BUKU AJAR

KALKULUS INTEGRAL BERBASIS MODEL APOS BERBANTUAN MAPLE

Dr. Dra. Hanifah, M.Kom.

BUKU AJAR

KALKULUS INTEGRAL BERBASIS MODEL APOS BERBANTUAN MAPLE

UU No 28 tahun 2014 tentang Hak Cipta

Fungsi dan sifat hak cipta Pasal 4
Hak Cipta sebagaimana dimaksud dalam Pasal 3 huruf a merupakan hak eksklusif yang terdiri atas hak moral dan hak ekonomi.

Pembatasan Pelindungan Pasal 26
Ketentuan sebagaimana dimaksud dalam Pasal 23, Pasal 24, dan Pasal 25 tidak berlaku terhadap:
i. Penggunaan kutipan singkat Ciptaan dan/atau produk Hak Terkait untuk pelaporan peristiwa aktual yang ditujukan hanya untuk keperluan penyediaan informasi aktual;
ii. Penggandaan Ciptaan dan/atau produk Hak Terkait hanya untuk kepentingan penelitian ilmu pengetahuan;
iii. Penggandaan Ciptaan dan/atau produk Hak Terkait hanya untuk keperluan pengajaran, kecuali pertunjukan dan Fonogram yang telah dilakukan Pengumuman sebagai bahan ajar; dan
iv. Penggunaan untuk kepentingan pendidikan dan pengembangan ilmu pengetahuan yang memungkinkan suatu Ciptaan dan/atau produk Hak Terkait dapat digunakan tanpa izin Pelaku Pertunjukan, Produser Fonogram, atau Lembaga Penyiaran.

Sanksi Pelanggaran Pasal 113
1. Setiap Orang yang dengan tanpa hak melakukan pelanggaran hak ekonomi sebagaimana dimaksud dalam Pasal 9 ayat (1) huruf i untuk Penggunaan Secara Komersial dipidana dengan pidana penjara paling lama 1 (satu) tahun dan/atau pidana denda paling banyak Rp100.000.000 (seratus juta rupiah).
2. Setiap Orang yang dengan tanpa hak dan/atau tanpa izin Pencipta atau pemegang Hak Cipta melakukan pelanggaran hak ekonomi Pencipta sebagaimana dimaksud dalam Pasal 9 ayat (1) huruf c, huruf d, huruf f, dan/atau huruf h untuk Penggunaan Secara Komersial dipidana dengan pidana penjara paling lama 3 (tiga) tahun dan/atau pidana denda paling banyak Rp500.000.000,00 (lima ratus juta rupiah).

BUKU AJAR

KALKULUS INTEGRAL BERBASIS MODEL APOS BERBANTUAN MAPLE

Dr. Dra. Hanifah, M.Kom.

deepublish
glorify and develop the intellectual of human's life

BUKU AJAR
KALKULUS INTEGRAL BERBASIS MODEL APOS BERBANTUAN MAPLE

Hanifah

Desain Cover :
Rulie Gunadi

Sumber :
https://www.shutterstock.com

Tata Letak :
TitisYuliyanti

Proofreader :
Avinda Yuda Wati

Ukuran :
viii, 117 hlm, Uk: 20x29 cm

ISBN :
978-623-02-2030-2

Cetakan Pertama :
Desember 2020

PENERBIT DEEPUBLISH
(Grup Penerbitan CV BUDI UTAMA)
Anggota IKAPI (076/DIY/2012)

Jl.Rajawali, G. Elang 6, No 3, Drono, Sardonoharjo, Ngaglik, Sleman
Jl.Kaliurang Km.9,3 – Yogyakarta 55581
Telp/Faks: (0274) 4533427
Website: www.deepublish.co.id
www.penerbitdeepublish.com
E-mail: cs@deepublish.co.id

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kepada Allah Swt. yang telah memberikan rahmat dan karunia-Nya kepada penulis sehingga buku ajar Kalkulus Integral sebagai penunjang terlaksananya Model Pembelajaran Matematika Berdasarkan Teori APOS (Model APOS) ini berhasil penulis sempurnakan dari aslinya. Selawat teriring salam penulis haturkan kepada junjungan kita, Baginda Rasulullah Muhammad saw. yang telah membawa penerangan kepada kita semua *Allahumma Shalli'ala Muhammad*.

Buku ajar Kalkulus Integral ini merupakan penyempurnaan dari buku ajar *Kalkulus Berdasarkan Teori APOS Berbantuan Maple 17* (Hanifah, 2018). Buku ajar tersebut merupakan penyempurnaan dari buku mahasiswa sebagai hasil pengembangan Model Pembelajaran Kalkulus Berdasarkan Teori APOS yang dirancang sebagai perangkat pembelajaran dalam rangka penyusunan disertasi 2015. Perubahan yang dilakukan waktu itu adalah menyesuaikan pembagian Lembar Kerja Mahasiswa yang semula terdiri dari Lembar Kerja Praktikum, Lembar Kerja Manual, Lembar Diskusi Kelas, Lembar Latihan/Evaluasi, di ubah menjadi berdasarkan sintak dari Model APOS yang terdiri dari fase: Orientasi, Praktikum, Diskusi Kelompok, Diskusi Kelas, Latihan dan Evaluasi. Pada fase praktikum mengganti Maple Versi 11 dengan Maple Versi 17. Kemudian melakukan perampingan soal-soal berdasarkan saran dari mahasiswa yang telah menggunakan Lembar Kerja Berbasis Model APOS ini. Buku tersebut setelah dipakai oleh mahasiswa, ternyata masih memiliki kelemahan. Kelemahan tersebut harus dijelaskan oleh dosen pada fase Orientasi. Untuk mengatasi hal tersebut ke depannya maka dilakukan penambahan isi dari fase Orientasi yaitu dengan menuliskan bantuan yang diberikan secara lisan menjadi bahasa tulisan pada fase Orientasi.

Buku ajar Kalkulus Integral terdiri dari 14 Lembar Kerja Mahasiswa dengan materi berasal dari buku Kalkulus yaitu: Integral tak tentu sebagai anti turunan, integral tentu, penerapan integral, fungsi transenden, teknik pengintegralan, dan integral tak wajar.

Ada beberapa kendala dalam pengembangan Lembar Kerja Mahasiswa (LKM) terutama pada fase praktikum yang menggunakan sintak Maple yaitu sulit menjelaskan langkah suatu pokok bahasan oleh sintak Maple seperti pada penjelasan tentang Sigma. Lambang yang dipakai Maple berbeda dangan yang ada pada buku Kalkulus, untuk itu siapa pun yang menggunakan Buku Ajar ini haruslah membaca buku sumber asli yaitu Kalkulus. Bagi yang duluan menguasai, diharapkan dapat membantu mahasiswa lainnya.

Ucapan terima kasih penulis haturkan kepada mahasiswa Pendidikan Matematika: Semester 3 Kelas A FKIP UNIB TA 2017/2018, Semester 3 Kelas B FKIP

TA 2018/2019, yang telah sukses sebagai pengguna Lembar Kerja atau Buku Ajar Kalkulus Berbasis Model APOS 17, dan telah memberikan kritik dan saran untuk perbaikan setiap Lembar Kerja. Ucapan terima kasih juga penulis haturkan kepada Ibu Nur Aliyah Irsal, S.Pd., M.Pd. sebagai asisten yang telah banyak membimbing mahasiswa dalam menggunakan Buku Ajar Kalkulus ini. Tak lupa penulis haturkan terima kasih kepada Mestika Fatwa Meutia yang telah membantu mengedit ulang buku ajar Kalkulus ini. Tak lupa penulis haturkan terima kasih banyak kepada Siti Masyitoh dan Ahbi Mahdianing Rum, S.Pd. yang telah membantu menambahkan/ merevisi serta mengedit ulang Buku Ajar Kalkulus Integral Berdasarkan Teori APOS berbantuan Maple 18.

Penulis menyadari akan keterbatasan pengetahuan dan pengalaman penulis. Untuk itu penulis mengharapkan kritik dan saran yang sifatnya membangun demi kesempurnaan buku ajar Kalakulus Integral Berbasis Model APOS ini.

Bengkulu, 26 Juni 2020

Dr. Dra. Hanifah, M.Kom.

DAFTAR ISI

BAB I
PENGENALAN MAPLE UNTUK KALKULUS II (INTEGRAL)

Maple adalah perangkat lunak matematika berbasis komputer, yang mampu menyelesaikan persoalan-persoalan matematika seperti menyelesaikan soal-soal Kalkulus, soal-soal Aljabar Linear, dan soal-soal matematika lainnya. Pada pengenalan Maple ini program aplikasi Maple yang digunakan adalah Maple.

Aplikasi ini bisa di-*download* di internet dengan men-*search* di Google lalu klik master Maple 18, dan instal seperti penginstalan program pada umumnya. Setelah terinstal, masukkan *lisence* yang tersedia, ke *C:\Program Files\Maple xx\bin.win\ Maple.dll*. Maple 18 siap digunakan.

Untuk memulai penggunaan Maple 18, klik ikon Maple 18. Lalu jalankan programnya. Untuk mengetahui lebih lanjut tentang Maple, silahkan memanfaatkan *The Maple Help System*.

Maple bersifat sangat sensitif dalam pemakaian huruf besar dan huruf kecil dalam persamaan matematika. Artinya Maple menganggap berbeda huruf yang sama tetapi ukuran berbeda, misalnya perintah Int akan berbeda dengan perintah int. Setiap perintah yang diberikan harus diakhiri dengan *semicolon* (**;**), bila ingin mengetahui hasil operasi Maple dengan segera. Perintah diakhiri dengan *colon* (**:**), bila hasilnya tidak ingin ditampilkan tapi tetap diproses. Untuk mengeksekusi perintah maka selanjutnya tekan **[Enter].**

Sebaiknya sebelum perintah-perintah diberikan pada Maple, dimulai dulu dengan perintah **restart;** untuk pengosongan memori. Berikut ini adalah pengenalan dari beberapa perintah-perintah pada Maple yang sering digunakan dalam Kalkulus.

1. Operasi Aritmetika

Operasi	Penulisan Biasa	Penulisan Maple
Penjumlahan	+	+
Pengurangan	-	-
Perkalian	X	*
Pembagian	: atau /	/
Pangkat	$2b^3$	2*b^3
Phi	π	Pi
Akar Pangkat Dua	$\sqrt{9}$	sqrt(9)
Nilai Mutlak	| 9 |	abs(9)

2. Perintah Penting

Berikut ini adalah beberapa perintah penting yang sering dipakai dalam menyelesaikan soal Kalkulus menggunakan Maple.

Perintah	Fungsi
Evalf	Memberikan nilai numerik
Simplify	Menyederhanakan ekspresi aljabar
Expand	Menguraikan suatu ekspresi
Factor	Memfaktorkan suatu ekspresi
Solve	Menyelesaikan sistem persamaan
Fsolve	Memberikan solusi numerik
Subs	Melakukan substitusi
Changevar	Mengganti variabel

3. Fungsi

Format pendefinisian di dalam Maple untuk menyatakan sebuah fungsi meliputi komponen-komponen berikut. (1) nama fungsi, (2) tanda := (titik dua dan sama dengan), (3) nama-nama variabel bebas, (4) tanda panah (→), (5) rumus fungsi, dan (6) tanda titik koma (;). Perhatikan contoh di bawah ini, untuk menyatakan fungsi $(x^4 - 4x^2 + 5)/(x + 4)$

```
➢ restart; with(plots):
➢ f := x ->(x^4-4*x^2+5) /(x+4);
```

Berikut ini adalah nama-nama fungsi Transenden dan cara penulisannya dalam Maple

Penulisan Maple	Nama Fungsi
exp(x);	Fungsi *Exponent* (e^x)
ln(exp(x)); ln(exp(1)); ln(exp(0));	Logaritma Natural
sin(x); cos(x); tan(x); cotan(x); sec(x); cosec(x);	Fungsi Trigonometri
arcsin(x); arccos(x); arctan(x); dan lainnya	Invers Trigonometri
sinh(x); cosh(x); tanh(x); dan lainnya	Hiperbolik
arcsinh(x),;arccosh(x); arctanh(x); dan lainnya	Invers Hiperbolik

4. Melukis Grafik Fungsi

Apabila fungsi $y = f(x)$, akan dibuat grafiknya menggunakan Maple, maka digunakan perintah plot dengan sintaks perintahnya sebagai berikut:

```
➢ plot(f(x), x=a..b , option1, option2, ...);
```

dengan *x*=a..b adalah batas nilai *x* untuk grafik yang akan dibuat pada selang [*a*, *b*].Sedangkan parameter *option* adalah properti aksesori grafik. *Option* ini bersifat opsional (tidak harus dituliskan). Berikut ini beberapa contoh penggunaan perintah Maple untuk membuat grafik fungsi dalam 2 dimensi:

```
➢ restart; with(plots):
➢ f := (x) -> 2*x-1;
➢ plot(f(x),x=-3..3);
```

Cara lain

```
➢ plot(2*x-1, x = -3..3);
➢ plot(sin(x)+2*cos(x),x=-5..8);
➢ plot(piecewise(x>1,x-2,x<=1,-x+3),x=0..7);
```

Perintah Maple untuk menggambar beberapa fungsi dalam satu bidang gambar

```
➢ plot({fungsi 1, fungsi 2, ...}, domain, option);
                    Contoh
➢ plot({x,x^2,x^3,x^4},x=-1..1, -1.5..1.5);
```

5. Turunan Fungsi

Perintah yang digunakan untuk mencari turunan suatu fungsi adalah **diff** atau dengan operator **D**. Untuk menghitung derivatif dengan menggunakan perintah **diff** diperlukan dua buah parameter, yakni fungsi dan variabel terhadap mana derivatif dilakukan.
Contoh

```
➢ restart; with(plots):
➢ f := x -> sqrt(1+x^2);
➢ diff( f(x),x);
```

Hasil yang sama dapat diperoleh dengan menggunakan operator derivatif **D.** Perintahnya adalah sebagai berikut.

```
➢ f := x -> sqrt(1+x^2);
➢ D(f)(x);
```

Masih terdapat cara lain untuk menghitung derivatif suatu fungsi pada Maple, yakni dengan menggunakan perintah **Diff**. Akan tetapi, perintah **Diff**, tidak secara langsung menghasilkan ekspresi hasil turunan, melainkan notasi seperti dalam matematika. Untuk menghasilkan ekspresi turunannya digunakan perintah **value**. Perhatikan contoh sebagai berikut untuk menghitung turunan fungsi di atas.

```
➢ f := x -> sqrt(1+x^2);
➢ Diff(f(x),x); %=value(%);
```

Jadi, Anda dapat menyimpulkan bahwa **diff(f(x),x)=value(Diff(f(x),x))**. Anda juga bisa menulisnya **Diff(f(x),x)=diff(f(x),x);**

6. Grafik Fungsi & Grafik Fungsi Turunannya

Fungsi-fungsi f(x), dan, f'(x) dapat kita gambarkan bersama-sama pada sebuah sumbu koordinat. Hal ini dapat dilakukan dengan mudah menggunakan Maple. Perhatikan contoh di bawah ini.

- ➢ f := x->sqrt(1+x^2); plot({f(x),D(f)(x)},x=-2..2, y=-3..3);

7. SIGMA

Perintah untuk menulis dalam lambang sigma jumlah deret berhingga n suku pertama, dan perintah untuk mengetahui nilainya adalah sebagai berikut.

