78} = \{3,5,6,7,10,12\},$	$S_{79} = \{3,5,6,7,11,14\},$
	$S_{80} = \{3,6,8,11,14,15\},$	$S_{81} = \{3,6,8,10,12,15\},$
	$S_{82} = \{3,6,10,11,12,14\},$	$S_{83} = \{4,5,7,8,13,16\},$
	$S_{84} = \{4,5,7,10,12,13\},$	$S_{85} = \{4,5,7,11,13,14\},$
	$S_{86} = \{4,8,10,12,13,15\},$	$S_{87} = \{4,8,11,13,14,15\},$
	$S_{88} = \{4,10,11,12,13,14\}$	$S_{89} = \{5,7,8,10,12,15\}$
	$S_{90} = \{5,7,8,11,14,15\}$	$S_{91} = \{5,7,10,11,12,14\}$
	$S_{92} = \{8,10,11,12,14,15\}$	
Tujuh elemen:	$S_{93} = \{2,3,4,6,9,13,16\},$	$S_{94} = \{2,3,5,6,7,9,16\},$
	$S_{95} = \{2,3,6,8,9,15,16\},$	$S_{96} = \{2,3,6,9,10,12,16\},$
	$S_{97} = \{2,3,6,9,11,14,16\},$	$S_{98} = \{2,4,5,7,9,13,16\},$
	$S_{99} = \{2,4,8,9,13,15,16\},$	$S_{100} = \{2,4,9,10,12,13,16\},$
	$S_{101} = \{2,4,9,11,13,14,16\},$	$S_{102} = \{2,5,7,8,9,15,16\},$
	$S_{103} = \{2,5,7,9,10,12,16\},$	$S_{104} = \{2,5,7,9,11,14,16\},$
	$S_{105} = \{2,8,9,11,14,15,16\},$	$S_{106} = \{2,8,9,11,14,15,16\},$
	$S_{107} = \{2,9,10,11,12,14,16\},$	$S_{108} = \{3,4,5,6,7,13,16\},$
	$S_{109} = \{3,4,6,8,13,15,16\},$	$S_{110} = \{3,4,6,10,12,13,16\},$
	$S_{111} = \{3,4,6,11,13,14,16\},$	$S_{112} = \{3,5,6,7,8,15,16\},$
	$S_{113} = \{3,5,6,7,10,12,16\},$	$S_{114} = \{3,5,6,7,11,14,16\},$

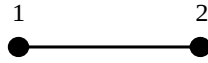
	$S_{115} = \{3,6,8,11,14,15,16\},$	$S_{116} = \{3,6,8,10,12,15,16\},$
	$S_{117} = \{3,6,10,11,12,14,16\},$	$S_{118} = \{4,5,7,8,13,15,16\},$
	$S_{119} = \{4,5,7,10,12,13,16\},$	$S_{120} = \{4,5,7,11,13,14,16\},$
	$S_{121} = \{4,8,10,12,13,15,16\},$	$S_{122} = \{4,8,11,13,14,15,16\},$
	$S_{123} = \{4,10,11,12,13,14,16\}$	$S_{124} = \{5,7,8,10,12,15,16\}$
	$S_{125} = \{5,7,8,11,14,15,16\}$	$S_{126} = \{5,7,10,11,12,14,16\}$
	$S_{127} = \{8,10,11,12,14,15,16\}$	
Delapan elemen:	$S_{128} = \{2,3,4,5,6,7,9,13\},$	$S_{129} = \{2,3,4,6,8,9,13,15\},$
	$S_{130} = \{2,3,4,6,9,10,12,13\},$	$S_{131} = \{2,3,4,6,9,11,13,14\},$
	$S_{132} = \{2,3,5,6,7,8,9,15\},$	$S_{133} = \{2,3,5,6,7,9,10,12\},$
	$S_{134} = \{2,3,5,6,7,9,11,14\},$	$S_{135} = \{2,3,6,8,9,10,12,15\},$
	$S_{136} = \{2,3,6,8,9,11,14,15\},$	$S_{137} = \{2,3,6,9,10,11,12,14\},$
	$S_{138} = \{2,4,5,7,8,9,13,15\},$	$S_{139} = \{2,4,5,7,9,10,12,13\},$
	$S_{140} = \{2,4,5,7,9,11,13,14\},$	$S_{141} = \{2,4,8,9,10,12,13,15\},$
	$S_{142} = \{2,4,8,9,11,13,14,15\},$	$S_{143} = \{2,4,9,10,11,12,13,14\},$
	$S_{144} = \{2,5,7,8,9,10,12,15\},$	$S_{145} = \{2,5,7,8,9,11,14,15\},$
	$S_{146} = \{2,5,7,9,10,11,12,14\},$	$S_{147} = \{2,8,9,10,11,12,14,15\},$
	$S_{148} = \{3,4,5,6,7,8,13,15\},$	$S_{149} = \{3,4,5,6,7,10,12,13\},$
	$S_{150} = \{3,4,5,6,7,11,13,14\},$	$S_{151} = \{3,4,6,8,10,12,13,15\},$
	$S_{152} = \{3,4,6,8,10,12,13,15\},$	$S_{153} = \{3,4,6,10,11,12,13,14\}$
	$S_{154} = \{3,5,6,7,8,10,12,15\},$	$S_{155} = \{3,5,6,7,8,11,14,15\},$
	$S_{156} = \{3,5,6,7,10,11,12,14\},$	$S_{157} = \{3,6,8,10,11,12,14,15\},$
	$S_{158} = \{4,5,7,8,10,12,13,15\}$	$S_{159} = \{4,5,7,8,11,13,14,15\}$
	$S_{160} = \{4,5,7,10,11,12,13,14\}$	$S_{161} = \{4,8,10,11,12,13,14,15\}$
	$S_{162} = \{5,7,8,10,11,12,14,15\}$	
Sembilan elemen:	$S_{163} = \{2,3,4,5,6,7,9,13,16\},$	$S_{164} = \{2,3,4,6,8,9,13,15,16\},$
	$S_{165} = \{2,3,4,6,9,10,12,13,16\},$	$S_{166} = \{2,3,4,6,9,11,13,14,16\},$
	$S_{167} = \{2,3,5,6,7,8,9,15,16\},$	$S_{168} = \{2,3,5,6,7,9,10,12,16\},$
	$S_{169} = \{2,3,5,6,7,9,11,14,16\},$	$S_{170} = \{2,3,6,8,9,10,12,15,16\},$
	$S_{171} = \{2,3,6,8,9,11,14,15,16\},$	$S_{172} = \{2,3,6,9,10,11,12,14,16\},$
	$S_{173} = \{2,4,5,7,8,9,13,15,16\},$	$S_{174} = \{2,4,5,7,9,10,12,13,16\},$
	$S_{175} = \{2,4,5,7,9,11,13,14,16\},$	$S_{176} = \{2,4,8,9,10,12,13,15,16\},$

	$S_{177} = \{2,4,8,9,11,13,14,15,16\},$	$S_{178} = \{2,4,9,10,11,12,13,14,16\},$
	$S_{179} = \{2,5,7,8,9,10,12,15,16\},$	$S_{180} = \{2,5,7,8,9,11,14,15,16\},$
	$S_{181} = \{2,5,7,9,10,11,12,14,16\},$	$S_{182} = \{2,8,9,10,11,12,14,15,16\},$
	$S_{183} = \{3,4,5,6,7,8,13,15,16\},$	$S_{184} = \{3,4,5,6,7,10,12,13,16\},$
	$S_{185} = \{3,4,5,6,7,11,13,14,16\},$	$S_{186} = \{3,4,6,8,10,12,13,15,16\},$
	$S_{187} = \{3,4,6,8,10,12,13,15,16\},$	$S_{188} = \{3,4,6,10,11,12,13,14,16\}$
	$S_{189} = \{3,5,6,7,8,10,12,15,16\},$	$S_{190} = \{3,5,6,7,8,11,14,15,16\},$
	$S_{191} = \{3,5,6,7,10,11,12,14,16\},$	$S_{192} = \{3,6,8,10,11,12,14,15,16\},$
	$S_{193} = \{4,5,7,8,10,12,13,15,16\}$	$S_{194} = \{4,5,7,8,11,13,14,15,16\}$
	$S_{195} = \{4,5,7,10,11,12,13,14,16\}$	$S_{196} = \{4,8,10,11,12,13,14,15,16\}$
	$S_{197} = \{5,7,8,10,11,12,14,15,16\}$	
Sepuluh elemen:	$S_{198} = \{2,3,4,5,6,7,8,9,13,15\},$	$S_{199} = \{2,3,4,5,6,7,9,10,12,13\},$
	$S_{200} = \{2,3,4,5,6,7,9,10,12,13\},$	$S_{201} = \{2,3,4,6,8,9,10,12,13,15\},$
	$S_{202} = \{2,3,4,6,8,9,11,13,14,15\},$	$S_{203} = \{2,3,4,6,9,10,11,12,13,14\},$
	$S_{204} = \{2,3,5,6,7,9,10,11,12,14\},$	$S_{205} = \{2,3,5,6,7,8,9,11,14,15\},$
	$S_{206} = \{2,3,5,6,7,8,9,10,12,15\},$	$S_{207} = \{2,3,6,8,9,10,11,12,14,15\},$
	$S_{208} = \{2,4,5,7,8,9,10,12,13,15\},$	$S_{209} = \{2,4,5,7,8,9,11,13,14,15\},$
	$S_{210} = \{2,4,5,7,9,10,11,12,13,14\},$	$S_{211} = \{2,4,8,9,10,11,12,13,14,15\},$
	$S_{212} = \{2,5,7,8,9,10,11,12,14,15\},$	$S_{213} = \{3,4,5,6,7,8,10,12,13,15\},$
	$S_{214} = \{3,4,5,6,7,8,11,13,14,15\},$	$S_{215} = \{3,4,5,6,7,10,11,12,13,14\},$
	S_{216}	$S_{217} = \{3,5,6,7,8,10,11,12,14,15\},$
	$= \{3,4,6,8,10,11,12,13,,14,15\},$	
	$S_{218} = \{4,5,7,8,10,11,12,13,14,15\},$	
Sebelas elemen:	$S_{219} = \{2,3,4,5,6,7,8,9,13,15,16\},$	$S_{220} = \{2,3,4,5,6,7,9,10,12,13,16\},$
	S_{221}	S_{222}
	$= \{2,3,4,5,6,7,9,10,12,13,16\},$	$= \{2,3,4,6,8,9,10,12,13,15,16\},$
	S_{223}	S_{224}
	$= \{2,3,4,6,8,9,11,13,14,15,16\},$	$= \{2,3,4,6,9,10,11,12,13,14,16\},$
	S_{225}	$S_{226} = \{2,3,5,6,7,8,9,11,14,15,16\},$
	$= \{2,3,5,6,7,9,10,11,12,14,16\},$	
	$S_{227} = \{2,3,5,6,7,8,9,10,12,15,16\},$	S_{228}
		$= \{2,3,6,8,9,10,11,12,14,15,16\},$

	S_{229} $= \{2,4,5,7,8,9,10,12,13,15,16\},$ S_{231} $= \{2,4,5,7,9,10,11,12,13,14,16\},$ S_{233} $= \{2,5,7,8,9,10,11,12,14,15,16\},$ S_{235} $= \{3,4,5,6,7,8,11,13,14,15,16\},$ S_{237} $= \{3,4,6,8,10,11,12,13,,14,15,16\},$ $S_{239} = \{4,5,7,8,10,11,12,13,14,15,16\},$	S_{230} $= \{2,4,5,7,8,9,11,13,14,15,16\},$ S_{232} $= \{2,4,8,9,10,11,12,13,14,15,16\},$ $S_{234} = \{3,4,5,6,7,8,10,12,13,15\},$ $S_{236} = \{3,4,5,6,7,10,11,12,13,14\},$ S_{238} $= \{3,5,6,7,8,10,11,12,14,15,16\},$
Dua belas elemen:	S_{240} $= \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,12,13,15\},$ S_{242} $= \{2,3,4,5,6,7,9,10,11,12,13,14\},$ S_{244} $= \{2,3,5,6,7,8,9,10,11,12,14,15\},$ $S_{246} = \{3,4,5,6,7,,8,10,11,12,13,,14,15\},$	S_{241} $= \{2,3,4,5,6,7,8,9,11,13,14,15\},$ S_{243} $= \{2,3,4,6,8,9,10,11,12,13,14,15\},$ S_{245} $= \{2,4,5,7,8,9,10,11,12,13,14,15\},$
Tiga belas elemen:	S_{247} $= \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,12,13,15,16\},$ S_{249} $= \{2,3,4,5,6,7,9,10,11,12,13,14,16\},$ S_{251} $= \{2,3,5,6,7,8,9,10,11,12,14,15,16\},$ $S_{253} = \{3,4,5,6,7,8,10,11,12,13,,14,15,16\},$	S_{248} $= \{2,3,4,5,6,7,8,9,11,13,14,15,16\},$ S_{250} $= \{2,3,4,6,8,9,10,11,12,13,14,15,16\}$ S_{251} $= \{2,4,5,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16\}$
Empat belas elemen:	$S_{254} = \{2,3,4,5,6,7,,8,9,10,11,12,13,,14,15\},$	
Lima belas elemen:	$S_{255} = \{2,3,4,5,6,7,,8,9,10,11,12,13,,14,15,16\},$	

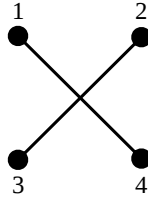
Berikut diberikan gambar graf Cayley dari subhimpunan dalam grup $(\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \bullet_n)$, n prima, $2 < n < 19$, yang mana untuk setiap subhimpunan digambarkan satu graf Cayley untuk masing-masing jumlah elemen yang berbeda.