- ➢ restart:
- ➢ Sum(i,i=1..n)=sum(i,i=1..n);
- ➢ Sum(i,i=1..10)=sum(i,i=1..10);
- ➢ Sum(i^2,i=1..n)=sum(i^2,i=1..n);
- ➢ Sum(i^3,i=1..n)=sum(i^3,i=1..n);

8. Menghitung Luas Poligon

Untuk menghitung poligon-poligon kiri (dalam) dan poligon-poligon luar (kanan) caranya serupa. Berikut ini adalah perintah untuk menghitung poligon dalam dan poligon luar. Kalimat di belakang tanda # adalah keterangan, tidak perlu disalin ke Maple.

a. Poligon Dalam

- ➢ **restart; with(plots): with(student):**
  # perintah untuk mengosongkan memori; perintah agar grafik bisa dilukis; perintah agar luas poligon bisa dihitung dll
- ➢ **f:=x->x^2; a:=1; b:=3; n:=2;**
  # perintah untuk menuliskan fungsi $f(x) = x^2$ *, untuk a=1, b =3 dan banyak partisi n = 2*
- ➢ **leftbox (f(x),x=1..3,2);**
  # perintah untuk melukis luas daerah berdasarkan poligon kiri (poligon dalam) untuk a=1 dan b=3 dengan jumlah partisi n = 2
- ➢ **Delta := (b-a)/n;**
  #perintah untuk menghitung lebar partisi
- ➢ **x[k] := k*Delta;**
  # perintah untuk menentukan nilai fungsi dititik sampel x_k
- ➢ **Sum(f(x[k])*Delta, k=0..(n-1)): % = simplify(value(%));**
  # perintah untuk menghitung jumlah luas masing-masing segi empat dalam bentuk lambang sigma, dan perintah untuk menghitung hasilnya untuk k=0 sampai k=n-1

b. Poligon Luar

- restart; with(plots): with(student):
- f:=x->x^2; a:=1; b:=3; n:=2;
- rightbox(f(x),x=1..3,2);
  # perintah untuk melukis luas daerah berdasarkan poligon kanan (poligon luar) untuk a=-1 dan b=1 dengan jumlah partisi n = 2
- Delta := (b-a)/n;
- x[k] := a + k*Delta;
  # perintah untuk menentukan nilai fungsi dititik sampel x_k
- Sum(f(x[k])*Delta, k=1..n): % = simplify(value(%));
- rightsum(f(x),x = a..b,n): Luas := evalf(%,10);
  #Perintah untuk menghitung jumlah luas poligon luar/kanan, dan hasilnya

9. Jumlah Riemann

a. Titik-titik sampel dan delta berupa angka

- restart; with(plots): with(student):
- f:=x->x^3-5*x^2 +2*x + 8;
- x_1:=0.5; x_2:=1.5; x_3:=2.5; x_4:=3.6; x_5:=5;
  # menuliskan titik-titik sampel yang diketahui atau diberikan
- Delta1:=(1.1- 0);Delta2:=(2-1.1); Delta3:=(3.2-2); Delta4:=(4-3.2); Delta5:=(5-4);
  # mencari delta selang partisi di mana diketahui P:0<1,1<2<3,2<4<5
- JumlahRiemann:=(f(x1)*Delta1+f(x2)*Delta2+f(x3)*Delta3+ f(x4)*Delta4+f(x5)*Delta5);
  # menentukan jumlah Riemann dari fungsi yang dimaksud

b. Titik sampel dan delta berupa rumus

- **f:=x->-x^2+4; a:= -1; b:=3;**
- **middlebox(f(x),x= -1..3, 8);**
  # perintah untuk melukis luas daerah berdasarkan poligon tengah untuk a = -1 dan b=3, dan n =8)
- **Delta := (b-a)/n;**
- **x[k] := a + k*Delta;**
  # perintah untuk menentukan nilai fungsi dititik $x_{k,}$ k=1..n
- **Sum(f(x[k])*Delta,k=1..n): % = simplify(value(%));**
  # perintah untuk menghitung jumlah luas masing-masing segi empat dalam bentuk lambang sigma, dan perintah untuk menghitung hasilnya untuk k=1..n
- **Limit(%%,n = infinity):%= evalf(value(%));**
  #perintah untuk menghitung limit n menuju ∞ , dan perintah untuk menampilkan hasil perhitungan limitnya.

10. Integral

Perintah Maple untuk menghitung integral adalah **Int** (dengan huruf I besar) atau **int** (dengan i kecil). Perintah **Int** menghasilkan ekspresi integral tanpa menghitung nilainya, sedangkan perintah **int** menghitung anti-derivatif. Untuk menampilkan hasil perhitungan ekspresi integral dari perintah **Int** dapat digunakan perintah **value**.

Berikut ini adalah cara penulisan dan contoh penulisan integral serta perhitungan integral suatu fungsi.

```
➢ Int(f(x),x); value(%); int(f(x),x);
  #Contoh
  ➢ f:= x →-50*x^2 + 21*x + 6;
  ➢ Int(f(x),x);
  ➢ %=int(f(x),x);
  #Atau
  ➢ Int(f(x),x)= int(f(x),x);
```

11. Menghitung Luas Daerah

a. Daerah di Atas Sumbu x

```
➢ restart; with(plots): with(student):
➢ f:=x-> 5*x - x^2;
➢ middlebox(f(x),x=0..3, 400);
  # perintah untuk melukis daerah yang dibatasi f(x) dan sumbu x untuk x = 0
  sampai x = 3 dengan n=400.
➢ Luas:= Int(f(x), x=0..3)=int(f(x), x=0..3);
  # perintah untuk menghitung luas daerah yang dbatasi f(x) dan sumbu x
  untuk x = 0 sampai x = 3
```

b. Daerah di Bawah Sumbu x

```
➢ restart; with(plots): with(student):
➢ f:=x-> x^2 - 5*x;
➢ middlebox(f(x),x=0..2, 400);
  # perintah untuk melukis daerah yang dibatasi f(x) dan sumbu x untuk x =
  0 sampai x = 2 dengan n=400.
➢ Luas:= -Int(f(x), x=0..2)= -int(f(x), x=0..2);
  # perintah untuk menghitung luas daerah yang dibatasi f(x) dan sumbu x
  untuk x = 0 sampai x = 2. Tanda negatif di depan integral diberikan untuk
  daerah di bawah sumbu x agar hasil perhitungan menjadi positif, karena
  luas nilainya tak pernah negatif.
```

c. Daerah Antara Dua Kurva

- with(student: with(plots):
- f1 := *x* -> x^2;
- f2 := *x* -> 2*x-x^2;
- plot({f1(x),f2(x)},x=0..1.5); #
  # Perintah untuk melukis grafik f1 dan f2 pada bidang yang sama
- titikpot := evalf(solve(f1(x)=f2(x),x));
  # mencari titik potong f1 dan f2
- Luas := Int(f2(x)-f1(x),x=titikpot[1]..titikpot[2])= int(f2(x) - f1(x),x=titikpot[1]..titikpot[2]);
  # menghitung luas daerah antara f1 dan f2, pastikan f2 > f1, agar hasil positif

BAB II
INTEGRAL TENTU

Pada bab 2 ini kita akan membahas perihal integral tentu. Namun, sebelum kita berbicara lebih jauh tentang integral tentu, kita perlu mengetahui apa dan bagaimana integral itu sendiri. Pada buku ajar Kalkulus Integral ini, secara lebih rinci tentang pendahuluan integral akan dibahas di LK-1 Anti turunan. Setiap Lembar Kerja memuat fase orientasi, fase praktikum, fase diskusi kelompok, fase diskusi kelas dan latihan sehingga memudahkan Anda sebagai seorang pendidik untuk memberikan pengajaran serta pemahaman kepada peserta didik Anda, dan juga sebagai pembelajaran yang lebih lengkap dan jelas tentang kalkulus integral untuk pendalaman materi bagi diri Anda sendiri.

Setelah memahami integral sebagai anti turunan, kita mendapati dua masalah, keduanya dari geometri, memunculkan dua pemikiran penting tentang kalkulus. Masalah mencari garis singgung dengan turunan dan masalah pencarian luas yang akan membawa kita pada integral tentu. Nah, materi Pendahuluan Luas ini secara lebih lengkap akan dibahas di LK-2 Pendahuluan Luas

Pemahaman tentang menghitung poligon luar dan/atau poligon dalam sangat dibutuhkan pada Lembar Kerja selanjutnya yaitu LK-3 Jumlah Riemann. Di lembar kerja ini Anda diajak untuk menghitung jumlah Riemann dari suatu fungsi. Dimulai dengan partisi berbatas hingga partisi tak berhingga di dalam batas tertentu. Nah, inilah yang akan menjadi cikal bakal dari integral tentu.

Setelah menguasai anti turunan, pendahuluan luas, hingga jumlah Riemann barulah kita sampai pada Integral Tentu. Sekarang integral sudah tak asing lagi, bukan? Pada awalnya Newton dan Liebniz mengemukakan versi awal tentang konsep ini, namun Georg Riemann memberi kita suatu definisi modern. Secara lebih lengkap dibahas di LK-4 Integral Tentu.

Lembar kerja selanjutnya adalah LK-5 Teorema Dasar Kalkulus, Seperti yang kita pahami, bahwa kalkulus adalah studi tentang limit. Sejauh ini kita sudah belajar tentang turunan dan integral tentu. Dua jenis limit ini kelihatannya seperti tidak berkaitan. Namun sebenarnya terdapat kaitan yang sangat erat antara keduanya.

LEMBAR KERJA

(LK- 1)

ANTI TURUNAN

KALKULUS INTEGRAL BERBASIS MODEL APOS

NAMA KELOMPOK:

NAMA ANGGOTA:

1.
2.
3.
4.

FASE ORIENTASI (WAKTU 15 MENIT)

Anti Turunan

Matematika memiliki banyak pasangan operasi balikan; pengurangan dan penambahan, dan lain sebagainya. Dalam masing-masing kasus, operasi kedua menghapus operasi pertama, dan sebaliknya. Jika kita bermaksud memecahkan persamaan yang melibatkan turunan maka kita perlu balikannya, yaitu anti turunan.

Definisi dari anti turunan: kita sebut F suatu anti-turunan f pada interval I jika $D_x F(x) = f(x)$ pada I, yakni jika $F'(x) = f(x)$ untuk semua x dalam I.

Untuk lebih jelas dapat dipelajari tentang Anti turunan pada buku sumber utama Kalkulus edisi kesembilan jilid I halaman 196.

FASE PRAKTIKUM (WAKTU 50 MENIT)

A. ANTI TURUNAN

Gunakanlah pengetahuan yang telah Anda miliki untuk menjawab langsung (tinggalkan saja bila Anda belum bisa menjawabnya), kemudian laksanakanlah perintah MAPLE yang ada pada Tabel 1 yang berisi tentang Turunan Fungsi, Tabel 2 tentang Integral Tak Tentu, dan Tabel 3 tentang Aturan Pangkat yang Digeneralisir. Kemudian salinlah jawaban MAPLE di tempat yang sudah disediakan pada tabel-tabel yang bersesuaian.

Tabel1. Fungsi dan Turunan Fungsi

No	Perintah MAPLE	Jawaban MAPLE
1	➢ **restart; with(plots):** */*Perintah mengosongkan memori, dan tempat menyimpan perintah melukis grafik*/* ➢ **f:= x →x^2 +9;** */*Perintah penulisan fungsi f(x)= x² + 6) */* ➢ **Diff(f(x),x)=D(f)(x);** */*Perintah untuk mencari turunan fungsi dan hasil turunannya */*	
2	➢ **g:= x →x^2 ;** ➢ **Diff(g(x),x)=D(g)(x);**	
3	➢ **h:= x →x^2 - 15;** ➢ **Diff(h(x),x)=D(h)(x);**	
4	➢ **p:= x →x^3 + 13;** ➢ **Diff(p(x),x)=D(p)(x);**	
5	➢ **q:= x →x^3 ;** ➢ **Diff(q(x),x)=D(q)(x);**	

No	Perintah MAPLE	Jawaban MAPLE
6	➢ **r:= x →x^3 - 25;** ➢ **Diff(r(x),x)=D(r)(x);**	
7	➢ **s:= x →x^4 + 9;** ➢ **Diff(s(x),x)=D(s)(x)**	
8	➢ **t:= x →x^4 ;** ➢ **Diff(t(x),x)=D(t)(x);**	
9	➢ **u:= x →x^4 - 12;** ➢ **Diff(u(x),x)=D(u)(x);**	
10	➢ **plot({p(x),D(p)(x),q(x),D(q)(x), r(x),D(r)(x)}, x = -3..3, y = -25..20);** */* perintah melukis beberapa grafik yaitu p(x), q(x), r(x) di daerah yang sama yaitu pada x=[-3,3] dan y=[-25,20]); */*	**(Buat Sketsa seperlunya saja)**

B. INTEGRAL TAK TENTU

TABEL 2. Penghitungan Integral Tak Tentu

No	Perintah MAPLE	Jawaban MAPLE
1	➢ **f:= x →12*x^3 -7*x^2 + 12;** */* Perintah untuk menulis fungsi f(x) = 12x^3 -7x^2 +12) */* ➢ **Int(f(x),x)=int(f(x),x);** */* Perintah untuk menghitung Integral dari f(x)= 24x^3 +9x^2 +12) , dan perintah untuk menentukan hasilnya */*	
2	➢ **Int((2*x)^2,x)=int((2*x)^2,x);** */*menghitung $\int 2x^2 dx$, tanpa mendefinisikan fungsi f(x) terlebih dahulu, dan perintah untuk menentukan hasilnya */*	
3	➢ **Int(8 - 2*x,x)=int(8 - 2*x,x);**	
4	➢ **f1:= t → sin(t);** ➢ **f2:=Int(f1(t),t)=int(f1(t),t);** /*Perintah untuk menuliskan fungsi Trigonometri untuk f(t)= sin t, dan perintah untuk menuliskan $\int f1(t)dt$ dan hasilnya. */	
5	➢ **g1:= t → cos(t);** ➢ **g2:=Int(g1(t),t)=int(g1(t),t);**	

No	Perintah MAPLE	Jawaban MAPLE
6	➢ **Int(f1(t) +g1(t),t)=int(f1(t)+g1(t),t);**	
7	➢ **Int(f1(t) -g1(t),t)=int(f1(t)-g1(t),t);**	
8	➢ **5 (Int(f1(t) -g1(t),t)) =5*(int(f1(t)-g1(t),t));**	
9	➢ **Int(5*f1(t) +5*g1(t),t)=int(5*f1(t)+5*g1(t),t);**	

C. Aturan Pangkat yang Digeneralisir (Metode Substitusi)

Tabel 3. Metode Substitusi

No	Perintah MAPLE	Jawaban MAPLE
1	➢ **restart; with(student):** *#/* digunakan untuk mengaktifkan perintah changevar dalam melakukan substitusi */*	
	➢ **f:=Int(x*(x^2-2)^(1/2),x);** #/* *digunakan* untuk *mendefenisikan* $f = \int x(x^{2}-2)^{1/2}\,dx$ */	
	➢ **changevar(u=(x^2-2),f,u);** *#/* Memisalkan* $u = (x^2 - 2)$*, dan mengganti variable x pada f menjadi variabel u pada f */*	
	➢ **f2:=value(%);** *#/*Menghitung hasil integral dalam variable u. */*	
	➢ **subs(u=(x^2-2),f2);** *#/* Mengganti kembali variabel u kedalam variable x sehingga hasil akhir kembali dalam bentuk variable x */*	
	➢ **Diff(%,x)=diff(%,x);** */* perintah untuk menurunkan kembali hasil integral untuk menguji kebenaran hasilnya */*	
2	➢ **g:=Int((5*x^2+1)*(5*x^3+3*x- 8)^2,x);**	
	➢ **changevar(u=5*x^3+3*x-8,g,u);**	
	➢ **g2:=value(%);**	
	➢ **subs(u=5*x^3+3*x-8,g2);**	
	➢ **Diff(%,x)=diff(%,x);**	
3	➢ **h:=Int((8 – 2*x)^121,x);**	
	➢ **changevar(u=8– 2*x,h,u);**	
	➢ **h2:=value(%);**	
	➢ **subs(u=8–2*x,h2);**	
	➢ **Diff(%,x)=diff(%,x);**	

No	Perintah MAPLE	Jawaban MAPLE
4	➢ **f:=Int(sin^10(x)*cos(x),x);** ➢ **changevar(u=sin(x),f1,u);** ➢ **f2:=value(%);** ➢ **subs(u=sin(x),f2);** ➢ **Diff(%,x)=diff(%,x);**	

FASE DISKUSI KELOMPOK KECIL (WAKTU: 50 MENIT)

DISKUSIKANLAH

UNTUK TABEL 1

Amatilah kembali jawaban MAPLE pada Tabel 1 di atas, kemudian diskusikanlah pertanyaan-pertanyaan berikut:

1. Kesimpulan apa yang dapat Anda peroleh dari jawaban MAPLE untuk perintah
   a) no 1, 2, dan 3?
   b) no 4, 5, dan 6?
   c) no7, 8, dan 9?
2. Kalau diketahui f ’(x) = $3x^2$, berapa banyakkah fungsi f(x) dengan f ’(x) = $3x^2$? Lengkapilah dengan beberapa contoh fungsinya.
3. Kalau diketahui f’(x) = $5x^4$, g’(x)= $6x^5$, h’(x) = $7x^6$, tentukanlah
   a) f(x)
   b) g(x)
   c) h(x).

Jika untuk mencari berapa F(x) bila F ’(x)nya diketahui dilambangkan dengan F(x) = $\int F'(x)dx$. Gunakan lah lambang di atas untuk menghitung soal berikut.