1. Grup $(\mathbb{Z}_3 \setminus \{0\}, \bullet_n), S_1 = \{2\}$



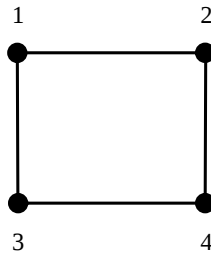
Gambar 5.13. $CAY(\mathbb{Z}_3 \setminus \{0\}, S_1)$

2. Grup $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}, \bullet_5), S_1 = \{4\}$



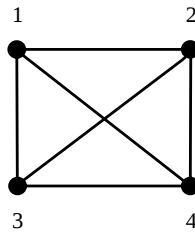
Gambar 5.14. $CAY(\mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}, S_1)$

3. Grup $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}, \bullet_5), S_2 = \{2, 3\}$



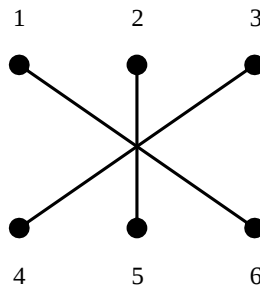
Gambar 5.15. $CAY(\mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}, S_2)$

4. Grup $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}, \bullet_5), S_3 = \{2, 3, 4\}$



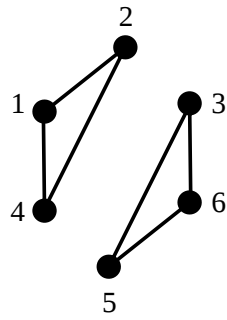
Gambar 5.16. $CAY(\mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}, S_3)$

5. Grup $(\mathbb{Z}_7 \setminus \{0\}, \bullet_7), S_1 = \{6\}$



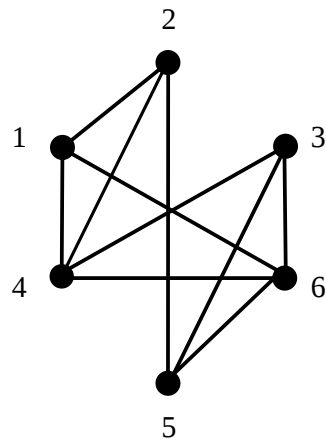
Gambar 5.17. $CAY(\mathbb{Z}_7 \setminus \{0\}, S_1)$

6. Grup $(\mathbb{Z}_7 \setminus \{0\}, \bullet_7)$, $S_2 = \{2, 4\}$



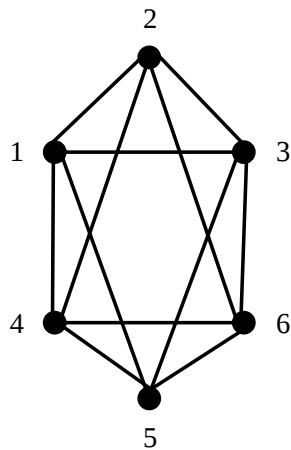
Gambar 5.18. $CAY(\mathbb{Z}_7 \setminus \{0\}, S_2)$

7. Grup $(\mathbb{Z}_7 \setminus \{0\}, \bullet_7)$, $S_4 = \{2, 4, 6\}$



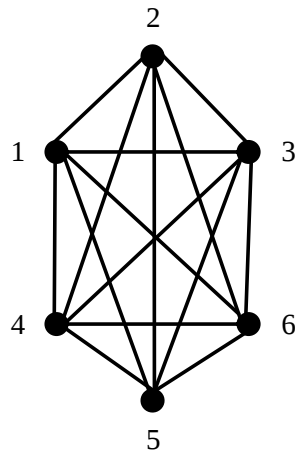
Gambar 5.19. $CAY(\mathbb{Z}_7 \setminus \{0\}, S_4)$

8. Grup $(\mathbb{Z}_7 \setminus \{0\}, \bullet_7)$, $S_6 = \{2, 3, 4, 5\}$



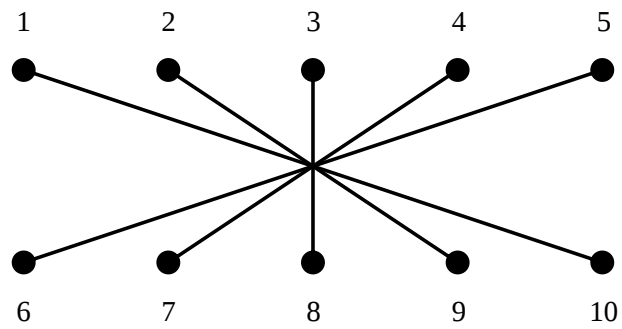
Gambar 5.20. $CAY(\mathbb{Z}_7 \setminus \{0\}, S_6)$

9. Grup $(\mathbb{Z}_7 \setminus \{0\}, \bullet_7)$, $S_7 = \{2, 3, 4, 5, 6\}$



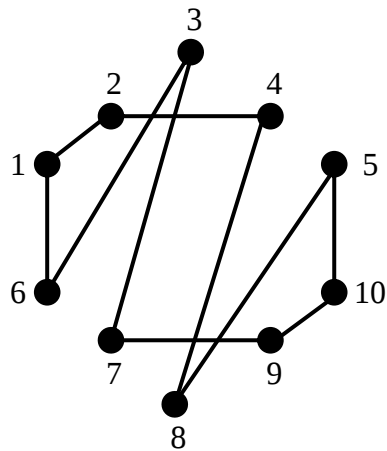
Gambar 5.21. $CAY(\mathbb{Z}_7 \setminus \{0\}, S_7)$

10. Grup $(\mathbb{Z}_{11} \setminus \{0\}, \bullet_{11})$, $S_1 = \{10\}$



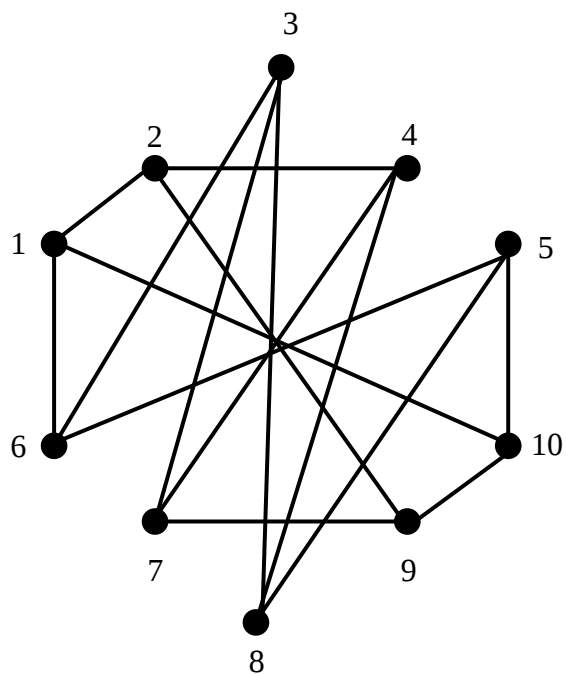
Gambar 5.22. $CAY(\mathbb{Z}_{11} \setminus \{0\}, S_1)$

11. Grup $(\mathbb{Z}_{11} \setminus \{0\}, \bullet_{11})$, $S_2 = \{2, 6\}$



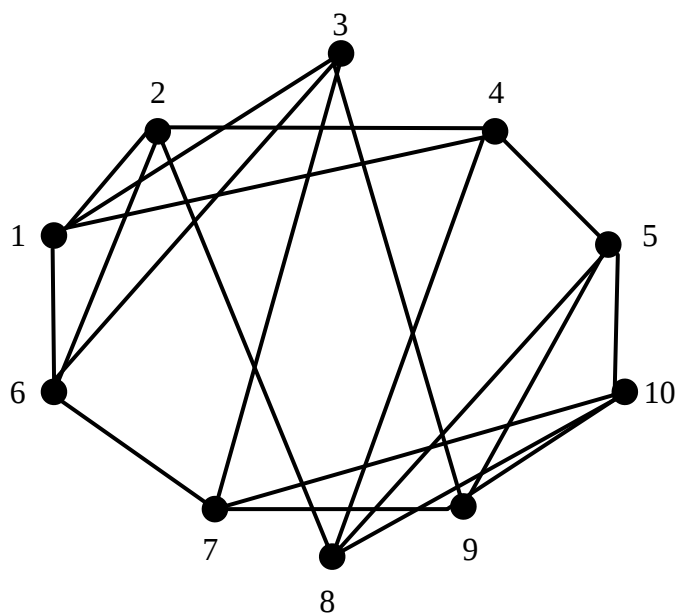
Gambar 5.23. $CAY(\mathbb{Z}_{11} \setminus \{0\}, S_2)$

12. Grup $(\mathbb{Z}_{11} \setminus \{0\}, \bullet_{11})$, $S_6 = \{2, 6, 10\}$



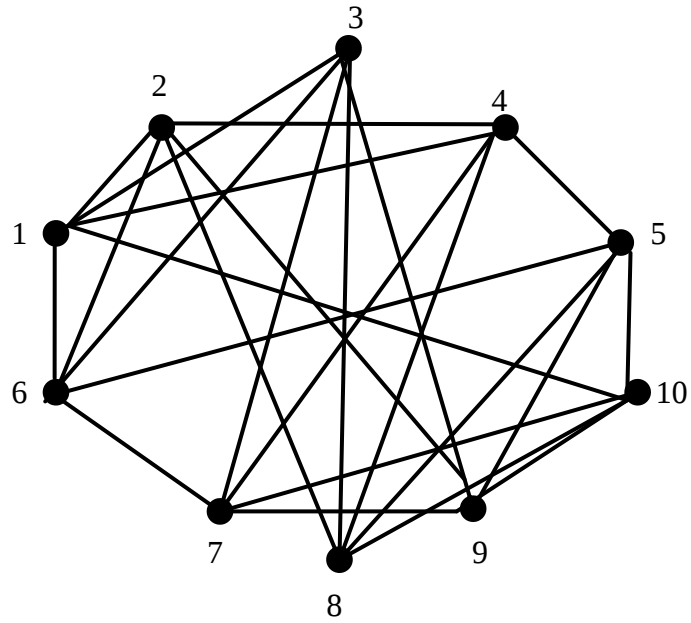
Gambar 5.24. $CAY(\mathbb{Z}_{11} \setminus \{0\}, S_6)$

13. Grup $(\mathbb{Z}_{11} \setminus \{0\}, \bullet_{11})$, $S_{10} = \{2, 3, 4, 6\}$



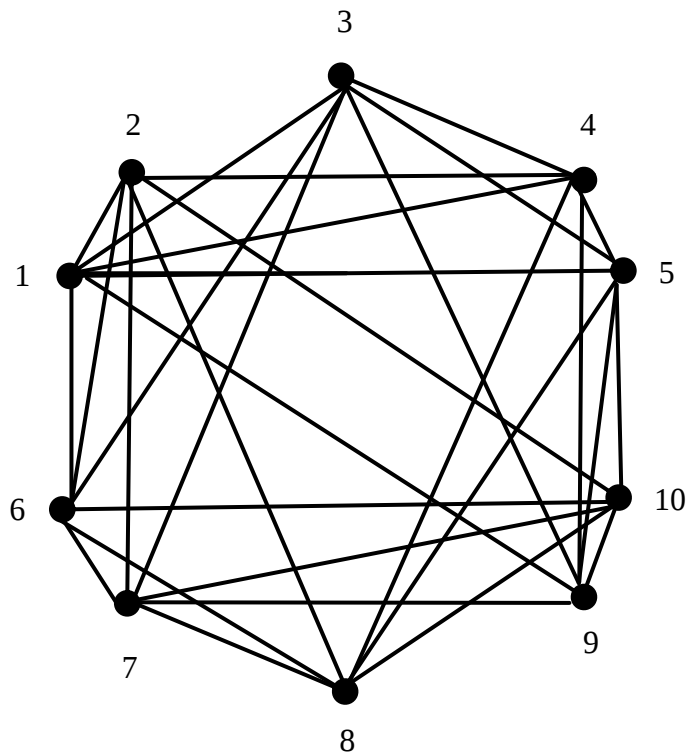
Gambar 5.25. $CAY(\mathbb{Z}_{11} \setminus \{0\}, S_{10})$

14. Grup $(\mathbb{Z}_{11} \setminus \{0\}, \bullet_{11})$, $S_{16} = \{2, 3, 4, 6, 10\}$



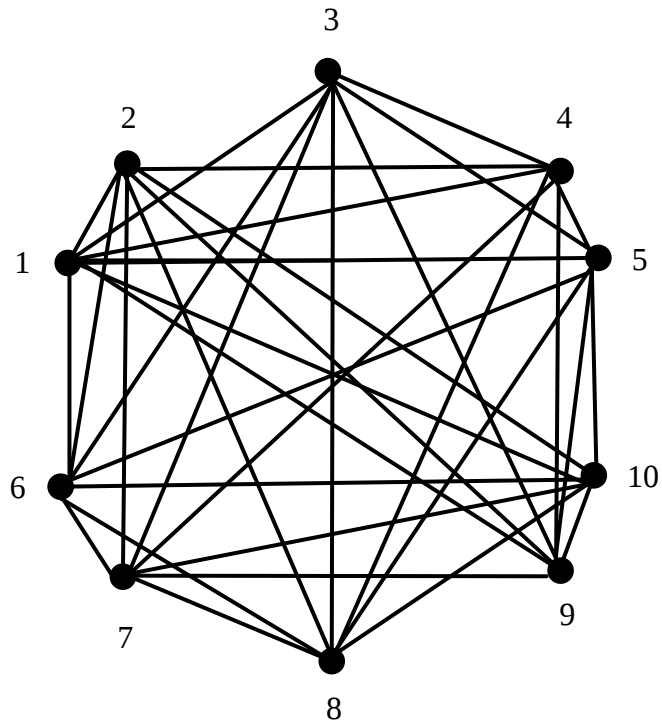
Gambar 5.26. $CAY(\mathbb{Z}_{11} \setminus \{0\}, S_{16})$