4. $\int 2xdx$= ----
5. $\int 3x^2dx$ = ----
6. $\int 4x^3dx$ = ----
7. $\int 5x^4dx =$ ----
8. $\int x^n dx$ = -----

UNTUK TABEL 2

1. Amatilah jawaban MAPLE pada Tabel 2 di atas. Jelaskanlah dengan ringkas apa keunggulan mendefinisikan f terlebih dahulu, dengan tanpa mendefinisikannya terlebih dahulu (fungsi ada dalam perintah)!
2. Sifat integral apa saja yang dapat Anda peroleh dari jawaban MAPLE pada Tabel 2 tersebut.?

UNTUK TABEL 3

Diskusikanlah

1. Amatilah Jawaban MAPLE untuk perintah nomor 3 pada Tabel 3. Kemudian jawablah pertanyaan berikut dengan memperhatikan jawaban MAPLE
   a. h(x) = ….
   b. Yang akan di cari adalah …….
   c. u = ….
   d. u' = ….
   e. du = (……) dx
   f. buatlah jawaban b) ke dalam variabel u
   g. apa hasilnya dalam u?
   h. apa pula hasilnya setelah dikembalikan ke dalam variabel x?
   i. Apa hasilnya setelah diturunkan kembali?
2. Pergunakanlah langkah yang ada pada soal no 1 di atas untuk menyelesaikan soal berikut. Hitunglah $\int (6x+3)^{10} dx$

BAGIAN II

LEMBAR KERJA MANUAL(LKM-1)

Tabel-tabel berikut ini berisi soal-soal tentang penghitungan integral yang akan diselesaikan secara manual (tanpa bantuan komputer).

Tabel 1. Pencarian Fungsi Anti Turunan

soal:

1. Carilah suatu fungsi (anti turunan) yang turunannya adalah fungsi f(x) = $7x^6 + 16x^3 - 6$?
2. Jelaskanlah mengapa muncul lambang C sebagai konstanta pada anti turunan suatu fungsi?
3. Hitunglah integral berikut.
   $\int (2x + 3)(x^2 + 3x)^{20}\, dx$?
4. Hitunglah integral berikut:
   $\int x(x^2 - 2)^{100} dx$?

FASE DISKUSI KELAS (WAKTU : 50 MENIT)

1. Pilihlah soal nomor 1 dan 2 pada LKM-1, dan jelaskanlah bagaimana cara Anda menyelesaikan soal tersebut.
2. Pilihlah soal nomor 1 pada LKM-1, dan jelaskanlah bagaimana cara Anda menyelesaikan soal tersebut

LATIHAN (WAKTU: 10 MENIT)

1. Carilah suatu fungsi (anti turunan) yang turunannya adalah fungsi $f(x) = 7x^6 + 6x^2 - 8x + 15$

Untuk soal berikut pakailah rumus integral tak tentu untuk menyelesaikannya

2. $\int (2x - 7)dx$
3. $\int (6x^2 - 8x)dx$

TUGAS (DIKERJAKAN DI RUMAH)

Kerjakanlah soal berikut

1. $\int (5x^4 - 4x + 15)\, dx$
2. $\int (5x^2 + 1)(5x^3 + 3x - 2)^6\, dx$
3. $\int \frac{3x}{\sqrt{2x^2 + 5}}\, dx$
4. $\int (5x^2 + 1)(5x^3 + 3x - 8)\, dx$
5. $\int 3t\,(2t^2 - 1)^{1/3}\, dx$
6. $\int (x^5 - 2\sin x)dx$

LEMBAR KERJA

(LK- 2)

PENDAHULUAN LUAS

KALKULUS INTEGRAL BERBASIS MODEL APOS

NAMA KELOMPOK:

NAMA ANGGOTA:

1.
2.
3.
4.

FASE ORIENTASI (WAKTU 15 MENIT)

Pendahuluan Luas

Penjelasan tentang pendahuluan luas bisa dibaca di buku sumber Kalkulus Edisi kesembilan jilid I halaman 213. Masalah pencarian luas akan membawa kita kepada integral tentu. Kita mulai mendefinisikan luas sebuah segiempat sebagai panjang kali lebar, dan dari sini kita akan turunkan rumus-rumus untuk luas jajaran genjang hingga sebarang poligon. Silahkan ajukan pertanyaan bila ada yang belum tuntas di pahami.

FASE PRAKTIKUM (WAKTU 50 MENIT)

A. SIGMA

Laksanakanlah perintah Maple yang ada pada Tabel 1tentang SIGMA, dan Tabel 2 tentang Pendahuluan Luas. Salinlah jawaban Maple di tempat yang sudah disediakan. Selanjutnya diskusikanlah jawaban dari soal-soal yang telah disediakan. Selamat bekerja semoga sukses.

Tabel 1 Sigma

NO	Perintah MAPLE	Jawaban MAPLE
1	➢ **restart:** ➢ **Sum(i,i=1..10);** *# Perintah untuk menulis dalam lambang sigma (jumlah deret berhingga suku (10 suku pertama)* ➢ **value(%);** *# Perintah untuk mengetahui nilainya* ➢ **Sum(i, ii=1..10)=sum(i,i=1..10);** *# cara lain penulisan perintah dan hasil*	
2	➢ **Sum(i,i=1..n)=sum(i,i=1..n);**	
3	➢ **Sum(2*i,i=1..n)=sum(2*i, i=1..n);**	
4	➢ **2* Sum(2*i, i=1..n)= 2* sum(2*i, i=1..n);**	
5	➢ **Sum(i^2, i=1..n)= sum(i^2, i=1..n);**	
6	➢ **Sum(i^2 , i=1..4)= sum(i^2 , i=1..4);**	
7	➢ **Sum(i^3 , i=1..4)= sum(i^3 , i=1..4);**	
8	➢ **Sum(i^3 , i=1..n)= sum(i^3 , i=1..n);**	
9	➢ **Sum((i+1)*(i-1) , i=1..4)=sum((i+1)*(i-1) , i=1..4);**	

NO	Perintah MAPLE	Jawaban MAPLE
10	➢ **Sum((1+i)/(1+i^4),i=1..4)=sum((1+i)/(1+i^4),i=1..4);**	
11	➢ **Sum(1/k^2, k=1..infinity)=sum(1/k^2, k=1..infinity);** *#Deret tak hingga suku*	

B. Pendahuluan Luas

Tabel 2 Luas Poligon

NO	Perintah MAPLE	Jawaban Maple
	Luas menurut Poligon-Poligon Dalam (Kiri)	
1	➢ **restart; with(plots):** ➢ **with(student):** *#Perintah untuk mengosongkan memori; perintah agar grafik bisa dilukis; perintah agar luas poligon bisa dihitung dll* ➢ **f:=x->x^2; a:=0; b:=4; n:=2;** *#Perintah untuk menuliskan fungsi f(x) =* x^2 *, untuk a=0, b =4 dan banyak partisi n = 2* ➢ **leftbox(f(x),x=0..4,2);** *#Perintah untuk melukis luas daerah berdasarkan poligon kiri (poligon dalam) untuk a=0 dan b=4 dengan jumlah partisi n = 2* ➢ **Delta := (b-a)/n;** *#Perintah untuk menghitung lebar partisi* ➢ **x[k] := k*Delta;** *# Perintah untuk menentukan nilai fungsi dititik* x_k **/* ➢ **Sum(f(x[k])*Delta,k=0..(n-1)):%=simplify(value(%));** *# Perintah untuk menghitung jumlah luas masing-masing segi empat dalam bentuk lambang sigma, dan perintah untuk menghitung hasilnya untuk k=0 sampai k=(n-1)*/* ➢ **leftsum(f(x),x = a..b,n): Luas := evalf(%,10);** *# Perintah untuk menghitung luas`daerah berdasarkan jumlah luas poligon kiri), dan perintah untuk menampilkan hasilnya dalam bentuk bilangan desimal. */*	
2	➢ **g:=x->x^2; a:=0; b:=4; n:=4;** ➢ **leftbox(g(x),x=0..4,4);** ➢ **Delta := (b-a)/n;** ➢ **x[k] := k*Delta;** ➢ **Sum(g(x[k])*Delta,k=0..(n-1)):%=simplify(value(%));** ➢ **leftsum(g(x),x = a..b,n): Luas := evalf(%,10);**	
3	➢ **h:=x->x^2; a:=0; b:=4;n:=20;** ➢ **leftbox(h(x),x=0..4,20);** ➢ **Delta := (b-a)/n;** ➢ **x[k] := k*Delta;**	

NO	Perintah MAPLE	Jawaban Maple
	➢ **Sum(h(x[k])*Delta,k=0..(n-1)):% = simplify(value(%));** ➢ **leftsum(h(x),x = a..b,n): Luas := evalf(%,10);**	
4	➢ **j:=x->x^2; a:=0; b:=4; n:=400;** ➢ **leftbox(j(x),x=0..4,400);** ➢ **Delta := (b-a)/n;** ➢ **x[k] := k*Delta;** ➢ **Sum(j(x[k])*Delta,k=0..(n-1)): % = simplify(value(%));** ➢ **leftsum(j(x),x = a..b,n): Luas := evalf(%,10);**	
	Luas menurut Poligon-Poligon Luar (Kanan)	
5	➢ **restart; with(plots): with(student):** ➢ **f:=x->x^2; a:=0; b:=4; n:=2;** ➢ **rightbox(f(x),x=0..4,2);** *# Perintah untuk melukis luas daerah menggunakan poligon luar/dalam untuk a =0 dan b = 4, dan banyak partisi n = 2* ➢ **Delta := (b-a)/n;** ➢ **x[k] := a + k*Delta;** ➢ **Sum(f(x[k])*Delta,k=1..n): % = simplify(value(%));** ➢ **rightsum(f(x),x = a..b,n): Luas := evalf(%,10);**	
6	➢ **g:=x->x^2; a:=0; b:=4; n:=4;** ➢ **rightbox(g(x),x=0..4,4);** ➢ **Delta := (b-a)/n;** ➢ **x[k] := a + k*Delta;** ➢ **Sum(g(x[k])*Delta,k=(1..n)) : % = simplify(value(%));** ➢ **rightsum(g(x),x = a..b,n): Luas := evalf(%,10);**	
7	➢ **h:=x->x^2; a:=0; b:=4; n:=20;** ➢ **rightbox(h(x),x=0..4,20);** ➢ **Delta := (b-a)/n;** ➢ **x[k] := a + k*Delta;** ➢ **Sum(g(x[k])*Delta,k=1..n): % = simplify(value(%));** ➢ **rightsum(h(x),x = a..b,n): Luas := evalf(%,10);**	
8	➢ **j:=x->x^2; a:=0; b:=4; n:=400;** ➢ **rightbox(j(x),x=0..4,400);** ➢ **Delta := (b-a)/n;** ➢ **x[k] := a + k*Delta;** ➢ **Sum(g(x[k])*Delta,k=1..n): % = simplify(value(%));** ➢ **rightsum(j(x),x = a..b,n): Luas := evalf(%,10);**	

FASE DISKUSI KELOMPOK KECIL (WAKTU: 50 MENIT)

UNTUK TABEL 1

1. Salinlah kembali jawaban Maple untuk perintah no. 2 kemudian hitunglah berapa jumlahnya jika n = 6
2. Salinlah jawaban Maple untuk no. 5 kemudian hitunglah berapa jumlahnya jika n= 3

3. Salinlah jawaban Maple untuk no. 7 kemudian hitunglah berapa jumlahnya jika n = 3

UNTUK TABEL 2

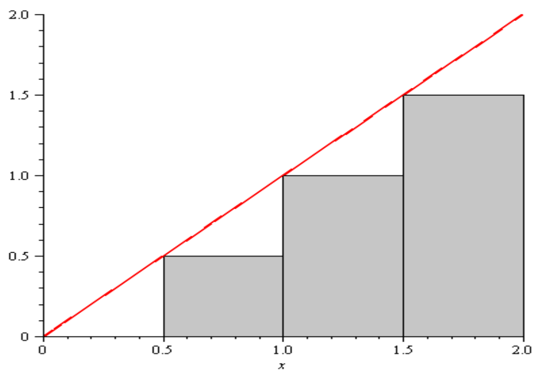
4. Amatilah dan salinlah gambar hasil jawaban Maple untuk perintah no. 1 kemudian hitunglah secara manual (tanpa bantuan komputer) berapa luas poligon yang berwarna hijau tersebut.
5. Amatilah dan salinlah gambar hasil jawaban Maple untuk perintah nomor 5 kemudian hitunglah secara manual (tanpa bantuan komputer) berapa luas poligon-poligon yang berwarna hijau tersebut.
6. Amatilah hasil perhitungan Anda untuk soal no. 4 dan 5 di atas, kemudian jelaskan dengan ringkas, di mana letak perbedaan perhitungannya.
7. Amatilah gambar jawaban Maple untuk nomor 1,2, 3 dan 4, amati juga hasil perhitungan luas poligon untuk masing-masing nomor tersebut. Jelaskanlah dengan ringkas kesimpulan apa yang dapat Anda peroleh dari gambar dan jumlah luas poligonnya.
8. Amatilah gambar jawaban Maple untuk nomor 5, 6, 7 dan 8, amati juga hasil perhitungan luas poligon untuk masing-masing nomor tersebut. Jelaskanlah dengan ringkas kesimpulan apa yang dapat Anda peroleh dari gambar dan jumlah luas poligonnya.
9. Kesimpulan apa yang Anda peroleh tentang luas poligon jika n sangat besar (mendekati tak hingga).

BAGIAN II

Kerjakan soal-soal berikut secara manual.

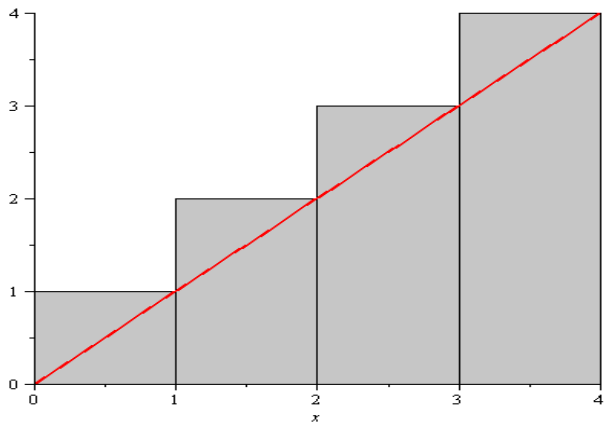
Tabel 1. Penghitungan Luas Daerah

1. Diketahui f(x) = x dengan a=0 dan b=2 , dan n=4 dan poligon-poligon seperti pada gambar 1 berikut. Hitunglah luas poligon-poligon dalam tersebut



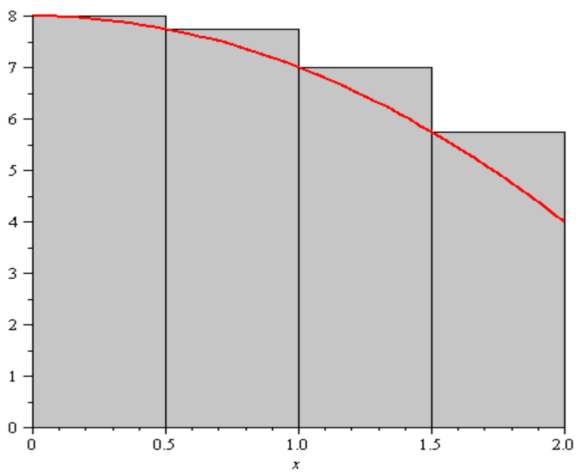
Gambar 1

2. Diketahui f(x) = x dengan a=0 dan b=2 , dan n=4 dan poligon-poligon seperti pada gambar 1 berikut. Hitunglah luas poligon-poligon dalam tersebut



Gambar 2

3. Diketahui f(x) =8- x^2 dengan a=0 dan b=2 , dan n=8 dan poligon-poligon seperti pada gambar 1 berikut. Hitunglah luas poligon-poligon luar tersebut.



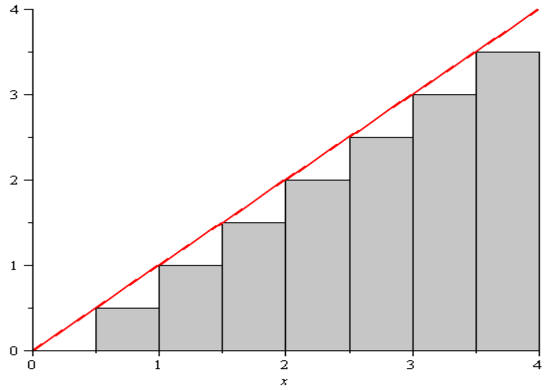
Gambar 3

FASE DISKUSI KELAS (WAKTU : 50 MENIT)

1. Jelaskanlah dengan ringkas untuk apa gunanya sigma pada penghitungan luas poligon!
2. Jelaskanlah dengan ringkas bagaimana caranya menghitung luas daerah dengan bantuan: Poligon Dalam (Kiri)!
3. Jelaskanlah dengan ringkas bagaimana caranya menghitung luas daerah dengan bantuan: Poligon Dalam (Kanan)!

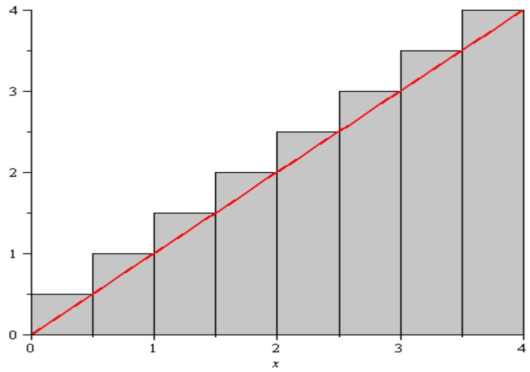
LATIHAN (WAKTU: 10 MENIT)

1. Diketahui f(x) = x dengan a= 0, dan b = 4, n = 8, dan poligon dalam seperti gambar 1 berikut. Hitunglah luas poligon dalam tersebut!



Gambar 1

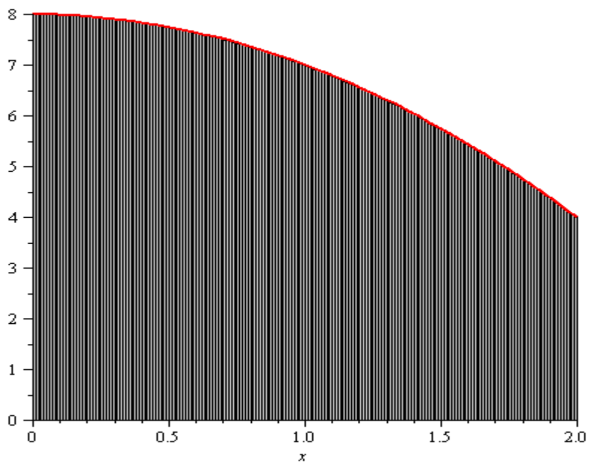
2. Diketahui f(x) = x dengan a= 0, dan b = 4, n = 8, dan poligon luar seperti gambar 2 berikut. Hitunglah luas poligon luar tersebut!



Gambar 2

TUGAS (DIKERJAKAN DI RUMAH)

1. Diketahui f(x) =8- x^2 dengan a=0 dan b=2 , dan n=200 dan poligon-poligon seperti pada gambar 3 berikut. Hitunglah luas poligon tersebut!



Gambar 3

2. Hitunglah luas daerah yang sesungguhnya untuk daerah di bawah fungsi $f(x) = 9 - x^2$ yang dibatasi oleh x= -3 dan x = 3, dengan bantuan poligon dalam!
3. Hitunglah luas daerah yang sesungguhnya untuk daerah di bawah fungsi $f(x) = 9 - x^2$ yang dibatasi oleh x= -3 dan x = 3, dengan bantuan poligon luar!
4. Hitunglah luas daerah di bawah fungsi $f(x) = 4x – x^2$, yang dibatasi oleh x = 0 dan x = 4 dan n = 4 menggunakan poligon dalam!
5. Hitunglah luas daerah di bawah fungsi $f(x) = 4x – x^2$, yang dibatasi oleh x = 0 dan x = 4 dan n = 4 menggunakan poligon luar!
6. Hitunglah luas daerah di bawah fungsi $f(x) = x^3 – x^2 – x + 4$, yang dibatasi oleh x = -1 dan x = 1 dan n mendekati tak hingga menggunakan poligon dalam!
7. Hitunglah luas daerah di bawah fungsi $f(x) = x^3 – x^2 – x + 4$, yang dibatasi oleh x = -1 dan x = 1 dan n mendekati tak hingga menggunakan poligon luar!

***** SELAMAT BELAJAR SEMOGA SUKSES *****

LEMBAR KERJA

(LK -3)

INTEGRAL TENTU

KALKULUS INTEGRAL BERBASIS MODEL APOS

NAMA KELOMPOK:

NAMA ANGGOTA:

1.

2.

3.

4.

FASE ORIENTASI (WAKTU: 15 MENIT)

Integral Tentu Sebagai Limit Jumlah Riemann dan Integral Tentu

Penguasaan materi tentang menghitung luas poligon sangat diperlukan sebelum melanjutkan materi berikut ini. Silahkan ajukan pertanyaan bila materi yang dikupas pada LK-2 belum tuntas dipahami. Pada integral tentu berhubungan dengan menghitung luas poligon di mana poligon-poligon tersebut yang menjadi Riemann dengan menghitung jumlah dari Riemann merupakan integral tentu.

Jumlah Riemann: $R_p = \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i)\Delta x_i}$

Untuk lebih jelas tentang Integral Tentu bisa dibaca pada buku sumber utama Kalkulus Edisi Sembilan Jilid I halaman 221-229.

FASE PRAKTIKUM (WAKTU 50 MENIT)

A. Integral Tentu Sebagai Limit Jumlah Riemann

Berikut ini adalah perintah Maple untuk menghitung luas daerah dengan cara menghitung jumlah Riemann. Kerjakanlah perintah Maple berikut, kemudian salinlah hasil eksekusi perintah Maple ke tempat yang telah disediakan pada Tabel 1 tentang Jumlah Riemann dan Tabel 2 tentang Integral Tentu. Kemudian diskusikanlah jawaban dari pertanyaan-pertanyaan yang sudah disediakan.

Tabel 1. Menghitung Jumlah Riemann dan Limitnya

NO	Perintah MAPLE	Jawaban MAPLE
1	➢ **restart; with(plots): with(student):** ➢ **f:=x->x^3-4*x^2 +2*x + 7;** ➢ **x_1:=0.5; x_2:=1.5; x_3:=2.5; x_4:=3.6; x_5:=5;** *# menuliskan titik-titik sampel yang diketahui atau diberikan* ➢ **Delta1:=(1.1-0);Delta2:=(2-1.1); Delta3:=(3.2-2); Delta4:=(4-3.2); Delta5:=(5-4);** *# mencari delta selang partisi di mana diketahui P:0<1,1<2<3,2<4<5* ➢ **JumlahRiemann:=(f(x1)*Delta1+f(x2)*Delta2+f(x3)* Delta3+ f(x4)*Delta4+f(x5)*Delta5);** *# menentukan jumlah Riemann dari fungsi yang dimaksud*	
2	➢ **f:=x->x - 3;** ➢ **x_1:=3; x_2:=4; x_3:=4.75; x_4:=6; x_5:=6.5;** *# diketahuititik sampel x_1=3; x_2=4; x_3=4.75; x_4=6; x_5=6.5* ➢ **Delta1:=(3.75-3);Delta2:=(4.25-3.75);Delta3:=(5.5-4.25); Delta4:=(6-5.5); Delta5:=(7-6);** *# Diketahui P:3<3,75<4,25<5,5<6<7*	

NO	Perintah MAPLE	Jawaban MAPLE
	➢ **JumlahRiemann:=(f(x1)*Delta1+f(x2)*Delta2+f(x3)*Delta3+ f(x4)*Delta4+f(x5)*Delta5);** ➢ **Sum(f(x[k])*Delta,k=1..n): % = simplify(value(%));** *# perintah untuk menghitung jumlah luas masing-masing segi empat dalam bentuk lambang sigma, dan perintah untuk menghitung hasilnya untuk k=1..n* ➢ **Limit(%%,n = infinity): %= evalf(value(%));** *# perintah untuk menghitung limit n menuju ∞ , dan perintah untuk menampilkan hasil perhitungan limitnya.*	
3	➢ **g:= x -> 2*x^2-8; a:= -1; b:=3;** ➢ **middlebox(g(x),x= -1..3,8);** ➢ **Delta := (b-a)/n;** ➢ **x[k] := a + k*Delta;** ➢ **Sum(g(x[k])*Delta,k=1..n): % = simplify(value(%));** ➢ **Limit(%%,n = infinity): %= evalf(value(%));**	
4	➢ **h:= x -> x^3-10*x^2+20*x+10; a:= -1; b:=5 ;** ➢ **middlebox(h(x),x= -1..5,12);** ➢ **Delta := (b-a)/n;** ➢ **x[k] := a + k*Delta;** ➢ **Sum(h(x[k])*Delta,k=1..n): % = simplify(value(%));** ➢ **Limit(%%,n = infinity): %= evalf(value(%));**	

B. INTEGRAL TENTU

Berikut ini adalah perintah Maple untuk menghitung Integral Tentu.

Tabel 2. Integral Tentu

NO	Perintah MAPLE	Jawaban MAPLE
1	➢ **restart; with(Student[Calculus1]):** ➢ **f:=x->-x^2+4; a:= -1; b:=3;** ➢ **RiemannSum(f(x), x= -1..3, method = midpoint, output = animation);** # Perintah untuk membuat grafik dari Jumlah Riemann, dengan titik sampel adalah titik tengah. Keluaran dari perintah tersebut adalah animasi grafik untuk beberapa harga n. # untuk menyaksikan animasinya klik gambar yang Anda peroleh, ganti nilai FPS=1, klik panah untuk mulai. ➢ **Int(f(x),x= -1..3)=int(f(x),x= -1..3);** # perintah untuk menghitung jumlah Riemann dan hasilnya.	

NO	Perintah MAPLE	Jawaban MAPLE
	➢ **Int(f(x),x= -1..3)=evalf(int(f(x),x= -1..3));** # perintah untuk menghitung jumlah Riemann dan hasilnya.	
2	➢ **g:= x -> 2*x^2-8; a:= -1; b:=3;** ➢ **RiemannSum(g(x), x= -1..3, method = midpoint, output = animation);** ➢ **Int(g(x),x= -1..3)=int(g(x),x= -1..3);** ➢ **Int(g(x),x= -1..3)=evalf(int(g(x),x= -1..3));**	
3	➢ **h:= x -> x^3-10*x^2+20*x+10; a:= -1; b:=5 ;** ➢ **RiemannSum(h(x), x= -1..5, method = midpoint, output = animation);** ➢ **Int(h(x),x= -1..5)=int(h(x),x= -1..5);** ➢ **Int(h(x),x= -1..5)=evalf(int(h(x),x= -1..5));**	
4	➢ **Int(a*f(x)+b*g(x),x= -1..3) : % = value(%);** ➢ **a*Int(f(x),x= -1..3)+b*Int(g(x),x= -1..3) : % = value(%);**	
5	➢ **Int(a*g(x)-b*h(x),x=0..10) : % = value(%);** ➢ **a*Int(g(x),x=0..10)-b*Int(h(x),x=0..10) : % = value(%);**	

FASE DISKUSI KELOMPOK KECIL (WAKTU: 50 MENIT)

DISKUSIKANLAH

UNTUK TABEL 1

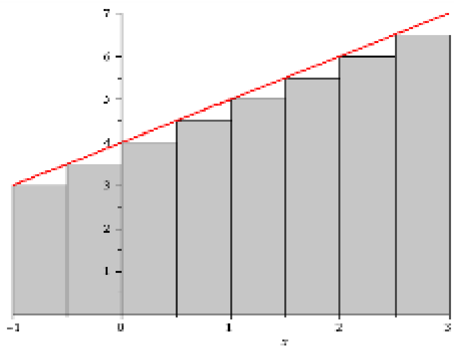
Jawablah pertanyaan berikut

1. Perhatikanlah jawaban Maple untuk perintah no 1 dan 2.
   a) Jelaskanlah dengan ringkas bagaimana caranya menghitung luas poligon menggunakan Riemann?
   b) Kapan hasilnya bernilai negatif?
2. Perhatikanlah jawaban Maple untuk perintah no 3, 4 dan 5 pada Tabel 1 di atas. Titik apa yang menjadi titik sampel pada masing-masing poligon?
3. Salinlah jawaban Maple untuk gambar fungsi g pada perintah 4 kemudian lakukanlah penghitungan luas poligon tersebut secara manual. (ikutilah langkah Maple tsb untuk menghitungnya).
4. Kembali pada jawaban Maple untuk perintah 3, 4 dan 5, bagaimanakah caranya menentukan lebar partisi untuk masing-masing gambar? Berikan contoh untuk fungsi g pada perintah no 4.
5. Jika x_0 = a, dan x_n = b, delta = (b – a)/n. Tentukanlah $x_1, x_2, \ldots$ dan x_k untuk fungsi g pada perintah no 4
6. Berdasarkan jawaban pada Tabel 1, untuk kegiatan 3, 4 dan 5, terdapat perintah Sum... untuk apa perintah Sum … itu ? Jelaskanlah dengan ringkas mengapa diperlukan perintah Sum …?

7. Kembali pada perintah 3, 4 dan 5 Tabel 1, jelaskanlah dengan ringkas, mengapa ada perintah Limit(%%,n = infinity): %= evalf(value(%));... ?
8. Jelaskanlah dengan ringkas, kapan hasil jumlah Riemann adalah luas daerah yang sebenarnya (luas daerah di bawah fungsi f yang dibatasi oleh x = a, dan x = b)? Lengkapi dengan contoh
9. Perhatikanlah gambar fungsi f, g dan h baik-baik. Bandingkanlah daerah yang berada di atas sumbu x dan daerah yang berada di bawah sumbu x untuk masing-masing gambar. Jelaskanlah dengan ringkas, mengapa jumlah Riemannnya bernilai negatif pada suatu fungsi?

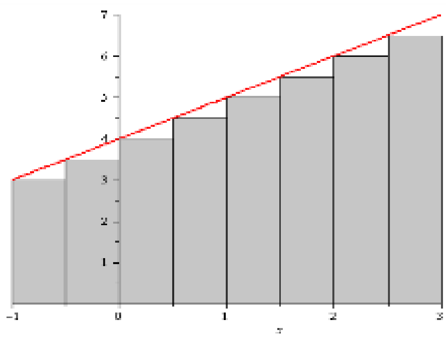
UNTUK TABEL 2

10. Perhatikanlah kembali jawaban Maple untuk perintah 3,4 dan 5 pada Tabel 1. Kemudian perhatikan pula jawaban Maple untuk fungsi yang sama pada Tabel 2, jelaskanlah dengan ringkas, apa yang dapat Anda simpulkan?
11. Salinlah kembali hasil akhir perintah 3,4 dan 5 pada Tabel 1 dan samakan dengan penulisan menggunakan lambang integral seperti pada Tabel 2 untuk fungsi yang bersesuaian, disertai hasil perhitungannya.
12. Hitunglah jumlah Riemann dari daerah yang dibatasi oleh f(x) = x +4, a= -1 dan b = 3, n = 8 seperti pada Gambar 1 berikut



Gambar 1

Hitunglah jumlah Riemann dari daerah yang dibatasi oleh f(x) = x +4, a= -1 dan b = 3, n = 8 seperti pada Gambar 1 berikut. Hitunglah jumlah Riemann dari soal no 1di atas bila n = 8 diganti dengan n = ∞



Gambar 2

FASE DISKUSI KELAS (WAKTU : 50 MENIT)

1. Jelaskanlah dengan ringkas tentang jumlah Riemann dan limit jumlah Riemann, dengan mengambil contoh soal pada fase diskusi kelompok kecil!
2. Jelaskanlah dengan ringkas kapan jumlah Riemann bernilai negatif!

LATIHAN (WAKTU: 10 MENIT)

1. Hitunglah integral berikut. $\int_0^2 (x^2 + 1)$ dx
2. Lukislah gambar fungsi f(x) = x^2 +1 dengan batas x1 = 0 dan x2 = 2
3. Bagilah daerah yang terbentuk untuk n=8 dengan titik sampel adalah titik tengah. Kemudian hitunglah jumlah Riemannnya.
4. Ganti nilai n = ∞ dan hitunglah jumlah Riemannnya secara manual. Cocokkan hasil yang Anda peroleh dengan jawaban soal nomor 1.

TUGAS (DIKERJAKAN DI RUMAH)

1. f(x)= 4x^3 + 1; [0,3] dibagi menjadi enam selang bagian yang sama (n=6). Titik sampelnya adalah titik ujung kanan. Hitunglah daerah yang terbentuk menggunakan jumlah Riemann!
2. Untuk soal no 5 ganti nilai n = ∞ dan hitunglah jumlah Riemannnya secara manual. Cocokkan hasil yang Anda peroleh dengan cara menggunakan penghitungan integral tertentu!

LEMBAR KERJA

(LK- 4)

TEOREMA DASAR KALKULUS

KALKULUS INTEGRAL BERBASIS MODEL APOS

NAMA KELOMPOK:

NAMA ANGGOTA:

1.
2.
3.
4.