15. Grup $(\mathbb{Z}_{11} \setminus \{0\}, \bullet_{11})$, $S_{22} = \{2, 3, 4, 5, 6, 9\}$



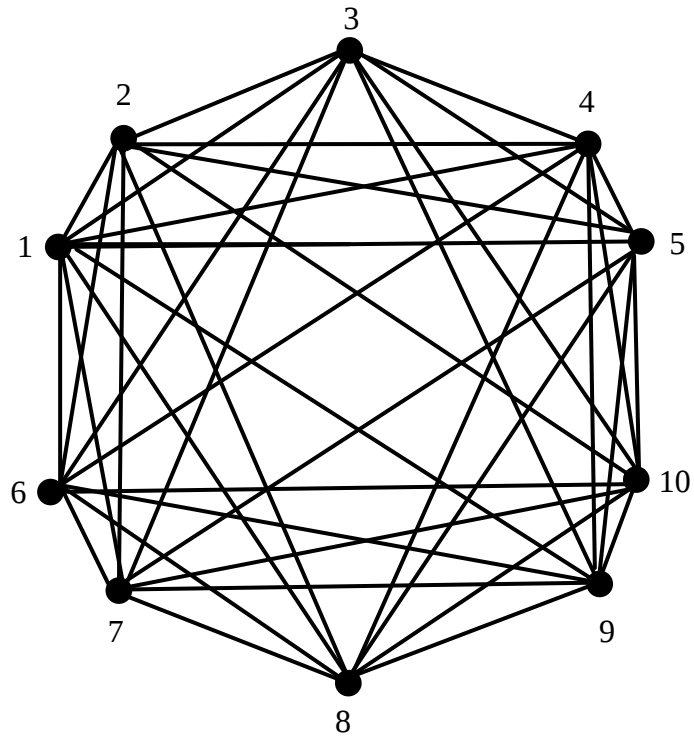
Gambar 5.27. $CAY(\mathbb{Z}_{11} \setminus \{0\}, S_{22})$

16. Grup $(\mathbb{Z}_{11} \setminus \{0\}, \bullet_{11})$, $S_{26} = \{2, 3, 4, 5, 6, 9, 10\}$



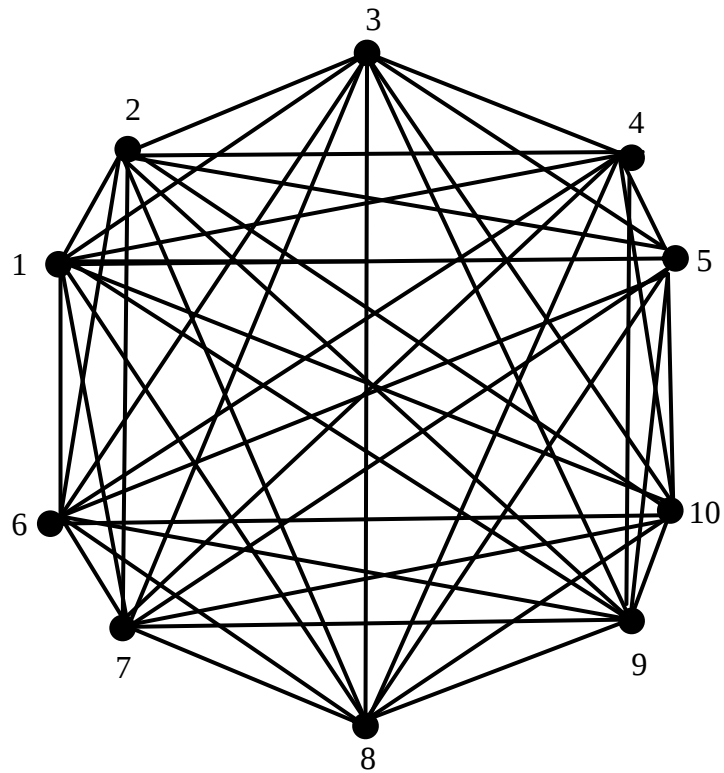
Gambar 5.28. $CAY(\mathbb{Z}_{11} \setminus \{0\}, S_{26})$

17. Grup $(\mathbb{Z}_{11} \setminus \{0\}, \bullet_{11})$, $S_{30} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$



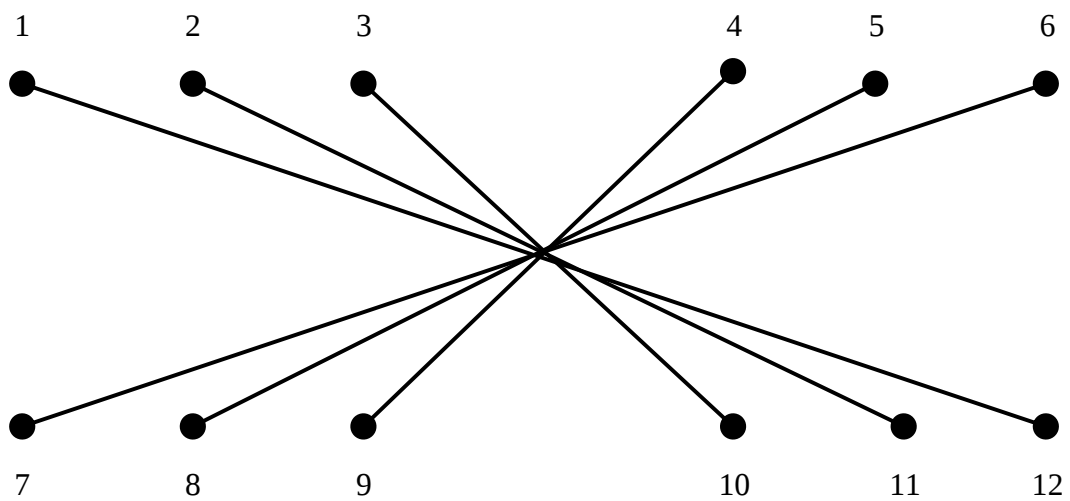
Gambar 5.29. $CAY(\mathbb{Z}_{11} \setminus \{0\}, S_{30})$

18. Grup $(\mathbb{Z}_{11} \setminus \{0\}, \bullet_{11})$, $S_{31} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$



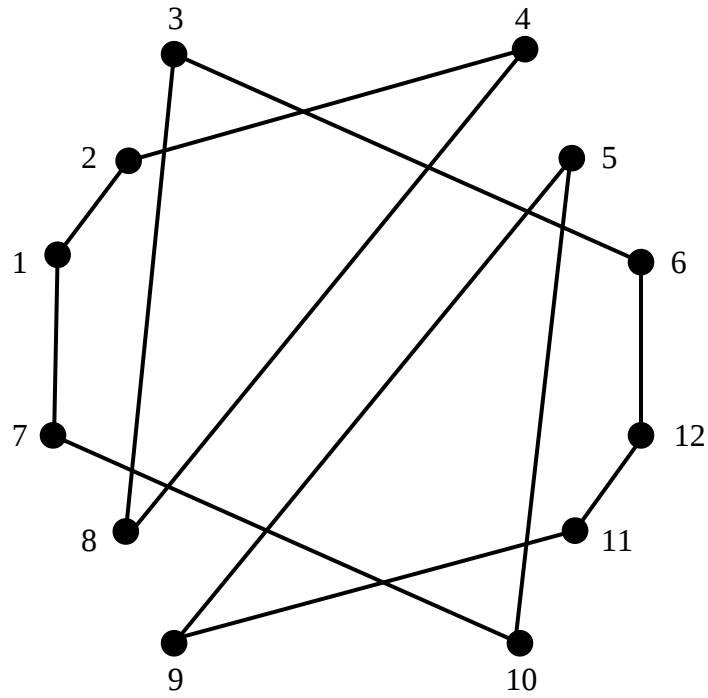
Gambar 5.30. $CAY(\mathbb{Z}_{11} \setminus \{0\}, S_{31})$

19. Grup $(\mathbb{Z}_{13} \setminus \{0\}, \bullet_{13})$, $S_1 = \{12\}$



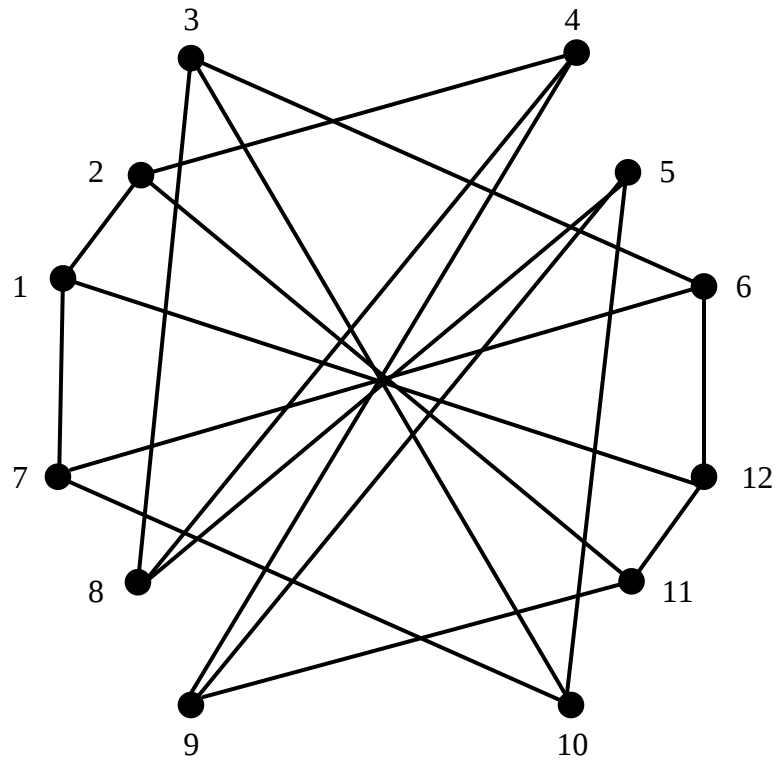
Gambar 5.31. $CAY(\mathbb{Z}_{13} \setminus \{0\}, S_1)$

20. Grup $(\mathbb{Z}_{13} \setminus \{0\}, \bullet_{13})$, $S_2 = \{2, 7\}$



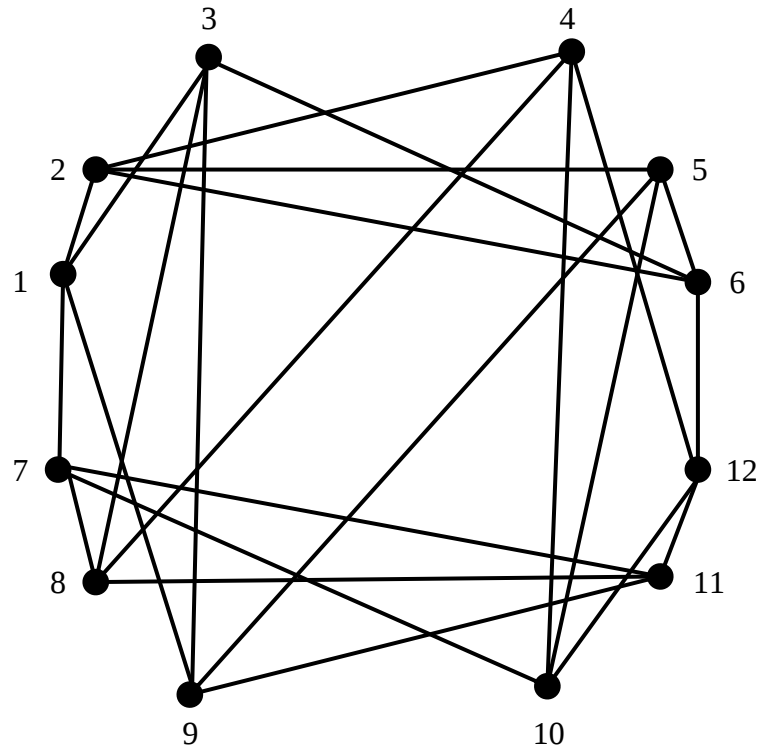
Gambar 5.32. $CAY(\mathbb{Z}_{13} \setminus \{0\}, S_2)$

21. Grup $(\mathbb{Z}_{13} \setminus \{0\}, \bullet_{13})$, $S_7 = \{2, 7, 12\}$



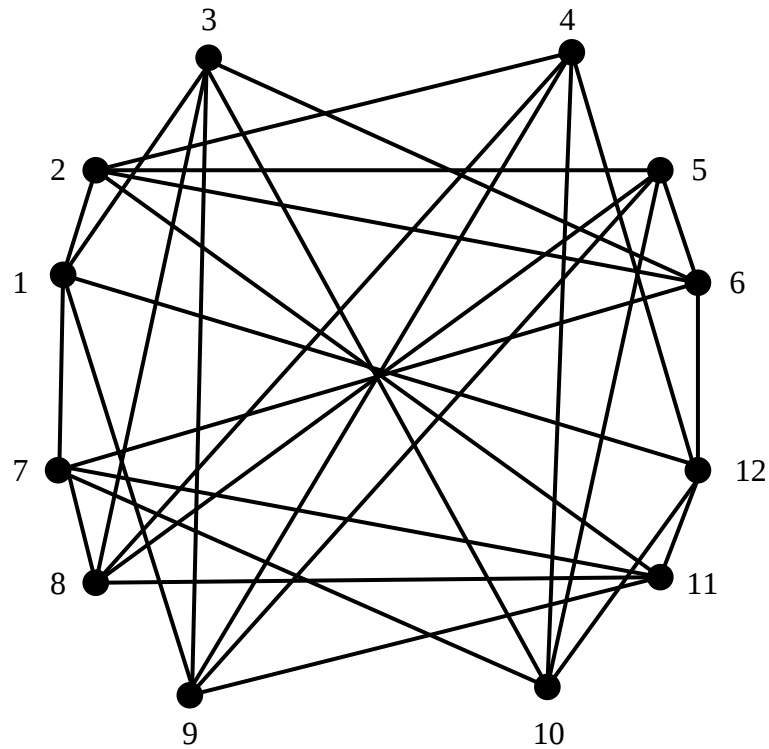
Gambar 5.33. $CAY(\mathbb{Z}_{13} \setminus \{0\}, S_7)$

22. Grup $(\mathbb{Z}_{13} \setminus \{0\}, \bullet_{13})$, $S_{12} = \{2, 3, 7, 9\}$



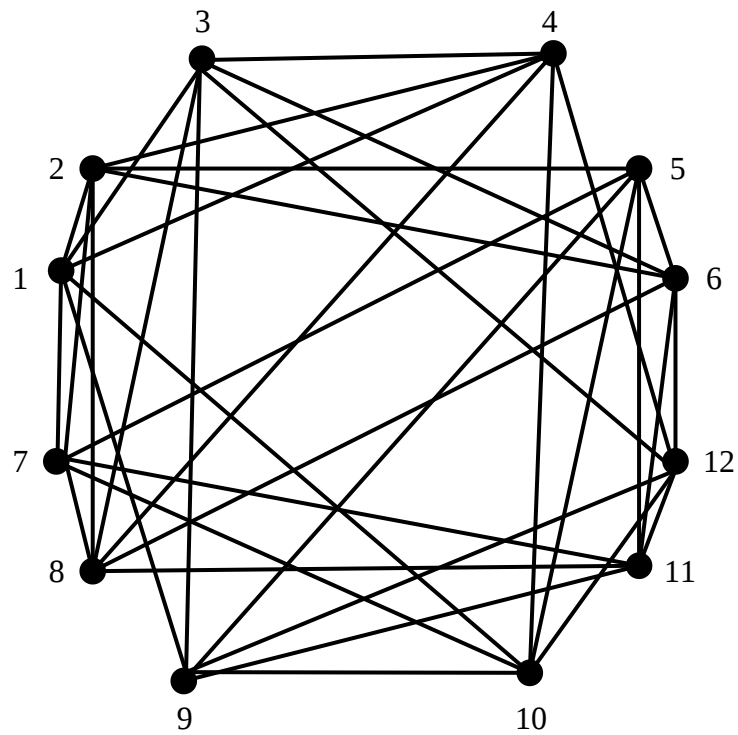
Gambar 5.34. $CAY(\mathbb{Z}_{13} \setminus \{0\}, S_{12})$

23. Grup $(\mathbb{Z}_{13} \setminus \{0\}, \bullet_{13})$, $S_{22} = \{2, 3, 7, 9, 12\}$



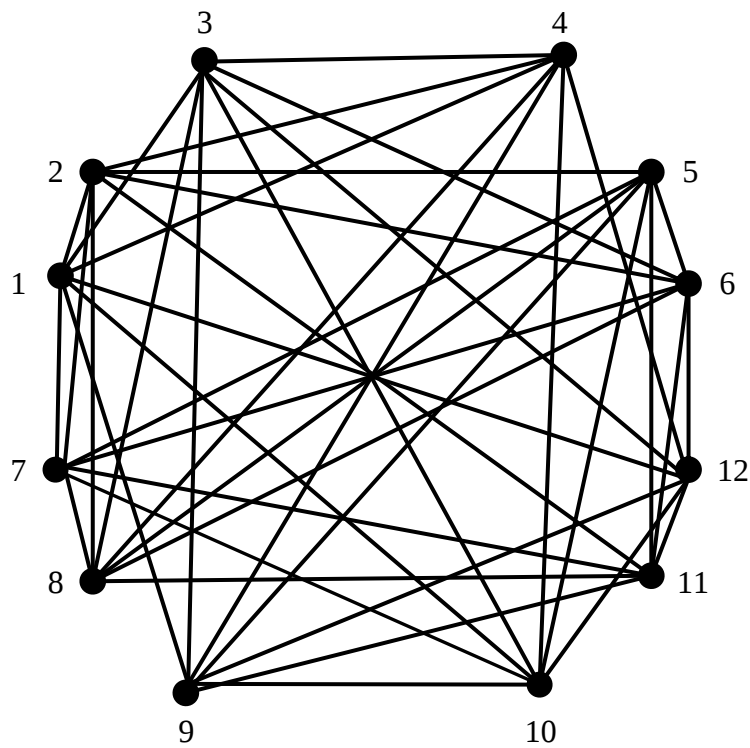
Gambar 5.35. $CAY(\mathbb{Z}_{13} \setminus \{0\}, S_{22})$

24. Grup $(\mathbb{Z}_{13} \setminus \{0\}, \bullet_{13})$, $S_{32} = \{2, 3, 4, 7, 9, 10\}$



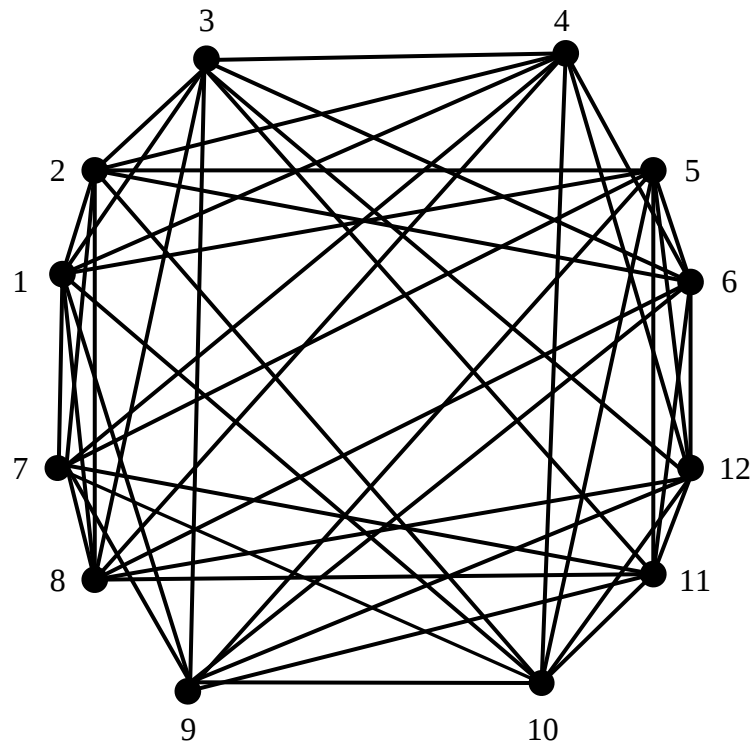
Gambar 5.36. $CAY(\mathbb{Z}_{13} \setminus \{0\}, S_{32})$

25. Grup $(\mathbb{Z}_{13} \setminus \{0\}, \bullet_{13})$, $S_{42} = \{2, 3, 4, 7, 9, 10, 12\}$



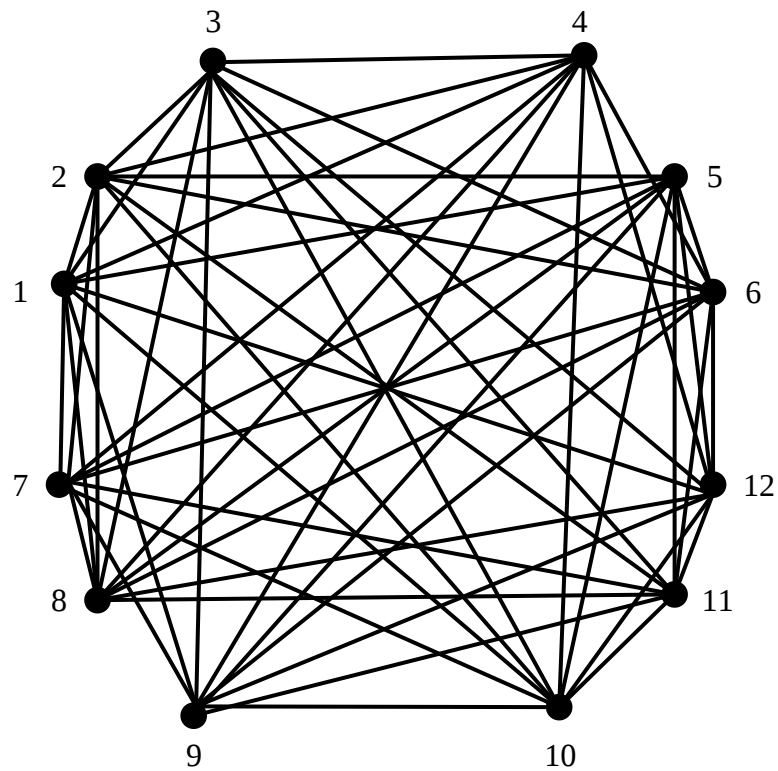
Gambar 5.37. $CAY(\mathbb{Z}_{13} \setminus \{0\}, S_{42})$

26. Grup $(\mathbb{Z}_{13} \setminus \{0\}, \bullet_{13})$, $S_{52} = \{2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10\}$



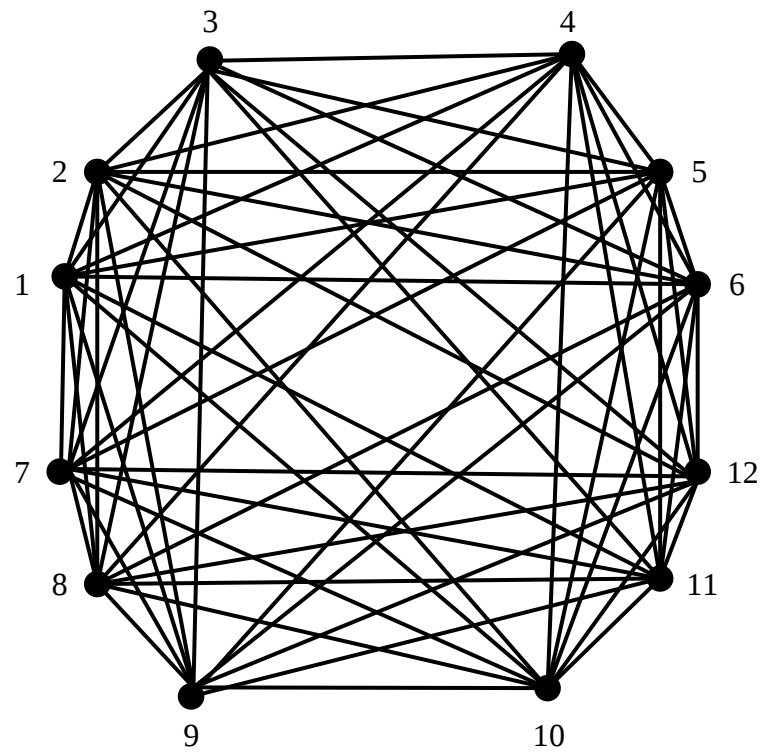
Gambar 5.38. $CAY(\mathbb{Z}_{13} \setminus \{0\}, S_{52})$

27. Grup $(\mathbb{Z}_{13} \setminus \{0\}, \bullet_{13})$, $S_{57} = \{2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 12\}$



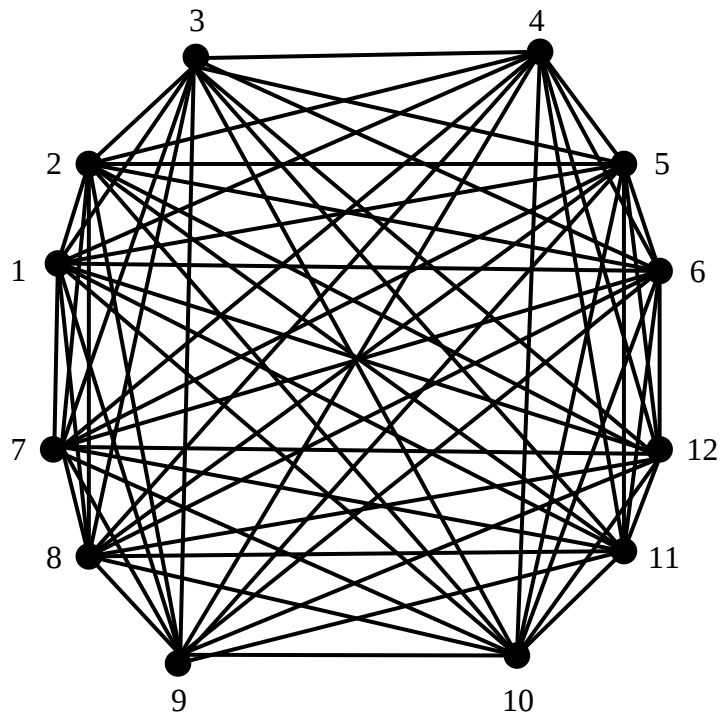
Gambar 5.39. $CAY(\mathbb{Z}_{13} \setminus \{0\}, S_{57})$

28. Grup $(\mathbb{Z}_{13} \setminus \{0\}, \bullet_{13})$, $S_{62} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$



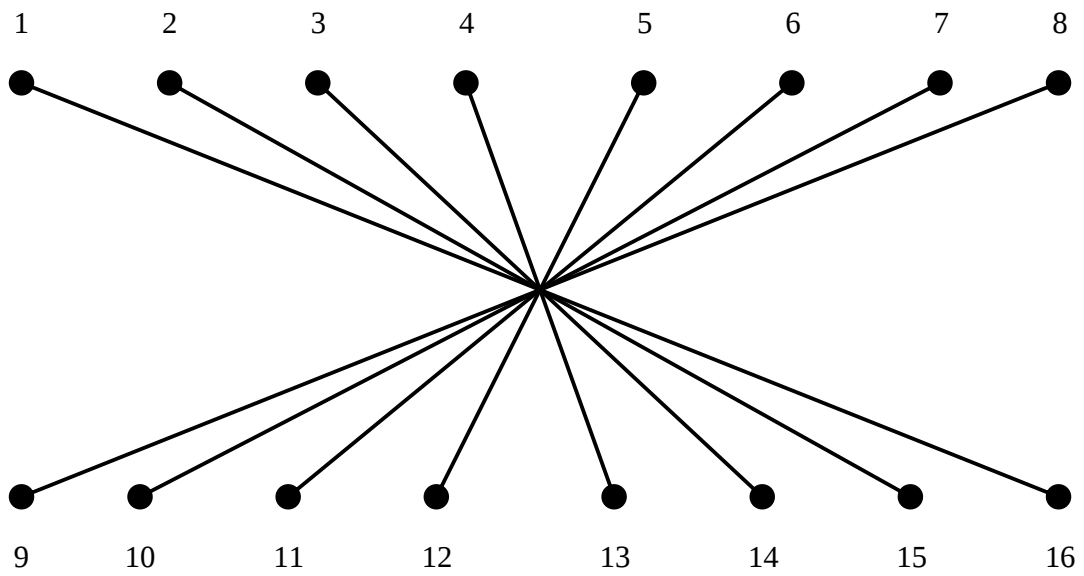
Gambar 5.40. $CAY(\mathbb{Z}_{13} \setminus \{0\}, S_{62})$