FASE ORIENTASI (WAKTU 15 MENIT)

Teorema Dasar Kalkulus

Teorema dasar kalkulus 1:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

Misal: $\frac{d}{dx}\int_x^{x^2} f(t)dt = \frac{d}{dx}\int_x^{0} f(t)dt + \frac{d}{dx}\int_0^{x^2} f(t)dt$

$$= \frac{d}{dx}\int_0^{x} -f(t)dt + \frac{d}{dx}\int_0^{x^2} f(t)dt$$

Teorema dasar kalkulus 2:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Teorema C

$$m(b\text{-}a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

Kalkulus adalah studi tentang limit. Dua limit terpenting adalah turunan dan integral tentu. Dua jenis limit ini memiliki dua kaitan yang erat yang akan kita pelajaran dalam subbab ini. Silahkan ajukan pertanyaan bila ada materi yang sukar dipahami.

Untuk lebih jelas tentang teorema dasar kalkulus dapat dibaca pada buku Kalkulus edisi kesembilan jilid I halaman 229.

FASE PRAKTIKUM (WAKTU 50 MENIT)

A. Sifat Penambahan Selang

Laksanakanlah perintah Maple yang ada pada Tabel 1 tentang Sifat Penambahan Selang, Tabel 2 tentang Teorema Dasar Kalkulus, dan Tabel 3 tentang Sifat Keterbatasan Kemudian salinlah jawaban Maple di tempat yang sudah disediakan pada tabel-tabel yang bersesuaian, serta diskusikanlah jawaban dari pertanyaan-pertanyaan yang sudah disediakan.

Tabel 1. Sifat Penambahan Selang

NO	Perintah Maple	Jawaban Maple
1	➢ **restart; with(plots): with(student):** ➢ **f:=x->x^2;** ➢ **Int(f(x),x=1..6) = int(f(x),x = 1..6);** ➢ **Int(f(x),x=1..3) = int(f(x),x = 1..3);**	

NO	Perintah Maple	Jawaban Maple
	➢ **Int(f(x),x=3..6) = int(f(x),x = 3..6);** ➢ **Int(f(x),x=1..3) + Int(f(x),x=3..6) = int(f(x), x = 1..3) + int(f(x),x = 3..6);** ➢ **Int(f(x),x=1..3) + Int(f(x),x=3..6) = int(f(x), x = 1..3) + int(f(x),x = 3..6);**	
2	➢ **f:=x->5*x^2 + x;** ➢ **middlebox(f(x), x= -2..2, 400);** ➢ **Int(f(x),x= -2..2) = int(f(x),x = -2..2);** ➢ **Int(f(x),x= -2..0) = int(f(x),x = -2..0);** ➢ **Int(f(x),x=0..2) = int(f(x),x = 0..2);** ➢ **Int(f(x),x= -2..0) + Int(f(x),x=0..2) = int(f(x),x = -2..0) + int(f(x),x = 0..2);**	
3	➢ **P:=piecewise(0<=x<1,2*x, 1<x<=2,2,2<x<=5,x);** ➢ **P1:=middlebox(piecewise(0<=x<1,2*x, 1<x<=2,2,2<x<=5,x),x=0..5,200);** ➢ **P2:=Int(2*x, x=0..1) + Int(2,x=1..2) + Int(x,x=2..5);** ➢ **P3:=int(2*x, x=0..1) + int(2,x=1..2) + int(x,x=2..5);** ➢ **P2=P1;**	

B. Teorema Dasar Kalkulus

Tabel 2. Teorema Dasar Kalkulus

NO	Perintah Maple	Jawaban Maple
	Teorema Dasar Kalkulus Pertama	
1	➢ **restart: with(student):with(plots):** ➢ **f := t -> t^2-10*t+25;** ➢ **F := x -> int(f(t),t=0..x);** ➢ **F(x);** ➢ **Diff(int(f(t),t=0..x),x)=diff(F(x),x);**	
2	➢ **f:=t-> t^3;** ➢ **F := x -> int(f(t),t=1..x);** ➢ **F(x);** ➢ **Diff(int(f(t),t=0..x),x)=diff(F(x),x);**	
3	➢ **f:=t->3*t - 4;** ➢ **F := x -> int(f(t),t=1..x^2);** ➢ **F(x);** ➢ **Diff(int(f(t),t=0..x),x)=diff(F(x),x);** ➢ **factor(%);**	
4	➢ **f:=t->t^5;** ➢ **F := x -> int(f(t),t=cos(x)..sin(x));** ➢ **F(x);** ➢ **Diff(int(f(t),t=0..x),x)=diff(F(x),x);**	

NO	Perintah Maple	Jawaban Maple
	Teorema Dasar Kalkulus Kedua	
5	➢ **f:=x->k;** ➢ **Int(f(x),x=a..b) = int(f(x),x = a..b);**	
6	➢ **f:=x->x;** ➢ **Int(k*f(x),x=a..b) = int(k*f(x), x = a..b);** ➢ **k*Int(f(x),x=a..b) =k* int(f(x), x = a..b);**	
7	➢ **f:=x->x^2;** ➢ **g:=x->x^2 + x;** ➢ **Int(f(x),x=1..6) + Int(g(x),x=1..6) =** ➢ **int(f(x),x = 1..6) + int(g(x), x = 1..6);** ➢ **Int(f(x)+g(x),x=1..6)=** **int(f(x)+g(x),x=1..6);**	
8	➢ **f:=x->x^2;** ➢ **g:=x->x^2 + x;** ➢ **Int(f(x),x=1..6) - Int(g(x),x=1..6) =** ➢ **int(f(x),x = 1..6) - int(g(x),x = 1..6);** ➢ **Int(f(x)-g(x),x=1..6)=int(f(x)g(x),x=1..6);**	

C. Sifat Keterbatasan & Teorema Nilai Rata

NO	Perintah Maple	Jawaban Maple
	Sifat Keterbatasan	
9	➢ **restart; with(student):** ➢ **g := x -> x^2+3;** ➢ **minimize(g(x),x=1..3); m:=evalf(%);** ➢ **maximize(g(x),x=1..3); M:=evalf(%);** ➢ **plot({g(x),m,M},x=1..3,y=0..10);** ➢ **a:=1;b:=3;** ➢ **Int(m,x=a..b): % = value(%);** ➢ **Int(g(x),x=a..b): % = evalf(value(%));** ➢ **Int(M,x=a..b): % = value(%);**	
	Teorema Nilai Rata	
10	➢ **f:=t -> t^2;** ➢ **Int(f(t), t=1..3);** ➢ **int(f(t), t=1..3);** ➢ **f(c)= int(f(t), t=1..3)/(3-1);**	

FASE DISKUSI KELOMPOK KECIL (WAKTU: 50 MENIT)

Diskusikanlah

UNTUK TABEL 1

1. Amatilah jawaban MAPLE untuk perintah no 1 dan no 2 pada Tabel 1. Kemudian jelaskanlah dengan ringkas kesimpulan yang Anda peroleh!

UNTUK TABEL 2

2. Amatilah jawaban MAPLE pada Tabel 2 di atas. Jelaskanlah dengan ringkas kesimpulan apa yang Anda peroleh!
3. Amatilah jawaban MAPLE untuk perintah nomor 3 dan 4 pada Tabel 2 di atas kemudian jelaskanlah bagaimana caranya mendapatkan jawaban tersebut secara manual!
4. Untuk perintah no 5–8 pada Tabel 2 Jelaskanlah sifat-sifat apa saja yang dapat Anda temukan?

UNTUK TABEL 3

5. Jelaskanlah dengan ringkas, kesimpulan apa yang Anda peroleh dari Tabel 3 di atas tentang g(x), m, dan M. Kemudian lakukanlah penghitungan secara manual untuk mendapatkan g(x), m, dan M!

Hitunglah secara manual

NO	SOAL / JAWAB
1	$\int_0^1 f(x)dx = 2, \int_1^2 f(x)dx = 3$, **Hitunglah** $\int_0^2 5\, f(x)dx$
2	**G(x) =** $\int_0^x (2t^2 + t)\, dt$ **, Hitunglah G'(x)**
3	**Hitunglah** $\int_1^4 (3x^2 - 2x + 3)\, dx$

FASE DISKUSI KELAS (WAKTU : 50 MENIT)

1. Jelaskanlah dan berikan contoh tentang sifat penambahan selang!
2. Jelaskanlah tentang Teorema Dasar Kalkulus Pertama!
3. Jelaskanlah tentang Teorema Dasar Kalkulus Kedua!
4. Jelaskanlah tentang sifat-sifat keterbatasan dan sifat lainnya!

LATIHAN DAN EVALUASI (WAKTU: 10 MENIT)

SOAL
Hitunglah

1. $\int_1^4 (4x^3 - 2x + 3)\, dx$
2. $\int_1^4 (x^4 - 8)/(x - 2)\, dx$

TUGAS (DIKERJAKAN DI RUMAH)

1. $\int_0^2 (4x^3 - 2x\text{^}2 + 1)\, dx$
2. $\int_0^{\pi/2} (3x^2 + sinx)\, dx$
3. $\int_0^1 (x^3 + 1)\text{^}10(\, 3x\text{^}2)\, dx$

Carilah G’(x) jika

4. G(x) = $\int_1^x 5t\, dt$
5. G(x) = $\int_1^{x\text{^}2} sin\ t\, dt$
6. G(x) = $\int_{cos\ x}^{sin\ x} (3t^4)\, dt$

Gunakanlah Sifat Penambahan Selang dan kelinieran untuk menghitung $\int_0^4 f(x)\, dx$
Mulailah dengan menggambar grafik f.

7. f(x)=$\begin{cases} (\text{x}) = 2\ jika\ 0 \le x < 2 \\ x\ jika\ 2 \le x \le 4 \end{cases}$

8. f(x)=$\begin{cases} 1\ jika\ 0 \le x < 1 \\ x^2\ jika\ 1 \le x < 2 \\ 4 - x\ jika\ 2 \le x \le 4 \end{cases}$

*****SELAMAT BEKERJA SEMOGA SUKSES *****

BAB III
PENERAPAN INTEGRAL

Kita telah jauh mengkaji tentang integral di lembar kerja sebelumnya. Pembahasan singkat tentang luas sebelumnya diperlukan untuk memberi dasar tentang definisi integral tentu. Sekarang setelah konsep benar-benar kita pahami, kita gunakan integral tentu untuk menghitung luas daerah yang bentuknya lebih rumit. Dan semuanya lengkap ada di LK-5 Luas daerah.

Tidaklah mengherankan jika integral tentu dapat digunakan untuk menghitung luas; integral tentu diciptakan untuk itu. Namun integral tentu telah berkembang jauh, banyak besaran yang dapat diaproksimasi dengan dipotong kecil, maka dengan begini kita bisa menghitung volume dengan metode yang disebut metode cakram dan cincin. Dan perihal inilah yang akan menjadi bahasan utama dalam LK-6 Perhitungan Volume

Selanjutnya, pada LK-7 V. Benda Putar Kulit Tabung masih berkutat tentang perhitungan volume namun menggunakan metode lain. Yang untuk banyak kasus, dianggap lebih mudah diterapkan ketimbang metode lain, yaitu metode Kulit Tabung

Pada bab ini, hanya terdapat 3 Lembar kerja seperti yang sudah dijelaskan di atas, yaitu tentang luas daerah dan perhitungan volume benda putar dengan metode cakram, cincin dan kulit tabung. Tingkat kesulitan materi ini lebih tinggi dari materi sebelumnya jadi dibutuhkan keimanan dan keuletan, juga diperlukan banyak membaca buku sumber yaitu Kalkulus edisi kesembilan Jilid I. malu bertanya sesat dijalan, jadi jika ada hal yang mengganjal tentang kalkulus integral ini segera tanyakan pada yang lebih ahli seperti dosen dan/atau professor Anda.

LEMBAR KERJA

(LK-5)

LUAS DAERAH

KALKULUS INTEGRAL

BERBASIS

MODEL APOS

NAMA KELOMPOK:

NAMA ANGGOTA:

1.

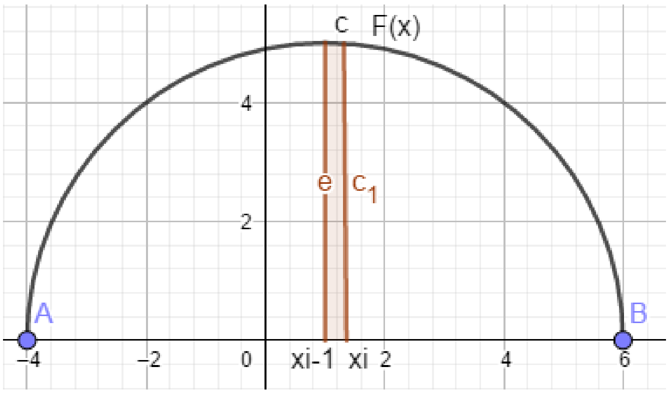
2.

3.

4.

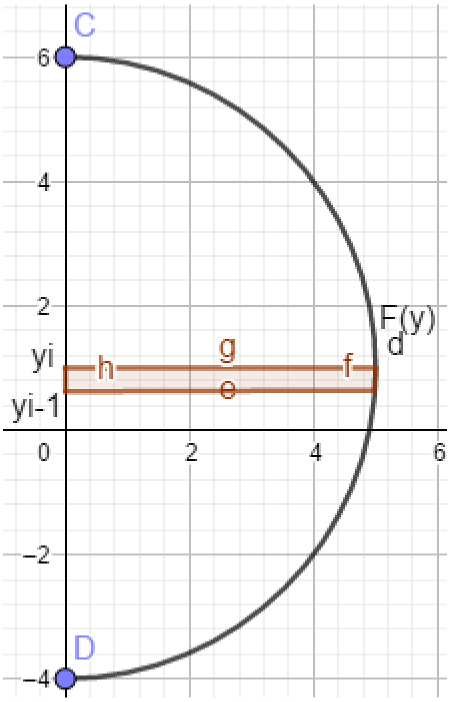
FASE ORIENTASI (WAKTU: 15 MENIT)

Luas Daerah Bidang Rata



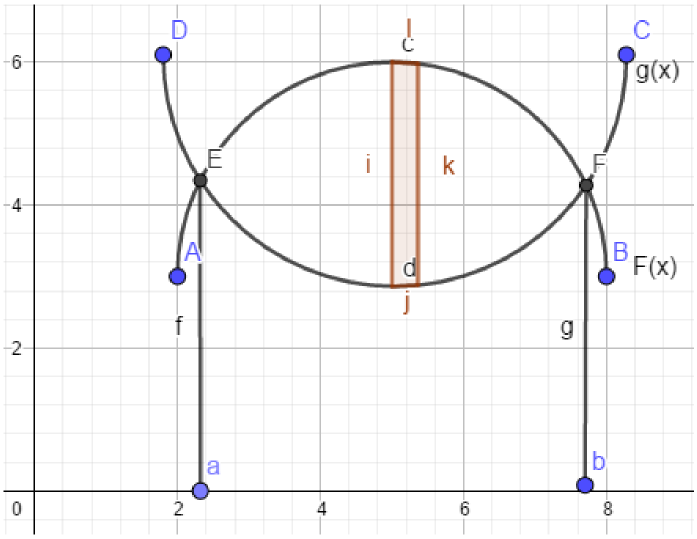
Luas Sekeping ≈ $F(xi)\Delta xi$

Luas Daerah Seluruhnya = $\int_a^b F(x)dx$



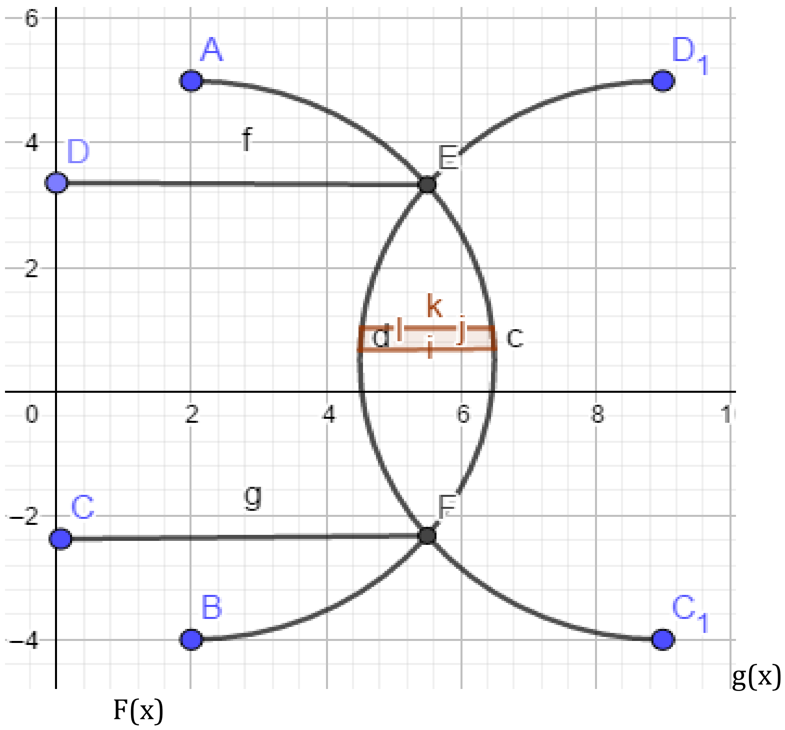
Luas Sekeping ≈ $F(yi)\Delta yi$

Luas Daerah Seluruhnya = $\int_d^c F(y)dy$



Luas Sekeping = luas F(xi)$\Delta xi - luas\ g(xi)\Delta xi$

Luas Daerah yang Terarsir = $\int_a^b F(x)dx - \int_a^b g(x)dx$



Luas Sekeping = luas F(yi)$\Delta yi - luas\ g(yi)\Delta yi$

Luas Daerah yang Terarsir = $\int_a^b F(y)dy - \int_a^b g(y)dy$

Menghitung luas daerah pada pokok bahasan ini merupakan bentuk aplikasi dari penggunaan integral dalam kehidupan sehari-hari. Materi ini menuntut ketuntasan pemahaman materi yang lalu tentang integral tentu. Silahkan ajukan pertanyaan bila ada materi yang lalu belum tuntas dipahami.