29. Grup $(\mathbb{Z}_{13} \setminus \{0\}, \bullet_{13})$, $S_{63} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$



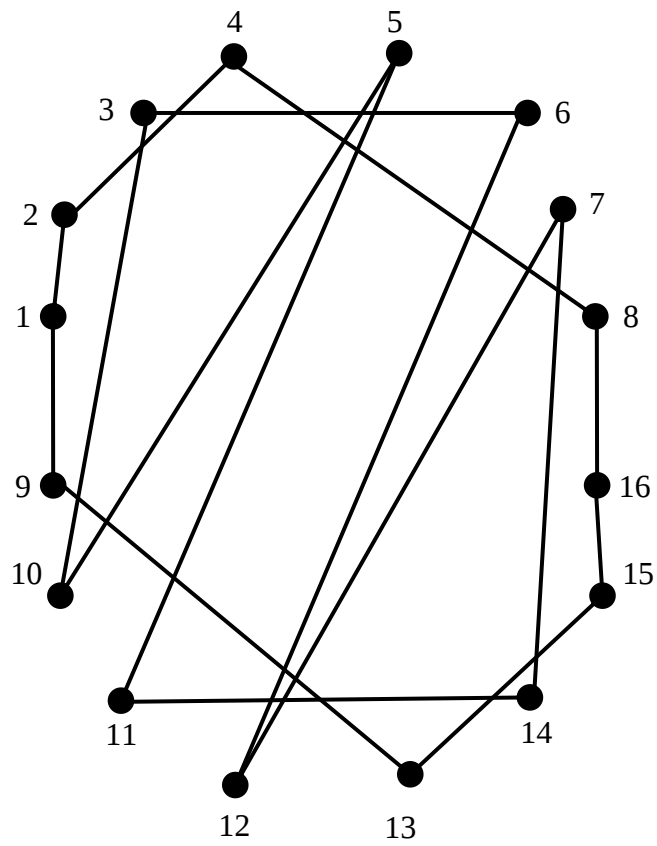
Gambar 5.41. $CAY(\mathbb{Z}_{13} \setminus \{0\}, S_{63})$

30. Grup $(\mathbb{Z}_{17} \setminus \{0\}, \bullet_{17})$, $S_1 = \{16\}$



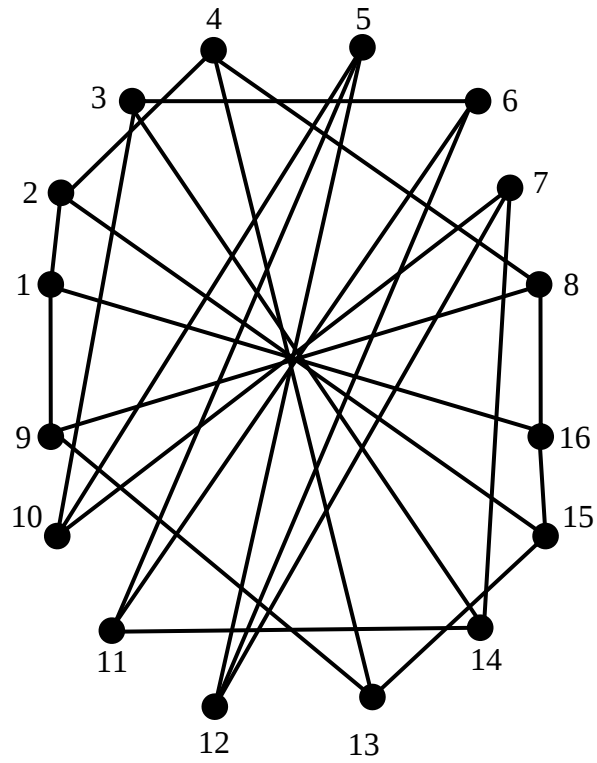
Gambar 5.42. $CAY(\mathbb{Z}_{17} \setminus \{0\}, S_1)$

31. Grup $(\mathbb{Z}_{17} \setminus \{0\}, \bullet_{17})$, $S_2 = \{2, 9\}$



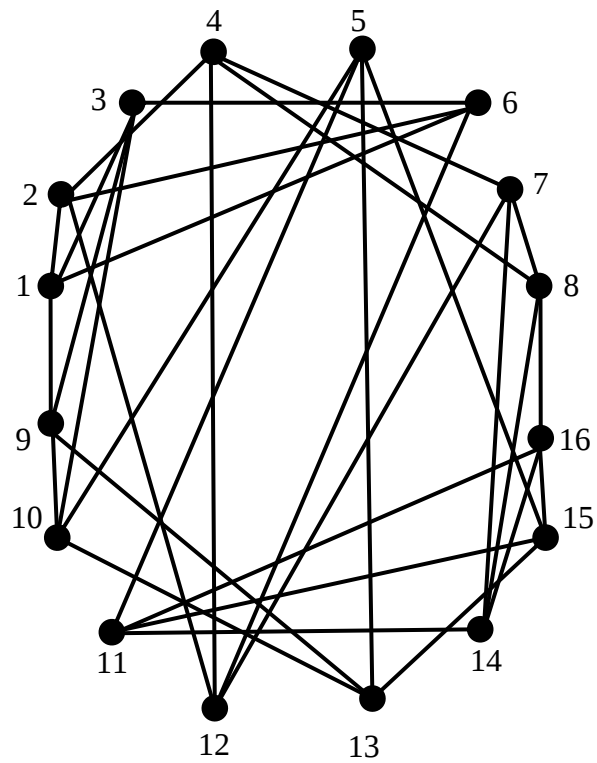
Gambar 5.43. $CAY(\mathbb{Z}_{17} \setminus \{0\}, S_2)$

32. Grup $(\mathbb{Z}_{17} \setminus \{0\}, \bullet_{17})$, $S_9 = \{2, 9, 16\}$



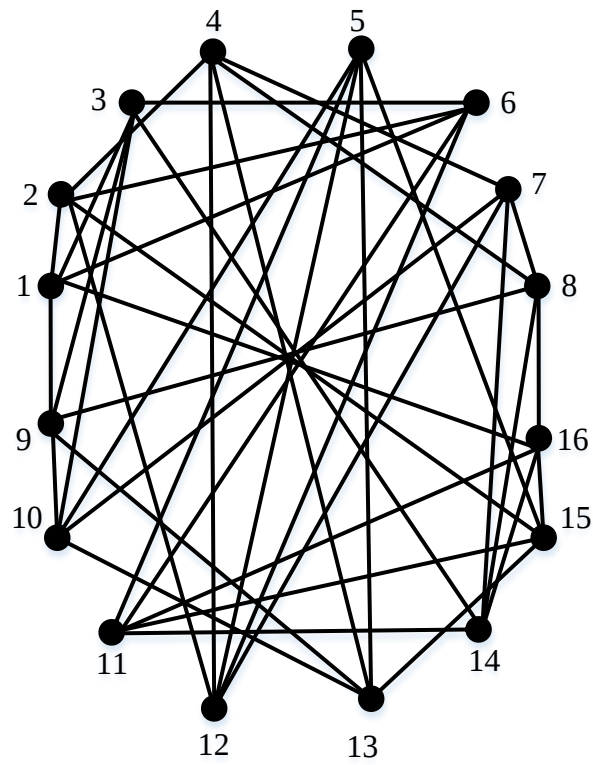
Gambar 5.44. $CAY(\mathbb{Z}_{17} \setminus \{0\}, S_9)$

33. Grup $(\mathbb{Z}_{17} \setminus \{0\}, \bullet_{17})$, $S_{16} = \{2, 3, 6, 9\}$



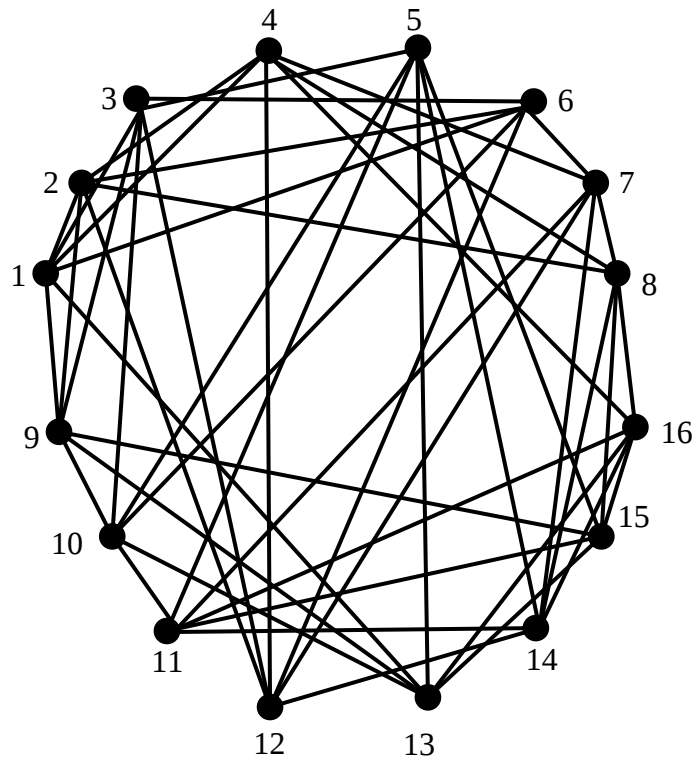
Gambar 5.45. $CAY(\mathbb{Z}_{17} \setminus \{0\}, S_{16})$

34. Grup $(\mathbb{Z}_{17} \setminus \{0\}, \bullet_{17})$, $S_{37} = \{2, 3, 6, 9, 16\}$



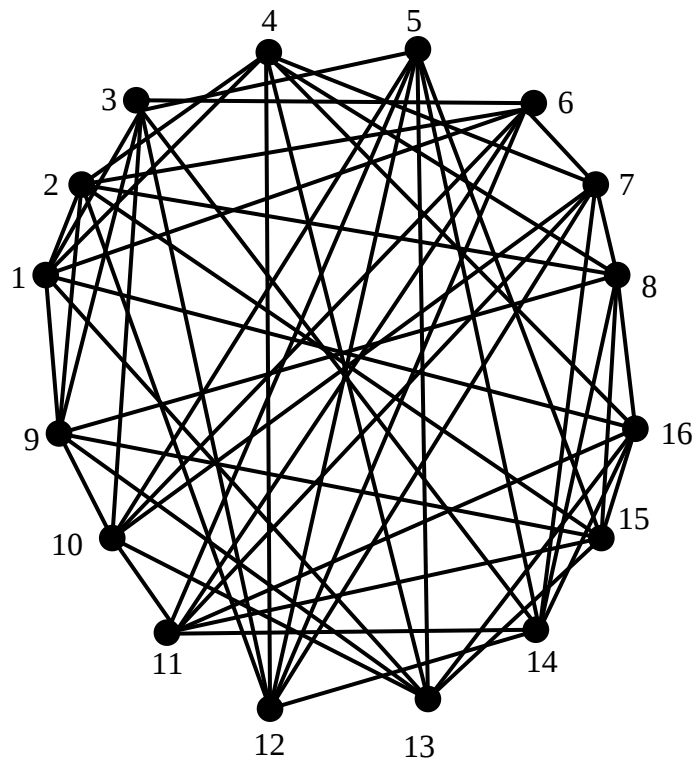
Gambar 5.46. $CAY(\mathbb{Z}_{17} \setminus \{0\}, S_{37})$

35. Grup $(\mathbb{Z}_{17} \setminus \{0\}, \bullet_{17})$, $S_{58} = \{2, 3, 4, 6, 9, 13\}$



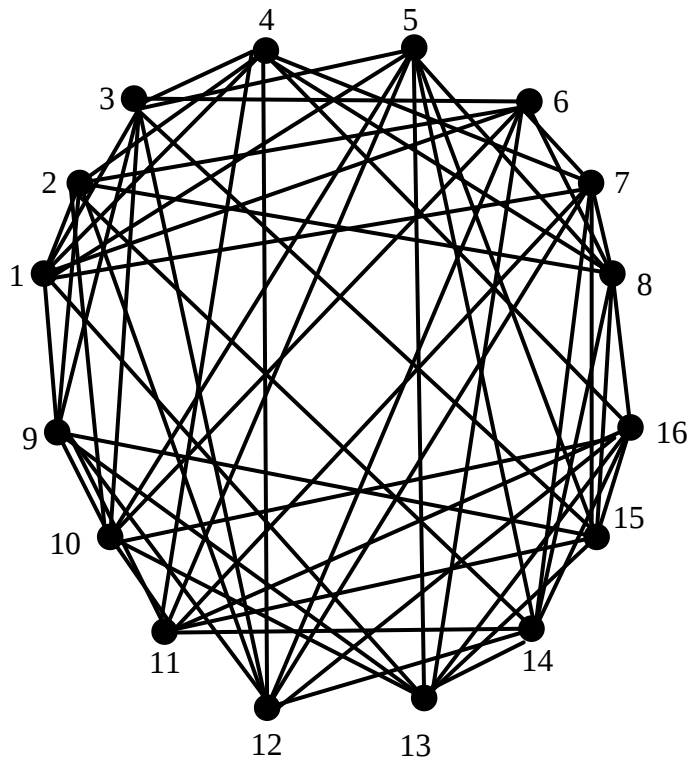
Gambar 5.47. $CAY(\mathbb{Z}_{17} \setminus \{0\}, S_{58})$

36. Grup $(\mathbb{Z}_{17} \setminus \{0\}, \bullet_{17})$, $S_{93} = \{2, 3, 4, 6, 9, 13, 16\}$



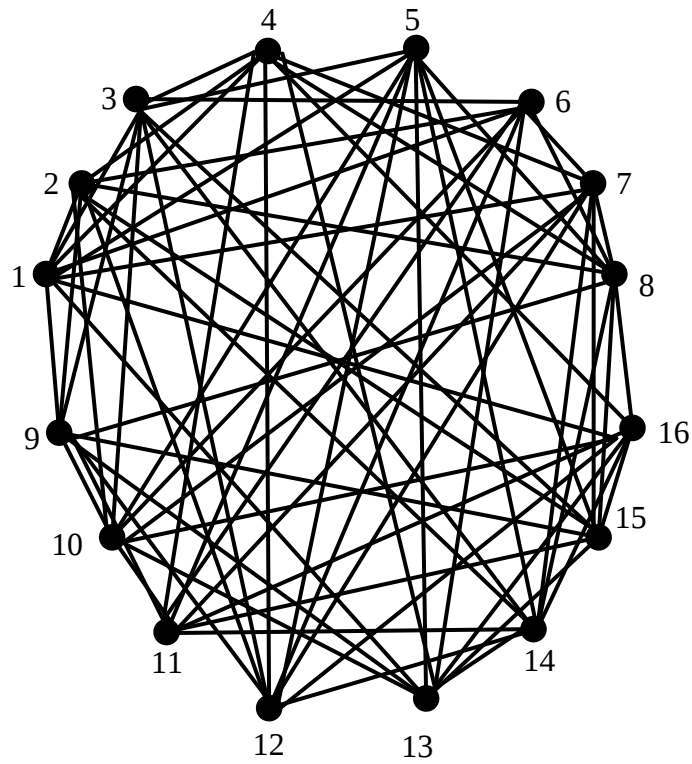
Gambar 5.48. $CAY(\mathbb{Z}_{17} \setminus \{0\}, S_{93})$

37. Grup $(\mathbb{Z}_{17} \setminus \{0\}, \bullet_{17})$, $S_{128} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 13\}$



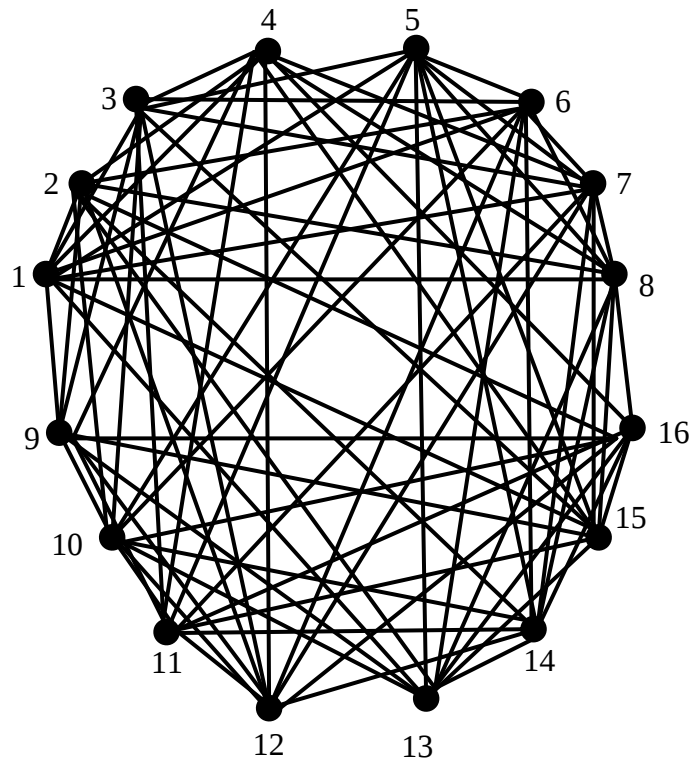
Gambar 5.49. $CAY(\mathbb{Z}_{17} \setminus \{0\}, S_{128})$

38. Grup $(\mathbb{Z}_{17} \setminus \{0\}, \bullet_{17})$, $S_{163} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 13, 16\}$



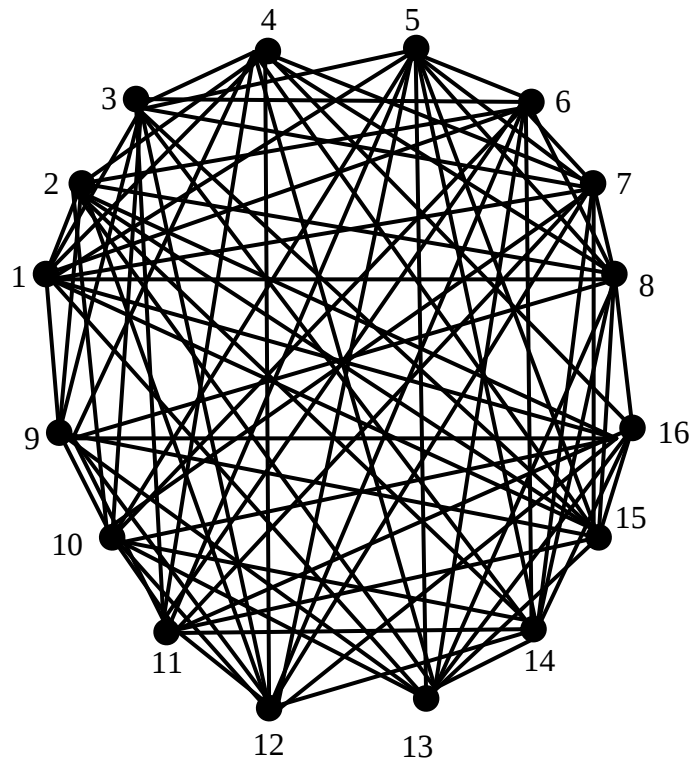
Gambar 5.50. $CAY(\mathbb{Z}_{17} \setminus \{0\}, S_{163})$

39. Grup $(\mathbb{Z}_{17} \setminus \{0\}, \bullet_{17})$, $S_{198} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 13, 15\}$



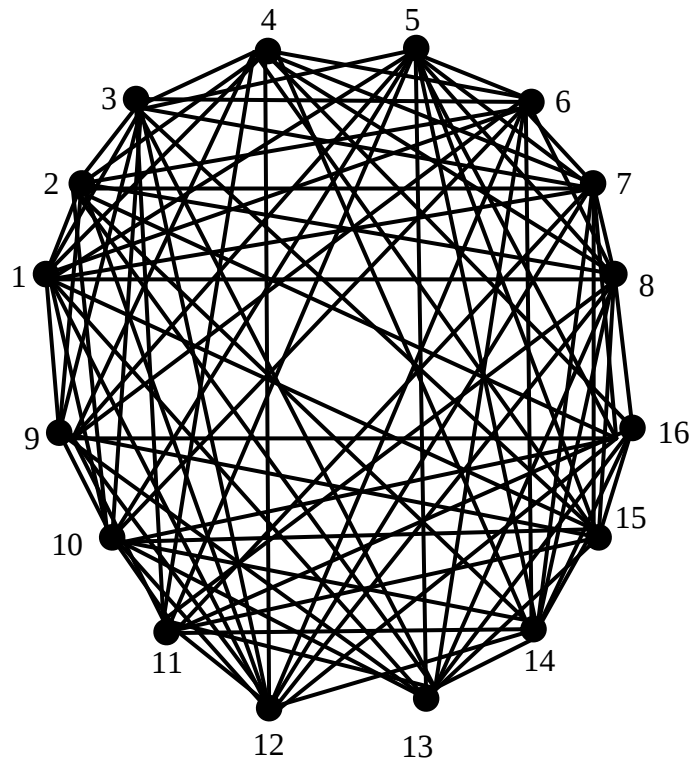
Gambar 5.51. $CAY(\mathbb{Z}_{17} \setminus \{0\}, S_{198})$

40. Grup $(\mathbb{Z}_{17} \setminus \{0\}, \bullet_{17})$, $S_{219} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 13, 15, 16\}$



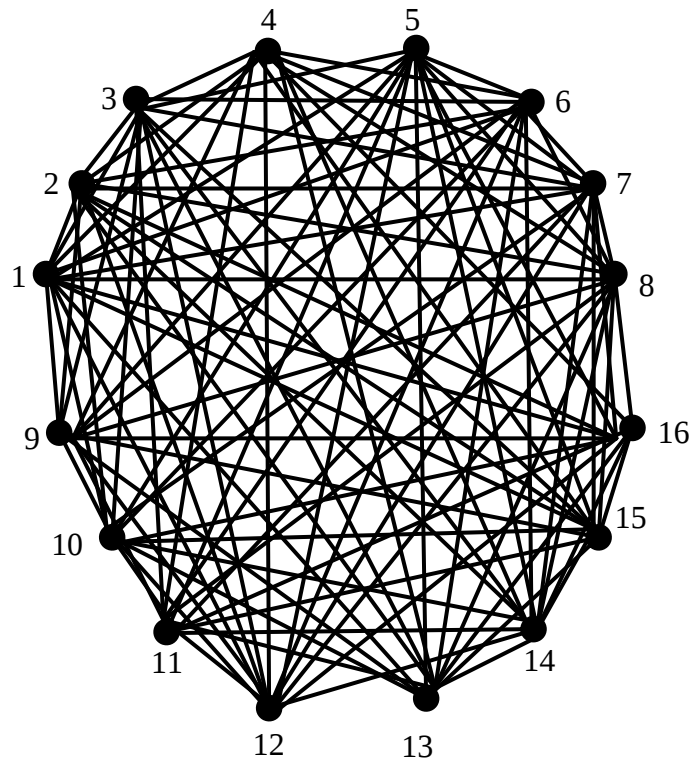
Gambar 5.52. $CAY(\mathbb{Z}_{17} \setminus \{0\}, S_{219})$

41. Grup $(\mathbb{Z}_{17} \setminus \{0\}, \bullet_{17})$, $S_{240} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 15\}$



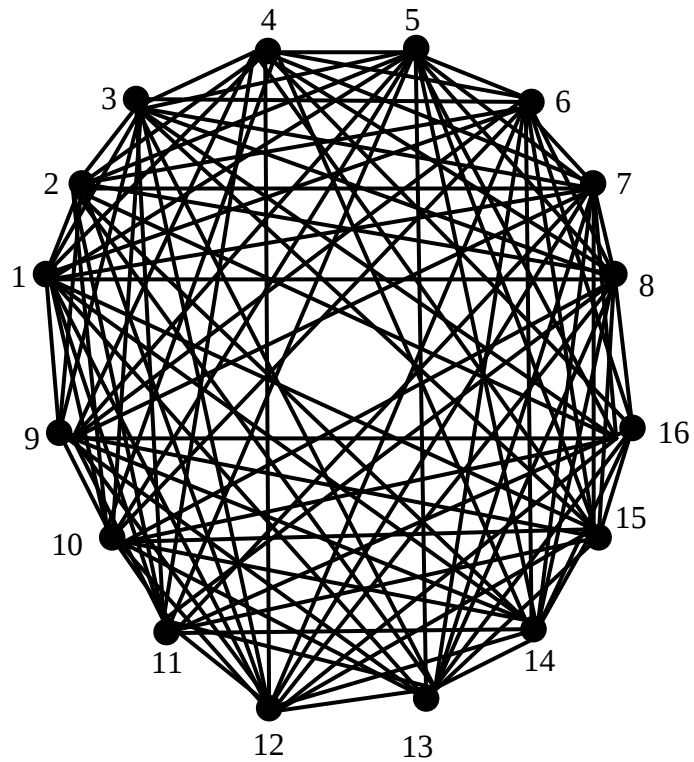
Gambar 5.53. $CAY(\mathbb{Z}_{17} \setminus \{0\}, S_{240})$

42. Grup $(\mathbb{Z}_{17} \setminus \{0\}, \bullet_{17})$, $S_{247} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 15, 16\}$