Penjelasan tentang Luas Daerah Bidang Datar bisa dibaca pada buku sumber utama Kalkulus Edisi Sembilan Jilid I halaman 230.

FASE PRAKTIKUM (WAKTU 50 MENIT)

Berikut ini adalah perintah untuk menghitung luas daerah di bawah fungsi f(x) pada interval [a,b], dan luas daerah di antara dua kurva. Laksanakanlah perintah Maple yang ada pada Tabel 1berikut ini tentang Luas Daerah Bidang Rata. Salinlah jawaban Maple pada kolom yang telah disediakan, atau di kertas tersendiri.

Tabel 1. Luas Daerah Bidang Rata

NO	Perintah Maple	Jawaban Maple
1	➢ **restart; with(plots): with(student):** ➢ **f:=x-> 5*x - x^2;** ➢ **middlebox(f(x),x=0..3, 400);** *# perintah untuk melukis daerah yang dibatasi f(x) dan sumbu x untuk x = 0 sampai x = 3 dengan n=400.* ➢ **Luas:= Int(f(x), x=0..3)=int(f(x), x=0..3);** # perintah untuk menghitung luas daerah yang dbatasi f(x) dan sumbu x untuk x = 0 sampai x = 3	
2	➢ **f:=x-> ((x^2)/4) – 2;** ➢ **middlebox(f(x),x=-2..2, 400);** ➢ **Luas:= - Int(f(x), x=-2..2)= -int(f(x), x=-2..2);** # Nilai negatif di depan Int dan int diberikan kalau daerah yang akan dihitung luasnya berada di bawah sumbu x (dapat diketahui dari gambar)	
3	➢ **f:=x-> ((x^2)/4) – 4;** ➢ **middlebox(f(x),x=-6..6, 400);** ➢ **Luas:= Int(f(x), x=-6..-4) - Int(f(x), x=-4..4) + Int(f(x), x=4..6)= int(f(x), x=-6..-4)- int(f(x), x=-4..4)+ int(f(x), x=4..6);** ➢ **Luas:= Int(|f(x)|, x=-6..6)= int(|f(x)|, x=-6..6);** ➢ **Luas:= Int(abs(f(x)),x=-6..6): % = evalf(value(%));**	
4	➢ **f:=x-> x^3 – 3*x^2 - x + 3;** ➢ **middlebox(f(x),x=0..2, 400);** ➢ **Luas:= Int(f(x), x=0..1) - Int(f(x), x=1..2) =int(f(x), x=0..1) - int(f(x), x=1..2);** ➢ **Luas:= Int(|f(x)|, x=0..2)= int(|f(x)|, x=0..2);** ➢ **Luas :=Int(abs(f(x)),x=0..2): % = evalf(value(%));**	

LUAS DAERAH DI ANTARA DUA KURVA

5
- **f1 := *x* -> x^2;**
- **f2 := *x* -> 2*x-x^2;**
- **plot([f1(x),f2(x)],x=-1..1.5, color=[red,blue],legend=["y=x^2","y=2x-x^2"]);**
  # perintah untuk melukis kedua grafik pada bidang yang sama
- **titikpot := evalf(solve(f1(x)=f2(x),x));**
  # perintah untuk mencari titik potong kedua grafik
- **Luas := int(f2(x)-f1(x) ,x=titikpot[1].. titikpot[2]);**
  # perintah untuk menghitung luas daerah di antara dua fungsi dengan batas titik potong fungsi.

6
- **f1 := *x* -> x^2+ 2*x +1;**
- **f2 := *x* -> -x^2+4;**
- **plot([f1(x),f2(x)],x=-2..2,color=[red,blue], legend=["f1= x^2+ 2*x +1","f2=-x^2-4"]);**
- **titikpot := evalf(solve(f1(x)=f2(x),x));**
- **Luas:=Int(f2(x)-f1(x),x=titikpot[1]..titikpot[2])= int(f2(x)-f1(x, x=titikpot[2] ..titikpot[1]);**

7
- **f1 := *x* -> x + 4;**
- **f2 := *x* -> x^2 - 4;**
- **plot([f1(x),f2(x)],x=-5..5,color=[red,blue], legend=["y=x + 4)","y=x^2 - 4"]);**
- **titikpot := evalf(solve(f1(x)=f2(x),x));**
- **Luas:=Int(f1(x)-f2(x),x=titikpot[1]..titikpot[2])=int(f1(x)-f2(x), x=titikpot[1] ..titikpot[2]);**

Bekerja Pada Sumbu Y

8
- **with(plots):**
- **Gb1 := implicitplot(y^2=3*x+7, x=-3..10,y=-3..8,color=red):**
- **Gb2:= plot(x-2,x=-3..10,color=blue):plots[display] ({Gb1,Gb2});**
  # Keterangan:
  Perintah plots[display](); digunakan untuk menampilkan beberapa grafik yang
  dihasilkan dari perintah yang berbeda dalam satu bidang gambar. Terlihat bahwa $y^2 = 3x+ 7$ berbeda dengan $y = x-2$. Untuk menyelesaikan kasus tersebut maka $y^2 = 3x+ 7$ di ubah menjadi $x=y^2 - 7$, dan $y=x -2$ diubah menjadi $x=y + 2$
- **f1 := y -> (y^2-7)/3;**

	➢	**f2 := y -> y+2;** *# f1 dan f2 dalam variabel y*
	➢	**titikpot := evalf(solve(f1(y)=f2(y),y));** *# titik potong antara f1 dan f2*
	➢	**Luas := Int(f2(y)-f1(y),y=titikpot[2].. titikpot[1])=int(f2(y)-f1(y),y=titikpot[2]..titikpot[1]);** *# Luas daerah antara f1 dan f2*
9	➢	**Gb1 := implicitplot(y^2 + x =3, x=-2..5, y=-3..5,color=red):**
	➢	**Gb2 := plot(x-1, x=-2..5,color=blue): plots[display]({Gb1,Gb2});**
	➢	**f1 := y -> 3 – y^2;**
	➢	**f2 := y -> y+1;**
	➢	**titikpot:= evalf(solve(f1(y)=f2(y),y));**
	➢	**Luas:=Int(f1(y)-f2(y),y =titikpot[1].. titikpot[2])=int(f1(y)-f2(y), y=titikpot[1]..titikpot[2])**
10	➢	**Gb1 := implicitplot(y^2=x+2*y, x=-10..10,y=-10..10,color=red):**
	➢	**Gb2 := plot(x-4,x=-10..10,color=blue): plots[display]({Gb1,Gb2});**
	➢	**f1 := y -> (y^2)-2*y;**
	➢	**f2 := y -> y+4;**
	➢	**titikpot := evalf(solve(f1(y)=f2(y),y));**
	➢	**Luas := Int(f1(y)-f2(y),y=titikpot[1]..titikpot[2])= int(f1(y)-f2(y),y=titikpot[1]..titikpot[2]);**
		Jarak dan Perpindahan
11	➢	**v:=t-> 3*t^2 -24*t +36;** # Kecepatan benda yang bergerak pada suatu garis lurus pada saat t
	➢	**Int(v(t), t = -1..9)=int(v(t), t=-1..9);** # Cara menghitung perpindahan dan jarak total yang ditempuh benda itu untuk -1 <= t< =9

FASE DISKUSI KELOMPOK KECIL (WAKTU: 50 MENIT)

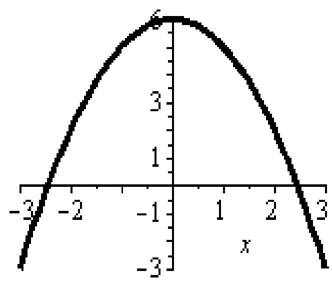
DISKUSIKANLAH

Perhatikanlah jawaban Maple pada Tabel 1 di atas, kemudian jawablah pertanyaan berikut:

1. Jawablah dengan ringkas, apakah pernah luas daerah bernilai negatif?
2. Salinlah gambar jawaban Maple untuk perintah no 1 pada Tabel 1, kemudian buatlah irisan satu keping berupa poligon vertikal pada daerah R yang

terbentuk. Kemudian buatlah rumus untuk menghitung luas satu keping poligon tersebut?

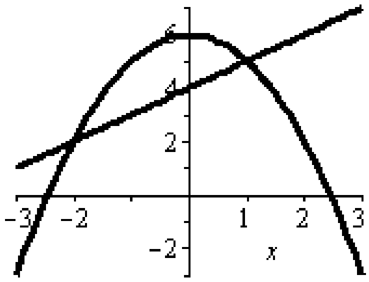
3. Jika banyak irisan/poligon ($n = \infty$), buatlah rumus untuk menghitung luas daerah R sebagai jumlah luas irisan-irisannya! (Gunakan pengetahuan Anda untuk menjawabnya).
4. Ubahlah rumus yang Anda buat pada soal no 3 kedalam lambang integral. Kemudian hitunglah luas daerah R tersebut!
5. Untuk perintah no 1-no 4 pada Tabel 1 di atas, jika dalam penghitungan luas daerah, nilai yang Anda peroleh adalah negatif, maka a) tentukanlah kemungkinan penyebabnya, b) kemudian apa yang akan Anda lakukan untuk memperbaiki nilai negatif tersebut?
6. Untuk perintah no 5–no 7 pada Tabel 1 di atas. Pilihlah salah satu perintah yang Anda sukai antara perintah no 5, no 6, dan no 7, kemudian salinlah kembali salah satu jawaban dari Maple, dan jelaskanlah dengan ringkas bagaimana cara Maple memperoleh titik potong antara dua kurva. Kemudian coba lakukan penghitungan titik potong (tipot) antara dua kurva tersebut secara manual (tanpa bantuan Maple)!
7. Setelah Anda memperoleh nilai titik potong secara manual untuk soal no 3 di atas, kemudian pakailah tipot tersebut dan hitunglah secara manual berapa luas daerah antara dua kurva tersebut?
8. Untuk perintah no 8, no 9, dan no 10. Pilihlah salah satu perintah yang Anda sukai di antara no 8, no 9 atau no 10 tersebut. Kemudian a) jelaskanlah bagaimana cara Anda mengubah fungsi f dalam variabel x menjadi fungsi f dalam variabel y. b) Jelaskan juga dengan contoh bagaimana caranya Anda menghitung titik potong kedua kurva dalam variabel y. c) Kemudian hitunglah luas daerah di antara dua kurva tersebut secara manual.
9. Perhatikanlah Gambar 1 berikut, daerah R dibatasi oleh kurva y = 6 - x^2, dan sumbu x. Arsirlah daerah R, kemudian:



Gambar 1

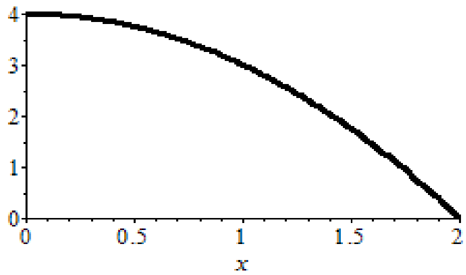
a) Irislah secara vertikal dan buatlah rumus untuk menghitung luas irisan tersebut.
b) Buatlah rumus untuk menghitung luas daerah R sebagai limit jumlah luas irisan-irisannya.
c) Hitunglah luas daerah R.

10. Perhatikanlah Gambar 2 berikut, daerah R dibangun oleh kurva y = x +4 dan y = -x^2 + 6. Arsirlah daerah R, kemudian hitunglah luas daerah R tersebut.



Gambar 2

11. Daerah R dibatasi oleh kurva y = 4 – x^2 , sumbu y, dan sumbu x.

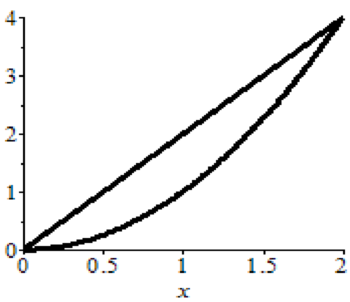


Gambar 3

Arsirlah daerah R, kemudian:

a) Irislah secara horizontal dan buatlah rumus untuk menghitung luas irisan tersebut.
b) Buatlah rumus untuk menghitung luas daerah R sebagai limit jumlah luas irisan-irisannya.
c) Hitunglah luas daerah R.

12. Daerah R dibatasi oleh kurva y = x^2 , dan y = 2x



a) Arsirlah daerah R, kemudian:
b) Irislah secara horizontal dan buatlah rumus untuk menghitung luas irisan tersebut.
c) Buatlah rumus untuk menghitung luas daerah R sebagai limit jumlah luas irisan-irisannya.
d) Hitunglah luas daerah R

FASE DISKUSI KELAS (WAKTU : 50 MENIT)

1. Jelaskanlah dan berikan contoh bagaimana cara menghitung luas daerah bila daerah yang terbentuk ada yang berada di atas sumbu x, ada yang berada di bawah sumbu x!
2. Jelaskanlah dan berikan contoh bagaimana cara menghitung luas daerah antara dua kurva bila bekerja dengan sumbu x!
3. Jelaskanlah dan berikan contoh bagaimana cara menghitung luas daerah antara dua kurva bila bekerja dengan sumbu y!

LATIHAN (WAKTU 20 MENIT)

SOAL

1. Buatlah sketsa daerah yang dibatasi oleh grafik persamaan y= x + 4 dan y = x^2 - dan hitunglah luas daerah tersebut!
2. Buatlah sketsa daerah yang dibatasi oleh grafik persamaan y=4 x – x^2 dan y = x^2 dan hitunglah luas daerah tersebut!

TUGAS (DIKERJAKAN DI RUMAH)

1. Buatlah sketsa daerah yang dibatasi oleh grafik persamaan y=(x -2)(x + 3) dan y = x dan hitunglah luas daerah tersebut!
2. Buatlah sketsa daerah yang dibatasi oleh grafik persamaan x = -6y^2 + 4 y dan x + 3y – 2 = 0 dan hitunglah luas daerah tersebut!
3. Buatlah sketsa daerah yang dibatasi oleh grafik persamaan x = 4y^4 dan x = 8 – 4y^4 dan hitunglah luas daerah tersebut!
4. Sebuah benda bergerak sepanjang suatu garis lurus sedemikian rupa sehingga kecepatannya pada saat t adalah v(t) = 2t^2 – 15t + 12 kaki per detik. Carilah perpindahan dan jarak total yang ditempuh benda itu untuk -1 <= t <= 9!

*****SELAMAT BEKERJA SEMOGA SUKSES*****

LEMBAR KERJA

(LK-6)

PERHITUNGAN VOLUME

KALKULUS INTEGRAL BERBASIS MODEL APOS

NAMA KELOMPOK:

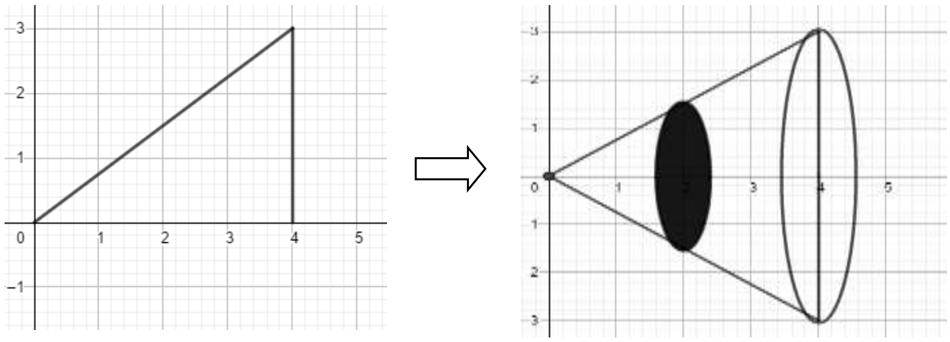
NAMA ANGGOTA:

1.
2.
3.
4.