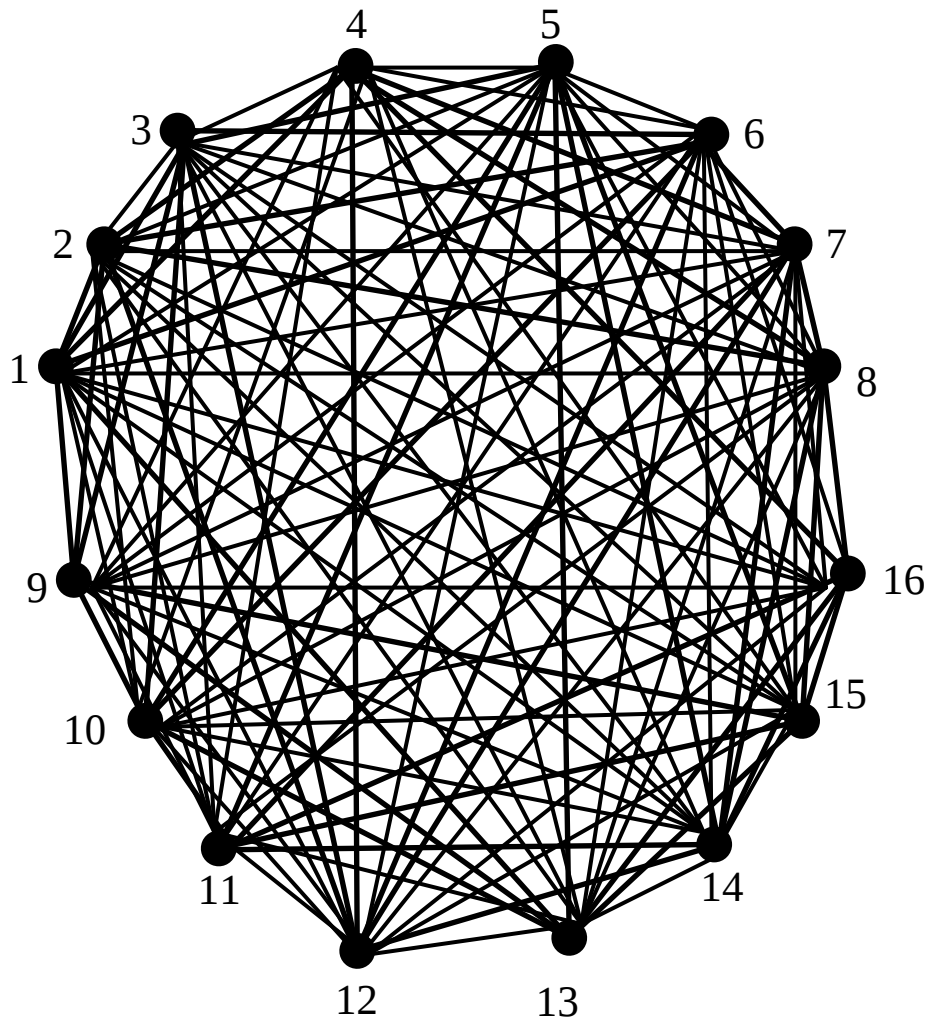
Gambar 5.54. $CAY(\mathbb{Z}_{17} \setminus \{0\}, S_{247})$

43. Grup $(\mathbb{Z}_{17} \setminus \{0\}, \bullet_{17})$, $S_{254} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$



Gambar 5.55. $CAY(\mathbb{Z}_{17} \setminus \{0\}, S_{254})$

44. Grup $(\mathbb{Z}_{17} \setminus \{0\}, \bullet_{17})$, $S_{255} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}$



Gambar 5.56. $CAY(\mathbb{Z}_{17} \setminus \{0\}, S_{255})$

5.4. Penentuan Banyaknya Graf Cayley yang Terbentuk dari Subgrup-Subgrup dalam Grup $(\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \bullet_n)$, n Prima

Berdasarkan hasil yang diperoleh pada Sub bab 5.3, dapat disimpulkan mengenai banyaknya Graf Cayley yang terbentuk dari subgrup-subgrup dalam Grup $(\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \bullet_n)$, n prima yang ditunjukkan dalam tabel berikut.

Tabel 5.13. Banyaknya Graf Cayley yang Terbentuk dari Subgrup-Subgrup dalam Grup $(\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \bullet_n)$, n Prima, $2 < n < 19$

No	$(\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \bullet_n)$, n prima	Banyaknya Graf Cayley yang Terbentuk
1	3	1
2	5	3
3	7	7
4	11	31
5	13	63
6	17	255

Dari Tabel 5.13, dapat dilihat bahwa banyaknya Graf Cayley yang terbentuk dari subgrup-subgrup dalam Grup $(\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \bullet_n)$, n prima, $2 < n < 19$ memiliki pola yang sama, yaitu $2^{\binom{n-1}{2}} - 1$, sehingga dapat disimpulkan suatu *conjecture* berikut.

Cconjecture 1.

Banyaknya Graf Cayley yang terbentuk dari suhimpunan dalam Grup $(\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \bullet_n)$, n prima, $n > 2$ adalah $2^{\binom{n-1}{2}} - 1$.

5.5. Karakteristik Graf Identitas dari $(\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \bullet_n)$, n Prima

Berdasarkan hasil yang diperoleh pada Sub bab 5.2, dapat disimpulkan mengenai karakteristik graf identitas berupa banyaknya edge dan banyaknya segitiga yang terbentuk dari Grup $(\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \bullet_n)$, n prima, $2 < n < 19$ yang ditunjukkan dalam tabel berikut.

Tabel 5.14. Banyaknya Edge dan Banyaknya Segitiga yang Terbentuk dari Grup $(\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \bullet_n)$, n Prima, $2 < n < 43$

No	Grup	Banyaknya Edge	Banyaknya Segitiga
1	$(\mathbb{Z}_3 \setminus \{0\}, \bullet_3)$	1	0
2	$(\mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}, \bullet_5)$	1	1
3	$(\mathbb{Z}_7 \setminus \{0\}, \bullet_7)$	1	2
4	$(\mathbb{Z}_{11} \setminus \{0\}, \bullet_{11})$	1	4
5	$(\mathbb{Z}_{13} \setminus \{0\}, \bullet_{13})$	1	5
6	$(\mathbb{Z}_{17} \setminus \{0\}, \bullet_{17})$	1	7
7	$(\mathbb{Z}_{19} \setminus \{0\}, \bullet_{19})$	1	8
8	$(\mathbb{Z}_{23} \setminus \{0\}, \bullet_{23})$	1	10
9	$(\mathbb{Z}_{29} \setminus \{0\}, \bullet_{29})$	1	13
10	$(\mathbb{Z}_{31} \setminus \{0\}, \bullet_{31})$	1	14
11	$(\mathbb{Z}_{37} \setminus \{0\}, \bullet_{37})$	1	17
12	$(\mathbb{Z}_{41} \setminus \{0\}, \bullet_{41})$	1	19

Dari Tabel 5.14, dapat dilihat bahwa banyaknya edge dan banyaknya segitiga yang terbentuk dari Grup $(\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \bullet_n)$, n prima, $3 \leq n \leq 41$ memiliki pola yang sama, sehingga dapat disimpulkan suatu *lemma* berikut.

Lemma 1.

- Graf identitas yang terbentuk dari grup $(\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \bullet_n)$, n prima, $n \geq 3$ memuat satu edge
- Graf identitas yang terbentuk dari grup $(\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \bullet_n)$, n prima, $n \geq 3$ memuat $\frac{p-3}{2}$ segitiga

Bukti:

- i. Grup $(\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \bullet_n)$ n prima dan $n \geq 3$, mempunyai order genap. Misalkan $\mathbb{Z}_n \setminus \{0\} = \{p_1, p_2, p_3, p_4, \dots, p_k\}$, k genap. Karena $(\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \bullet_n)$ adalah grup, maka terdapat suatu elemen identitas (tunggal) dalam grup $(\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \bullet_n)$, dan misalkan elemen identitas tersebut adalah p_1 , maka $p_1^{-1} = p_1$. Karena grup $(\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \bullet_n)$, n prima dan $n \geq 3$ mempunyai order genap dan setiap elemen dalam grup mempunyai invers (invers setiap elemen adalah tunggal), maka terdapat satu elemen dalam grup $(\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \bullet_n)$ selain elemen identitas yang inversnya adalah dirinya sendiri, misalkan p_2 . Berdasarkan Definisi 3, terdapat satu edge dalam graf identitas yang dibentuk dari grup $(\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}, \bullet_p)$ yaitu $p_1 p_2$.
- ii. Karena order grup $(\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}, \bullet_p)$ genap, dan berdasarkan bagian (i) terdapat satu edge dalam graf tersebut, maka terdapat $\frac{p-3}{2}$ pasangan elemen yang saling invers. Berdasarkan Definisi 3, setiap pasangan $\frac{p-3}{2}$ elemen yang saling invers adalah terhubung dan terhubung pula ke elemen identitas maka terbentuk $\frac{p-3}{2}$ segitiga.

BAB VI

RENCANA TAHAPAN BERIKUTNYA

Berdasarkan kajian dan analisis dari penelitian-penelitian yang telah dilakukan, rencana tahapan selanjutnya dari penelitian ini difokuskan pada pembuktian *conjecture-conjecure* yang telah dihasilkan dan mencari karakteristik lain dari graf yang telah dihasilkan.

BAB VII

KESIMPULAN DAN SARAN

7.1. Kesimpulan

Dari hasil penelitian yang telah dilakukan, peneliti dapat menarik kesimpulan yaitu:

1. *Conjecture*: Banyaknya Graf Cayley yang terbentuk dari subhimpunan dalam Grup $(\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \bullet_n)$, n prima, $n > 2$ adalah $2^{\binom{n-1}{2}} - 1$.
2. Graf identitas yang terbentuk dari grup $(\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \bullet_n)$, n prima, $n \geq 3$ memuat satu edge
3. Graf identitas yang terbentuk dari grup $(\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \bullet_n)$, n prima, $n \geq 3$ memuat $\frac{p-3}{2}$ segitiga

7.2. Saran

Pada penelitian ini, dalam menentukan karakteristik graf yang dihasilkan belum memperhatikan adanya graf-graf yang isomorfik atau tidak. Untuk penelitian selanjutnya disarankan untuk melihat sifat isomorfik dari graf-graf yang dihasilkan

DAFTAR PUSTAKA

- Augustin, E., dan Welyyanti, D. 2020. Grup dalam Bentuk Graf Identitas. *Jurnal Matematika UNAND*. Vol. 9, No. 1, pp. 1-7.
- Beineke, L. W., dan Wilson R. J. 2005. *Topics In Algebraic Graph Theory*. Cambridge University Press. New York
- Chartrand, G., Lesniak L., dan Zhang, P. 2016. *Graphs and Digraphs*. Sixth Edition., Taylor Francis Graph. New York.
- Dummit, D.S., dan Foote, R.M. 2004. *Abstract Algebra*. Third Edition, John Wiley and Sinc Inc. Burlington.
- Herawati, M.V.A., Henriyanti, P.S., dan Adiyta, R. 2021. Identity Graph of Finite Cyclic Groups. *International Journal of Applied Science and Smart Technologies*. Vol. 3, No.1, pp. 101-110.
- Kandasamy, W.B.V., dan Smarandache, F. 2009. *Group as Graphs*, Editura CuArt. Romania.
- Latifah. 2018. Matriks Insidensi dari Graf Cayley. *Jurnal Ilmiah Komputasi*. Vol. 17, No. 1, pp. 59-62.
- Leihitu, V.C., Patty, D., dan Patty, H.W.M. 2016. *Struktur Grup dalam Bentuk Graf Identitas*. Prosiding Seminar Nasional Pendidikan Matematika. Univeritas Pattimura. Ambon.
- Munir, R. 2010. *Matematika Diskrit*. Edisi 3. Informatika. Bandung.
- Okal M., Kiftiah, M., Fran, F. 2019. Graf Cayley pada S_n . *Buletin Ilmiah Math, Stat, dan Terapannya (Bimaster)*. Vol. 08, No. 1, pp. 21-28.
- Subiono. 2015. *Aljabar: Sebagai Suatu Pondasi Matematika*. Institut Teknologi Sepuluh November. Surabaya
- Syarifudin, A.G., dan Wardhana, I.G.A.W. 2021. Beberapa Graf Khusus dari Grup Quaternion. *Eigen Mathematics Journal*. Vol. 4, No. 1, pp. 1-7.
- Tripi, A. 2017. Cayley Graphs of Groups and Their Applications. *Master thesis*. Missouri State University. USA

Lampiran 1. LoA Seminar Internasional



UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
International Seminar on Innovation in Mathematics and Mathematics
Education - International Seminar on Science Education
(ISIMMED- ISSE)

Jalan Colombo 1 Karangasem, Yogyakarta 55181, Telp. 0274-588168 Fax 217
Website: <http://www.fkip.uny.ac.id> Email: isimmed@uny.ac.id and isimmed@uny.ac.id

26 October 2022

Nomor : 226/ ISIMMED-ISSE.UNY /X/2022

Re : Acceptance Letter

Author (s) : Zulfia Memi Mayasari; Mulia Astuti; Rasdiana Windarti; Melzha
Amanda

Dear Author (s)

On behalf of the joint seminar of *International Seminar on Innovation in Mathematics and Mathematics Education - International Seminar on Science Education (ISIMMED-ISSE)* Committee, Faculty of Mathematics and Natural Science and I would like to thank you for submitting your full paper for joint seminar of ISIMMED-ISSE with a theme of "New Thought, Research, and Practice of Mathematics and Science Education in the Post-Pandemic Era", that will be held on 11th-12th November 2022 with online platform.

I am pleased to inform you that your initial paper entitled:

Characteristic Identity Graph of Integer Modulo p Group, p Prime
accepted to be presented in the parallel session of the seminar.

If the reviewer has requested any revision, the paper must be revised accordingly and submitted through the online registration system.

Please be reminded to submit your revised full paper **before 7 November 2022 at 06.00 PM (GMT+7)**. You are also required to create a video presentation of your paper with a maximum duration of 10 minutes. Video submission guidelines and important information about the seminar will be available on the seminar's website: <http://isimmed-isse@uny.ac.id>. These videos are used in case of signal or electricity problems. **Presenter attendance remains a priority**. Thank you for participating in the joint seminar of ISIMMED-ISSE 2022. We hope that you are able to attend the seminar.

Yogyakarta, 26 October 2022

Chair,



INTERNATIONAL JOINT SEMINAR
8th ISIMMED - 8th ISSE

Sabar Nurohman, M.Pd.
NIP 198106212005011001

CHARACTERISTICS CAYLEY GRAPH BUILT FROM THE GROUP $(\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \bullet_n)$, n PRIEM FOR A SUBSET THAT CONTAINS TWO ELEMENTS

Zulfia Memi Mayasari^{1*}, Mulia Astuti², Yulian Fauzi³,
Melzha Amanda⁴, Rasdiana Windarti⁵

¹Mathematics Study Program, Faculty of Mathematics and Natural Sciences, Bengkulu
University Jln. WR. Supratman Kota Bengkulu, 38371, Indonesia

Corresponding author e-mail: ^{1*} zulfiamm@unib.ac.id

Abstract. One part of mathematics that plays a major role in the development of science and technology is algebra (abstract algebra). One of the structures found in abstract algebra is a group. Group is an abstract structure. To make it easier to understand and develop which of course will also have an impact on technological developments, groups can be represented in the form of visuals/images known as graphs. Graphs have a lot to do with real life. Graphs help to represent discrete objects and the relationships between these objects so that they are easier to understand. The objective of this research is get the pattern of the number of Cayley graphs formed from subsets in the group $(\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \bullet_n)$, n priem.