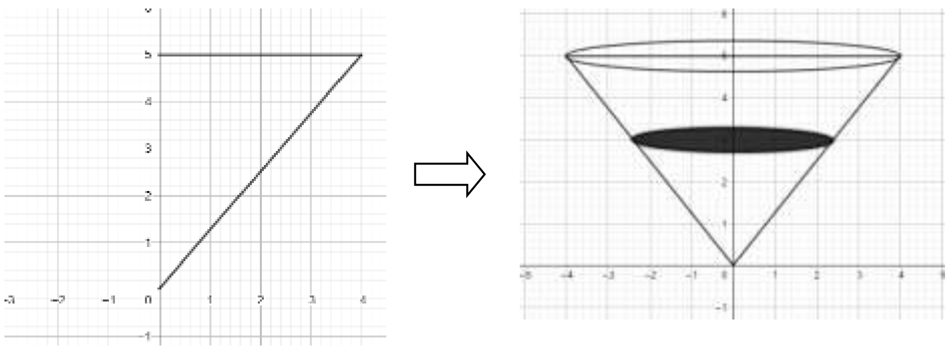
FASE ORIENTASI (WAKTU 15 MENIT)

Perhitungan Volume

1. **Metode Cakram**
   - Mengelilingi sumbu x



   - Mengelilingi sumbu y



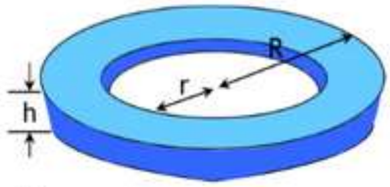
Volume benda putar dengan metode cakram

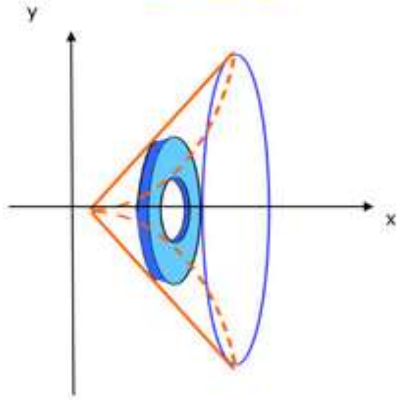
1. Mengelilingi sumbu x
   $\mathrm{V} = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$
2. Mengelilingi sumbu y
   $\mathrm{V} = \pi \int_a^b (f(y))^2 dy$

2. **Metode Cincin**

Volume benda putar dengan metode cincin:

$$\mathrm{V} = \pi \int_a^b ([R(x)]^2 - [r(x)]^2) dx$$





Penjelasan tentang perhitungan volume di R-3 dapat dibaca pada buku Kalkulus edisi kesembilan jilid I halaman 273. Penggunaan integral telah berkembang jauh. Banyak besaran dapat dianggap sebagai hasil pengirisan sesuatu menjadi potongan kecil-kecil, aproksimasi tiap potongan, penjumlahan dan pengambilan limit ketika tiap potongan mengecil juga dapat digunakan untuk mencari volume benda pejal. Silakan ajukan pertanyaan bila ada materi yang sukar dipahami.

FASE PRAKTIKUM (WAKTU 50 MENIT)

Laksanakanlah perintah Maple yang ada pada Tabel 1 tentang Volume Benda Putar Metode Cakram, dan Tabel 2 tentang Volume Benda Putar Metode Cincin. Kemudian diskusikanlah jawaban dari pertanyaan-pertanyaan yang sudah disediakan.

A. Volume Benda Putar Metode Cakram

Tabel 1. Volume Benda Putar Metode Cakram

NO	Perintah Maple	Jawaban Maple
	Perputaran Mengelilingi Sumbu- X	
1	➢ **with(Student[Calculus1]):** ➢ **with(student):** ➢ **f:=*x*->x^2;** ➢ **middlebox(f(x),x=0..2,100);** # perintah untuk menggambarkan daerah R di bawah f(x), x=[0,2] ➢ **VolumeOfRevolution(f(x),x=0..2,output=plot,title="Kurva y=x^2 diputar pada sumbu x",axis=horizontal);** # Perintah untuk melukiskan bangun ruang S yang terbentuk bila daerah R diputar mengelilingi sumbu x.	

NO	Perintah Maple	Jawaban Maple
	Perputaran Mengelilingi Sumbu- X	
	➢ **Volume := Int(Pi*f(x)^2,x=0..2) = int(Pi*f(x)^2,x=0..2);** #Perintah untuk menghitung volume bangun ruang S menggunakan metode cakram	
2	➢ **f := *x* -> sqrt(x);**	
	➢ **middlebox(f(x),x=0..4,100);**	
	➢ **VolumeOfRevolution(f(x),x=0..4,output=plot,title="Kurva y=sqrt(x) diputar pada sumbu x",axis=horizontal);**	
	➢ **Volume := Int(Pi*f(x)^2,x=0..4) = int(Pi*f(x)^2,x=0..4);**	
3	➢ **f := *x* -> -x^2 + 4*x;**	
	➢ **middlebox(f(x),x=0..3,100);**	
	➢ **VolumeOfRevolution(f(x),x=0..3,output=plot,title="Kurva y= -x^2 + 4*x diputar pada sumbu x", axis=horizontal);**	
	➢ **Volume := Int(Pi*f(x)^2,x=0..3) = int(Pi*f(x)^2,x=0..3);**	
4	➢ **f := *x* -> x^2 + 1;**	
	➢ **middlebox(f(x),x=0..4,100);**	
	➢ **VolumeOfRevolution(f(x),x=0..4,output=plot,title="Kurva y=x^2 + 1 diputar pada sumbu x",axis=horizontal);**	
	➢ **Volume :=Int(Pi*f(x)^2,x=0..4) = int(Pi*f(x)^2,x=0..4);**	
	Perputaran Mengelilingi Sumbu- Y	
5	➢ **with(Student[Calculus1]):** ➢ **f := *x* -> x^2;** ➢ **middlebox(f(x),x=0..4,100);** # perintah melukis daerah R di bawah f(x), dan x= [0,4]	
	➢ **VolumeOfRevolution(f(x),x=0..4,output=plot,title="Kurv ay=x^2 diputar pada sumbu y", axis=vertical);** # Perintah untuk melukis bangun ruang yang terbentuk bila daerah R diputar mengelilingi sumbu y	
	➢ **f:=y -> sqrt(y);** # fungsi f(x) di ubah ke dalam f(y)	
	➢ **Volume :=Int(Pi*f(y)^2,y=0..4) = int(Pi*f(y)^2,y=0..4);** # perintah untuk menghitung volume bangun ruang S yang terbentuk dari daerah R yang diputar mengelilingi sumbu y	
6	➢ **f := *x* -> x^2 + 1;** ➢ **middlebox(f(x),x=0..4,100);** ➢ **VolumeOfRevolution(f(x),x=0..4,output=plot,title="Kurv a y=x^2 + 1 diputar pada sumbu y",axis=vertical);** ➢ **f:=y-> sqrt(y -1);** ➢ **Volume :=Int(Pi*f(y)^2,y=0..4) = int(Pi*f(y)^2,y=0..4);**	

NO	Perintah Maple	Jawaban Maple
	Perputaran Mengelilingi Sumbu- X	
7	➢ f := *x* -> 4-x^2; ➢ VolumeOfRevolution(f(x),x=0..4,output=plot,title="Kurva y= 4- x^2 diputar pada sumbu y",axis=vertical); ➢ f:= y->sqrt(4 – y); ➢ Volume :=Int(Pi*f(y)^2,y=0..4) = int(Pi*f(y)^2,y=0..4);	

B. Volume Benda Putar Metode Cincin

Tabel 2. Volume Benda Putar Metode Cincin

NO	Perintah MAPLE	Jawaban MAPLE
1.	**Perputaran Mengelilingi Sumbu- X**	
1	➢ with(Student[Calculus1]): ➢ with(student): ➢ f1 := x -> x^2; ➢ f2 := x -> sqrt(8*x); ➢ plot({f1(x),f2(x)},x=0..2); ➢ titikpot := solve(f1(x)=f2(x),x); ➢ Volume := Int(Pi*(f2(x)^2-f1(x)^2), x=0..titikpot[2])=evalf(int(Pi*(f2(x)^2-f1(x)^1),x=0..titikpot[2])); ➢ VolumeOfRevolution(f1(x),f2(x),x=0..5,output=plot,title ="Kurva antara f1 dan f2 diputar pada sumbu x", axis=horizontal);	
2	➢ f1 := x -> 8*x; ➢ f2 := x -> 8*x^2; ➢ plot({f1(x),f2(x)},x=0..1.2); ➢ titikpot := solve(f1(x)=f2(x),x); ➢ Volume := Int(Pi*(f1(x)^2-f2(x)^2), x=0..titikpot[2])=evalf(int(Pi*(f2(x)^2-f1(x)^1),x=0..titikpot[2])); ➢ VolumeOfRevolution(f1(x),f2(x),x=0..titikpot[2],output= plot,title="Kurva antara f1 dan f2 diputar padasumbu x", axis=horizontal);	
3	➢ f1 := *x* -> x^2; ➢ f2 := *x* -> 3*x^2; ➢ f3 := *x* -> 3; ➢ plot({f1(x),f2(x),f3(x)},x=0..2,y=0..5); ➢ titikpot_a := solve(f1(x)=f3(x),x); ➢ titikpot_b := solve(f2(x)=f3(x),x); ➢ Volume:=Int(Pi*(f2(x)^2-f1(x)^2), x=0..titikpot_b[1])+Int(Pi*(f3(x)^2-f1(x)^2),x=titikpot_b[1]..titikpot_a[1])=int(Pi*(f2(x)^2-f1(x)^2),x=0..titikpot_b[1])+int(Pi*(f3(x)^2-f1(x)^2),x=titikpot_b[1]..titikpot_a[1]);	

NO	Perintah MAPLE	Jawaban MAPLE
2.	**Perputaran Mengelilingi Sumbu- Y**	
4	➢ **f1 := y -> y^2;** ➢ **f2 := y -> sqrt(8*y);** ➢ **plot({f1(y),f2(y)},y=0..2);** ➢ **titikpot := solve(f1(y)=f2(y),y);** ➢ **Vol := Int(Pi*(f2(y)^2-f1(y)^2), y=0..titikpot[2])=evalf(int(Pi*(f2(y)^2-f1(y)^2),y=0..titikpot[2]));** ➢ **VolumeOfRevolution(f1(y),f2(y),y=0..titikpot[2],output=plot,title="Kurva antara f1 dan f2 diputar padasumbu y", axis=vertical);**	
5	➢ **f1 := y -> 8*y;** ➢ **f2 := y -> 8*y^2;** ➢ **plot({f1(y),f2(y)},y=0..1.2);** ➢ **titikpot := solve(f1(y)=f2(y),y);** ➢ **Volume := Int(Pi*(f2(y)^2-f1(y)^2), y=0..titikpot[2])=evalf(int(Pi*(f2(y)^2-f1(y)^1),y=0..titikpot[2]));** ➢ **VolumeOfRevolution(f1(y),f2(y),y=0..titikpot[2],output=plot,title="Kurva antara f1 dan f2 diputar padasumbu y", axis=vertical);**	
6	➢ **f1 := *y* -> y^2;** ➢ **f2 := *y* -> 3*y^2;** ➢ **f3 := y-> 3;** ➢ **plot({f1(y),f2(y),f3(y)},x=0..2,y=0..5);** ➢ **titikpot_a := solve(f1(y)=f3(y),y);** ➢ **titikpot_b := solve(f2(y)=f3(y),y);** ➢ **Volume:=Int(Pi*(f2(y)^2-f1(y)^2), y=0..titikpot_b[1])+Int(Pi*(f3(y)^2-f1(y)^2), y=titikpot_b[1]..titikpot_a[1])=int(Pi*(f1(y)^2-f2(y)^2), y=0..titikpot_b[1])+int(Pi*(f3(y)^2-f1(y)^2),y=titikpot_b[1]..titikpot_a[1]);**	

FASE DISKUSI KELOMPOK KECIL (WAKTU: 50 MENIT)

DISKUSIKANLAH

Untuk Tabel 1

Perhatikanlah jawaban MAPLE pada Tabel 1.

1. Dapatkah Anda menyimpulkan bagaimana cara menghitung volume benda putar dengan metode cakram apabila suatu daerah diputar mengelilingi:
   a) Sumbu x
   b) Sumbu y

2. Salinlah salah satu jawaban MAPLE pada Tabel 1 di atas, kemudian hitunglah secara manual berapa volume benda putar yang terbentuk bila daerah di putar mengelilingi:
   a) Sumbu x
   b) Sumbu y

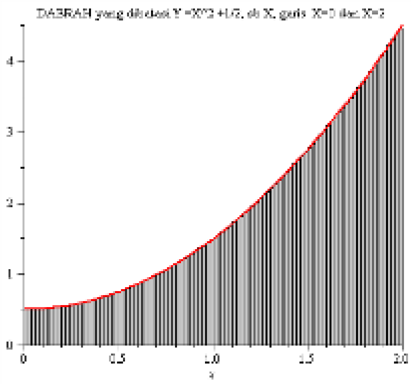
Untuk Tabel 2

Perhatikanlah jawaban MAPLE pada Tabel 2.

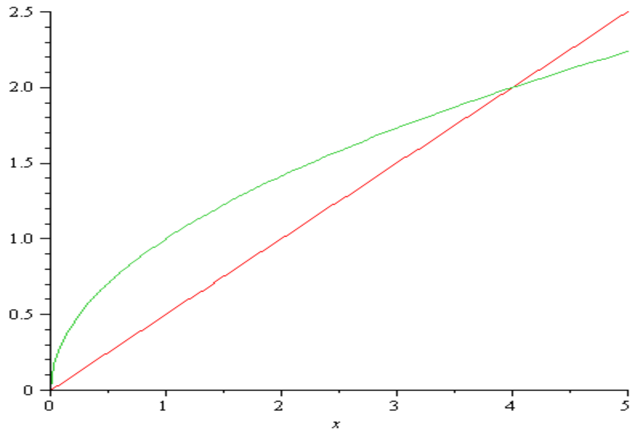
3. Dapatkah Anda menyimpulkan bagaimana cara menghitung volume benda putar dengan metode cincin apabila suatu daerah diputar mengelilingi:
   a) Sumbu x
   b) Sumbu y
4. Salinlah salah satu jawaban MAPLE pada Tabel 2 di atas, kemudian hitunglah secara manual berapa volume benda putar yang terbentuk bila daerah di putar mengelilingi:
   a) Sumbu x
   b) Sumbu y

LEMBAR KERJA MANUAL (LKM-4)

Tabel 4. Volume Benda Putar Metode Cakram

NO	SOAL/JAWAB
1	Hitunglah volume benda putar yang terjadi apabila daerah yang dibatasi grafik y= x^2 + ½, sumbu x, garis x = 0 dan x=2 seperti gambar berikut diputar mengelilingi: Sumbu X!  Gambar 1
2	Gambarkanlah hasil yang terjadi setelah daerah gambar 1 diputar mengelilingi sumbu X!

NO	SOAL/JAWAB
3	Hitunglah volume benda putar yang terjadi apabila gambar 1 diputar mengeliligi: Sumbu Y!
4	Gambarkanlah hasil yang terjadi setelah daerah gambar 1 diputar mengelilingi sumbu Y!
5	Hitunglah volume benda putar yang terjadi bila daerah yang dibatasi oleh kurva Y^2 = X dan Y = 2X di putar mengelilingi sumbu X!



Gambar 2

NO	SOAL/JAWAB
6	Gambarkanlah hasil yang terjadi setelah daerah gambar 1 diputar mengelilingi sumbu X!
7	Hitunglah volume benda putar yang terjadi apabila gambar 1 diputar mengelilingi sumbu Y!
8	Gambarkanlah hasil yang terjadi setelah daerah gambar 1 diputar mengelilingi sumbu Y!