Keywords: Group, graph, cayley, characteristic, subset

Article info:

Submitted: date, month, year

Accepted: date, month, year

How to cite this article:

First author, second author, etc, "TITLE OF ARTICLE", BAREKENG: J. Il. Mat. & Ter., vol. xx, iss. xx, pp. xxx-xxx, Month, Year.



This work is licensed under a [Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/).
Copyright © 2021 First author, Second author, etc.

1. INTRODUCTION

Abstract algebra and graph theory are parts of mathematics whose applications are often found in daily life. In abstract algebra, we study algebraic structures such as monoids, groups, rings, fields, modules and etc. Algebraic structure relates to a set that is equipped with one or more operations in it. In a set, the elements contained therein can be described as points and a certain relation defined in the set is described as a line connecting the points. These points and the lines connecting them are called graphs. By definition, a graph G is a pair of finite sets (V, E) , written with the notation $G(V, E)$, in which case V is a non-empty set of vertices and E is a non-empty set of edges connecting a pair of vertices or connect a vertex with the vertex itself.

Often we have difficulty in studying abstract structures. One way to make understanding abstract structures easier is to visualize them in the form of images. Graph is a form of visualization that can represent various abstract structures. One of the algebraic structures that is usually represented in the form of a graph is a group. There are various kinds of graphs that are visualizations of groups including identity graphs, Cayley graphs, commuting graphs, noncommuting graphs, prime graphs, non-coprime graphs and so on.

In this paper, we discuss the number of Cayley graphs and the characteristics of the Cayley graph of the group representation $(\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \bullet_n)$, n prime for subsets with the same number of elements. Dalam paper ini dibahas mengenai banyaknya graf cayley serta karakteristik graf cayley dari representasi grup $(\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \bullet_n)$, for n prime, for subsets with the same number of elements.

2. RESEARCH METHODS

The method used in this research is literature study. The stages of the research were:

1. Conduct a literature review on the results of previous studies related to groups $(\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \bullet_n)$, and Cayley graphs
2. Learn the concept of group representation in Cayley graphs.
3. Make Cayley table from group $(\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \bullet_n)$
4. Draw Cayley graphs from group $(\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \bullet_n)$.
5. Observe the number of Cayley graphs formed from subsets containing two elements in the group $(\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \bullet_n)$
6. Observing the characteristics of the formed Cayley graph
7. Make conclusions

3. RESULTS AND DISCUSSION

Some fundamental concepts of group theory and graph theory can be found in [5,6] for the detail. The results of the research will be presented in the form of theorems and their proof and equipped with graf visualization.

3.1. Group Theory and Graph Theory

These are some fundamental concepts of group theory and graph theory which will be used in this section.

1. A non empty set G with an operation “ $\circ$ ” denoted by $(G, \circ)$ is said a group if satisfying the following conditions: Operation “ $\circ$ ” is a binary operation, associativity, there is an identity element, and each element of G has an inverse. A group G is called an abelian or commutative if $a \circ b = b \circ a$, for all $a, b \in G$.
2. A set $\mathbb{Z}_n$ is a set of integer modulo n which elements of the set are $0, 1, 2, \dots, n$.
3. A set $\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$ is a set of integer modulo n without zero, for n prime with binary operation “ $\bullet_n$ ” is a group,

4. A graph $G(V, E)$ is a pair (V, E) where V is a non-empty set whose members are called vertices and E is a set whose members are unordered pairs of vertices called edges. Mathematically, if $G(V, E)$ is a graph then G consists of the set of vertices in G , denoted by $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_k\}$ and the set of edges in G , denoted by $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_l\}$. The number of elements $V(G)$ is called order graf and expressed by $|V(G)| = k$ and the number of elements $E(G)$ is called size graf and expressed by $|E(G)| = l$, [7]
5. Let u and v are vertices in a graph G . The vertex u and v are said adjacent if they are directly connected by an edge. In other words, u is adjacent to v if (u, v) is an edge on the graph G
6. Let G be a group and let $S \subseteq G$ be a set of group elements such that the identity element $e \notin S$. The Cayley graph denoted as $CAY(G, S)$ is defined as a graph which the set of vertices and the set of edges satisfying these two axioms; (i) Every elements in a group G are vertices in $CAY(G, S)$, and (ii) A pair of vertices u and v is an edge in $CAY(G, S)$ if and only if $v = u \circ s$, $s \in S$ (Beineke and Wilson, 2005).

3.2. Graph Cayley Formation

The formation of the Cayley graph from groups $(\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \bullet_n)$ for n prime begins by finding the subset of $(\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \bullet_n)$ that satisfies the axioms of the Cayley graph. The characteristics of the Cayley Graph discussed in this research is a Cayley Graph which is formed from a subset containing two elements.

1. Cayley Graph from group $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}, \bullet_5)$ for subset containing 2 elements

Subset of group $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}, \bullet_5)$ that satisfies Cayley Graph axioms is $S_1 = \{2, 3\}$. Cayley Graph $CAY(G, S_1)$ is shown in Figure 1.

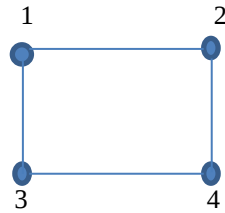


Figure 1. Cayley Graph $CAY(G, S_1)$

2. Cayley Graph from group $(\mathbb{Z}_7 \setminus \{0\}, \bullet_7)$ for subset containing 2 elements

Subset of group $(\mathbb{Z}_7 \setminus \{0\}, \bullet_7)$ that satisfies Cayley Graph axioms is $S_2 = \{2, 4\}$ and $S_3 = \{3, 5\}$ Cayley Graph $CAY(G, S_2)$ and $CAY(G, S_3)$ is shown in Figure 2 and Figure 3.

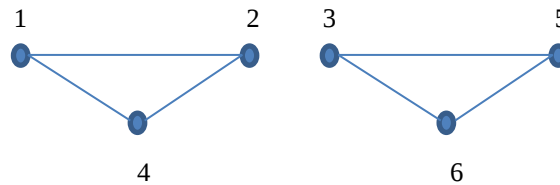


Figure 2. Cayley Graph $CAY(G, S_2)$

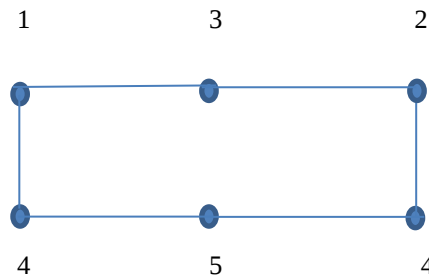


Figure 3. Cayley Graph $CAY(G, S_3)$

3. Cayley Graph from group $(\mathbb{Z}_{11} \setminus \{0\}, \bullet_{11})$ for subset containing 2 elements
 Subset of group $(\mathbb{Z}_{11} \setminus \{0\}, \bullet_{11})$ that satisfies Cayley Graph axioms is $S_4 = \{2,6\}$, $S_5 = \{3,4\}$, $S_6 = \{5,9\}$ and $S_7 = \{7,8\}$. Cayley Graph $CAY(G, S_4)$, $CAY(G, S_5)$, $CAY(G, S_6)$ and $CAY(G, S_7)$ is shown in Figure 4-Figure 7.

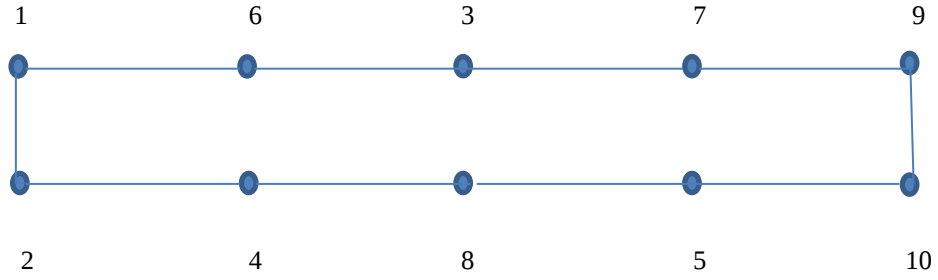


Figure 4. Cayley Graph $CAY(G, S_4)$

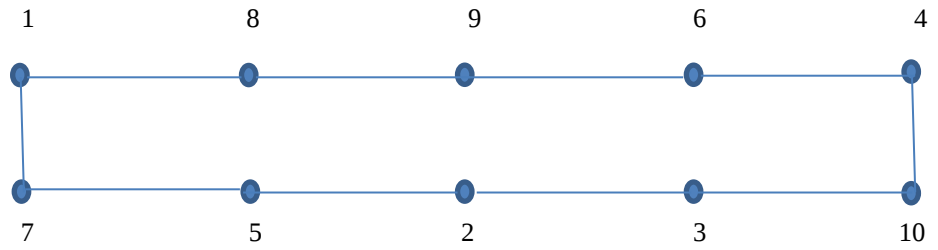


Figure 5. Cayley Graph $CAY(G, S_5)$

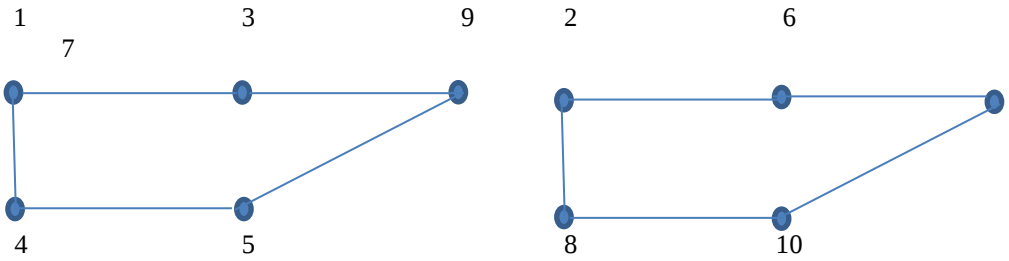


Figure 6. Cayley Graph $CAY(G, S_6)$

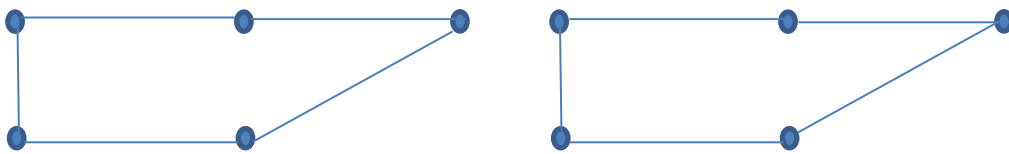


Figure 7. Cayley Graph $CAY(G, S_7)$

4. Cayley Graph from group $(\mathbb{Z}_{13} \setminus \{0\}, \bullet_{13})$ for subset containing 2 elements
 Subset of group $(\mathbb{Z}_{13} \setminus \{0\}, \bullet_{13})$ that satisfies Cayley Graph axioms is $S_8 = \{2,7\}$, $S_9 = \{3,9\}$, $S_{10} = \{4,10\}$, $S_{11} = \{5,8\}$ and $S_{12} = \{6,11\}$. Cayley Graph $CAY(G, S_8)$, $CAY(G, S_9)$, $CAY(G, S_{10})$, $CAY(G, S_{11})$ and $CAY(G, S_{12})$ is shown in Figure 8-Figure 12.

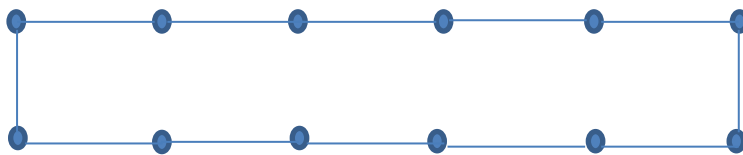


Figure 8. Cayley Graph $CAY(G, S_8)$

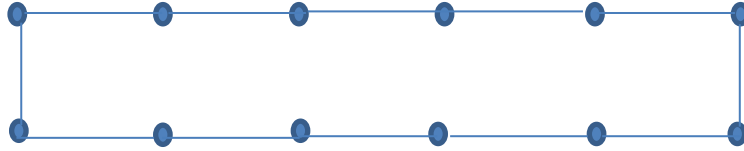


Figure 9. Cayley Graph $CAY(G, S_9)$

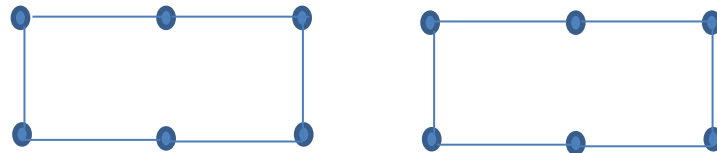


Figure 10. Cayley Graph $CAY(G, S_{10})$

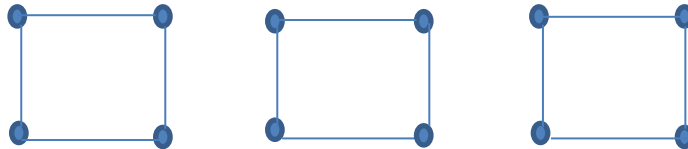


Figure 11. Cayley Graph $CAY(G, S_{11})$

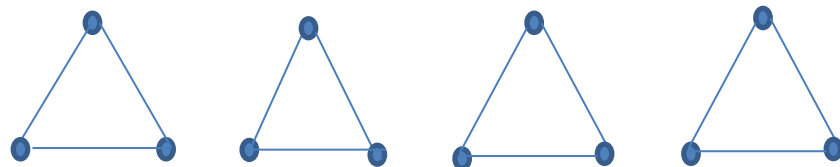


Figure 12. Cayley Graph $CAY(G, S_{12})$

5. CONCLUSIONS

6. ACKNOWLEDGEMENT

7. REFERENCES