FASE DISKUSI KELAS (WAKTU : 50 MENIT)

Jelaskanlah dan berikan contoh bagaimana caranya menghitung volume benda putar yang terjadi apabila suatu daerah diputar mengelilingi:

1. Sumbu x dengan metode cakram
2. Sumbu y dengan metode cakram
3. Sumbu x dengan metode cincin
4. Sumbu y dengan metode cincin

LATIHAN (WAKTU 20 MENIT)

Daerah D dibatasi oleh grafik fungsi y^2 = x, garis x = 4 dan sumbu x. Hitunglah volume benda putar yang terjadi bila daerah D diputar terhadap: a) sumbu x b) sumbu y.

TUGAS (DIKERJAKAN DI RUMAH)

1. Daerah D dibatasi parabola y =4x – x^2 dan garis x + y =4. Hitunglah volume benda yang terjadi bila daerah D diputar terhadap: a) sumbu x b) sumbu y.
2. Daerah D dibatasi parabola y =5x^2 dan garis y = 5x. Hitunglah volume benda yang terjadi bila daerah D diputar terhadap: a) sumbu x b) sumbu y.

*****SELAMAT BEKERJA SEMOGA SUKSES*****

LEMBAR KERJA

(LK- 7)

V. BENDA PUTAR KULIT TABUNG

KALKULUS INTEGRAL

BERBASIS

MODEL APOS

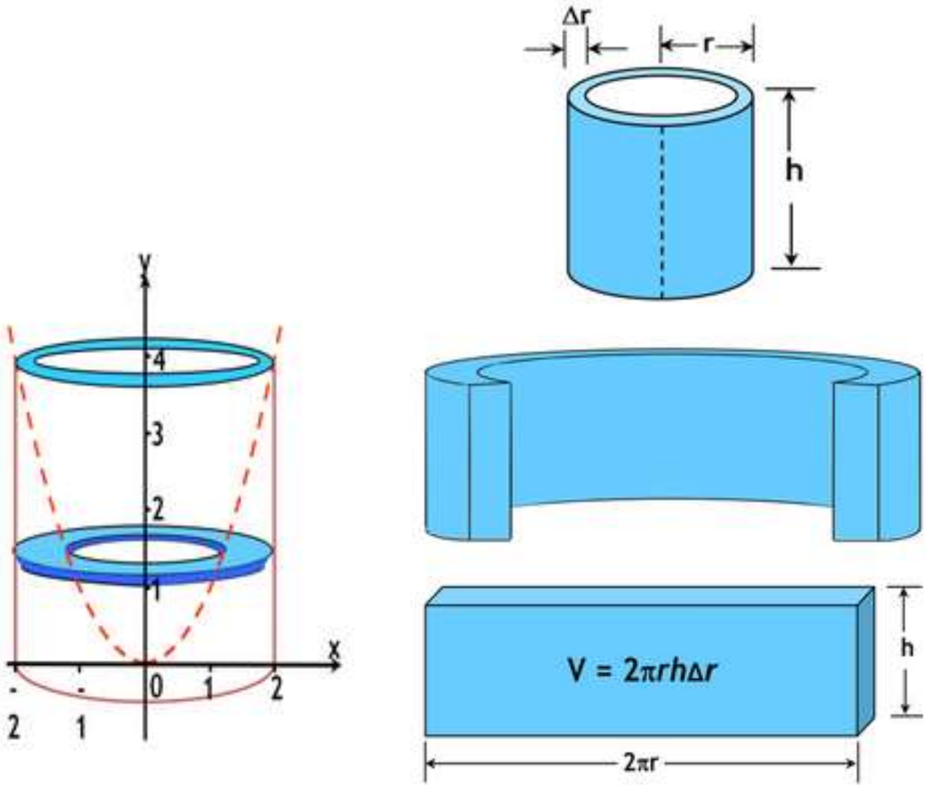
NAMA KELOMPOK:

NAMA ANGGOTA:

1.
2.
3.
4.

FASE ORIENTASI (WAKTU 15 MENIT)

Volume Benda Putar Metode Kulit Tabung



Berdasarkan gambar tersebut didapatkan bahwa volume benda putar dengan menggunakan metode kulit tabung adalah:

$\mathrm{V} = 2\pi r h \Delta r$

$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx.$

Penjelasan tentang Volume Benda Putar Metode Kulit Tabung terdapat pada buku Kalkulus edisi kesembilan jilid I halaman 280. Selain metode cakram dan cincin terdapat metode lain yang dapat digunakan untuk menghitung volume benda putar, yaitu dengan metode kulit tabung atau silinder. Untuk banyak persoalan, metode ini lebih mudah diterapkan dari metode sebelumnya. Silakan ajukan pertanyaan bila ada materi yang belum dipahami.

FASE PRAKTIKUM (WAKTU 50 MENIT)

A. Volume Benda Putar Metode Kulit Tabung & Panjang Kurva Bidang

Gunakanlah pengetahuan yang telah Anda miliki untuk menjawab langsung (tinggalkan saja bila Anda belum bisa menjawabnya) pada kolom yang sudah disediakan, kemudian laksanakanlah perintah MAPLE yang ada pada Tabel 1 tentang volume benda putar metode Kulit Tabung, Tabel 2 tentang Panjang Kurva Bidang.

Tabel 1. Volume Benda Putar Metode Kulit Tabung

NO	Perintah MAPLE	Jawaban MAPLE
1	➢ **with(Student[Calculus1]):** ➢ **with(student):** ➢ **f:=*x*->x^2;** ➢ **middlebox(f(x),x=0..2,100);** ➢ **VolumeOfRevolution(f(x),x=0..2,output=plot,title="Kurva y=x^2 diputar pada sumbu y",axis= vertical);** ➢ **Vol := Int(2*Pi*x*f(x)(x),x=0..2)= evalf(int(2*Pi*x*f(x),x=0..2));**	
2	➢ **f:=*x*->x^2 + 1/2;** ➢ **middlebox(f(x),x=0..2,100);** ➢ **VolumeOfRevolution(f(x),x=0..2,output=plot,title="Kurva y=x^2 + 1/2 diputar pada sumbu y",axis= vertical);** ➢ **Vol := Int(2*Pi*x*f(x),x=0..2)= evalf(int(2*Pi*x*f(x),x=0..2));**	
3	➢ **f := *x* -> sqrt(x);** ➢ **middlebox(f(x),x=0..4,100);** ➢ **VolumeOfRevolution(f(x),x=0..4,output=plot,title="Kurva y=sqrt(x) diputar pada sumbu y",axis= vertical);** ➢ **Vol := Int(2*Pi*x*f(x),x=0..2)=evalf(int(2*Pi*x*f(x),x=0..2));**	
4	➢ **f := *x* -> 1/sqrt(x);** ➢ **middlebox(f(x),x=1..4,100);** ➢ **VolumeOfRevolution(f(x),x=1..4,output=plot,title="Kurva y= 1/sqrt(x) diputar pada sumbu y",axis= vertical);** ➢ **Vol :=Int(2*Pi*x*f(x),x=1..4)=evalf(int(2*Pi*x*f(x),x=1..4));**	
5	➢ **f := *x* -> 9-x^2;** ➢ **middlebox(f(x),x=0..3,100);** ➢ **VolumeOfRevolution(f(x),x=0..3,output=plot,title="Kurva y= 9-x^2 diputar pada sumbu x",axis= horizontal);** ➢ **Vol := Int(Pi*f(x)^2,x=0..3)=evalf(int(Pi*f(x)^2,x=0..3));** ➢ **f:= y->sqrt(9-y);** ➢ **VolumeOfRevolution(f(y),y=0..9,output=plot,title="Kurva f(y)=sqrt(9-y) diputar pada sumbu x",axis= horizontal);** ➢ **Vol:= Int(2*Pi*y*f(y),y=0..9)=evalf(int(2*Pi*y*f(y),y=0..9));**	
6	➢ **f := *x* -> 4-x^2;** ➢ **middlebox(f(x),x=0..2,100);**	

NO	Perintah MAPLE	Jawaban MAPLE
	➢ **VolumeOfRevolution(f(x),x=0..2,output=plot,title="Kurva y= 4–x^2 diputar pada sumbu x",axis= horizontal);** ➢ **Vol := Int(Pi*f(x)^2,x=0..2)=evalf(int(Pi*f(x)^2,x=0..2));** ➢ **f:= y->sqrt(4 – y);** ➢ **VolumeOfRevolution(f(y),y=0..4,output=plot,title="Kurva f(y)=sqrt(4-y) diputar pada sumbu x",axis= horizontal);** ➢ **Vol:= Int(2*Pi*y*f(y),y=0..4)=evalf(int(2*Pi*y*f(y),y=0..4));**	
7	➢ **f1 := x -> 2- x^2;** ➢ **f2 := x -> x^2;** ➢ **plot({f1(x),f2(x)},x=0..1.2);** ➢ **titikpot := solve(f1(x)=f2(x),x);** ➢ **Vol := int(2*Pi*x*(f1(x)-f2(x)),x=0..titikpot[2])= int(2*Pi*x*(f1(x)-f2(x)),x=0..titikpot[2]);** ➢ **VolumeOfRevolution(f1(x),f2(x),x=0..titikpot[2],output=plot,title="Kurva antara f1 dan f2 diputar pada sumbu y", axis= vertical);**	
8	➢ **f1 := x -> 8*x;** ➢ **f2 := x -> 8*x^2;** ➢ **plot({f1(x),f2(x)},x=0..1.2);** ➢ **titikpot := solve(f1(x)=f2(x),x);** ➢ **Vol := int(2*Pi*x*(f1(x)-f2(x)),x=0.. titikpot[2])=int(2*Pi*x*(f1(x)-f2(x)),x=0..titikpot[2]);** ➢ **VolumeOfRevolution(f1(x),f2(x),x=0..titikpot[2],output=plot,title="Kurva antara f1 dan f2 diputar pada sumbu y", axis= vertical);**	
9	➢ **f1 := y -> 8*y;** ➢ **f2 := y -> 8*y^2;** ➢ **plot({f1(y),f2(y)},y=0..1.2);** ➢ **titikpot := solve(f1(y)=f2(y),y);** ➢ **Vol := Int(2*Pi*y*(f1(y)-f2(y)),y=0.. titikpot[2])=int(2*Pi*y*(f1(y)-f2(y)),y=0..titikpot[2]);** ➢ **VolumeOfRevolution(f1(y),f2(y),y=0..titikpot[2],output=plot,title="Kurva antara f1 dan f2 diputar pada sumbu x", axis= horizontal);**	
10	➢ **f1 := y -> y^2;** ➢ **f2 := y -> sqrt(y);** ➢ **plot({f1(y),f2(y)},y=0..2);** ➢ **titikpot := solve(f1(y)=f2(y),y);** ➢ **Vol := Int(2*Pi*y*(f2(y)-f1(y)),y=0..titikpot[2])= int(2*Pi*y*(f2(y)-f1(y)),y=0..titikpot[2]);** ➢ **VolumeOfRevolution(f1(y),f2(y),y=0..titikpot[2],output=plot,title="Kurva antara f1 dan f2 diputar pada sumbu x", axis=horizontal);**	

Tabel 2. Panjang Kurva Bidang

NO	Perintah MAPLE	Jawaban MAPLE
1	➢ **restart:with(student):** ➢ **with(plots):** ➢ **f := *x* -> x^2+1;** ➢ **L := Int(sqrt(1+diff(f(x),x)^2), x=0..3)= int(sqrt(1+diff(f(x),x)^2),x=0..3);** ➢ **evalf(L(Pi));** ➢ **plot(f(x), x=0..3);**	
2	➢ **f := y -> 3*y^2-2*y;** ➢ **L := Int(sqrt(1+diff(f(y),y)^2), y=0..2)= int(sqrt(1+diff(f(y),y)^2),y=0..2);** ➢ **evalf(L(Pi));** ➢ **plot(f(y), y=0..3);**	
3	➢ **f := t -> t^2-sin(t);** ➢ **S := *x* -> Int(sqrt(1+diff(f(t),t)^2), t=0..x);** ➢ **int(sqrt(1+diff(f(t),t)^2), t=0..x);** ➢ **evalf(S(Pi));** ➢ **plot(f(t), t=0..infinity);**	
4	➢ **f := t -> t^2-cos(t);** ➢ **S := *x* -> Int(sqrt(1+diff(f(t),t)^2), t=0..x);** ➢ **int(sqrt(1+diff(f(t),t)^2), t=0..x);** ➢ **evalf(S(Pi));** ➢ **plot(f(t), t=0..infinity);**	
5	➢ **f := x -> 2*cos(t);** ➢ **f := *y* -> 4*sin(t);** ➢ **L:=Int(sqrt((diff(f(x),t))^2+ (diff(f(y),t))^2),t=0..Pi);** ➢ **evalf(int(sqrt((diff(f(x),t))^2+(diff(f(y),t))^2),t=0..Pi));** ➢ **plot({f(x),f(y)}, t=0..Pi);**	
6	➢ **f := x -> 4*cos(t);** ➢ **f := *y* -> 4*sin(t);** ➢ **L:=Int(sqrt((diff(f(x),t))^2+ (diff(f(y),t))^2),t=0..Pi);** ➢ **evalf(int(sqrt((diff(f(x),t))^2+(diff(f(y),t))^2),t=0..2*Pi));** ➢ **plot({f(x),f(y)}, t=0..2*Pi);**	

FASE DISKUSI KELOMPOK KECIL (WAKTU: 50 MENIT)

Diskusikanlah

Untuk Tabel 1

Perhatikanlah jawaban MAPLE pada Tabel 1.

1. Dapatkah Anda menyimpulkan bagaimana cara menghitung volume benda putar dengan metode kulit tabung apabila suatu daerah diputar mengelilingi:

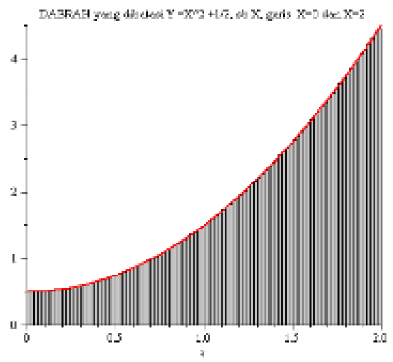
   a. Sumbu x
   b. Sumbu y
2. Salinlah salah satu jawaban MAPLE pada Tabel 2 di atas, kemudian hitunglah secara manual berapa volume benda putar yang terbentuk bila daerah di putar mengelilingi:
   a. Sumbu x
   b. Sumbu y

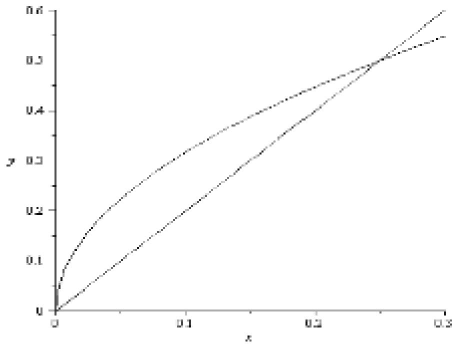
Untuk Tabel 2

3. Salinlah jawaban MAPLE untuk perintah no 1 pada Tabel 1 di atas. Kemudian hitunglah dengan cara yang serupa secara manual panjang ruas garis y = 2x + 3 antara x = 1 dan x = 3
4. Salinlah jawaban MAPLE untuk perintah no 2 pada Tabel 1 di atas. Kemudian hitunglah dengan cara yang serupa secara manual panjang ruas garis 2y - 2x + 3= 0 antara y = 1 dan y = 3.
5. Pelajarilah jawaban yang diberikan MAPLE pada tabel 2, kemudian pakailah pengetahuan yang Anda peroleh untuk menyelesaikan soal x = 4sin t, y = 4cos t – 5; $0 \leq t \leq \pi$

BAGIAN 2
LEMBAR KERJA MANUAL (LKM-7)

Tabel 4. Menghitung Volume Benda Putar dengan metode Kulit Tabung

NO	SOAL/JAWAB
1	Hitunglah Volume benda putar yang terjadi apabila daerah yang dibatasi grafik y= x^2 + ½, sumbu x, garis x = 0 dan x=2 seperti gambar berikut diputar mengelilingi: Sumbu X.  Gambar 1
2	Gambarkanlah hasil yang terjadi setelah daerah gambar 1 diputar mengelilingi sumbu X!

NO	SOAL/JAWAB
3	Hitunglah volume benda putar yang terjadi apabila gambar 1 diputar mengelilingi: Sumbu Y!
4	Gambarkanlah hasil yang terjadi setelah daerah gambar 1 diputar mengelilingi sumbu Y!
5	Hitunglah volume benda putar yang terjadi bila daerah yang dibatasi oleh kurva Y^2 = X dan Y = 2X diputar mengelilingi sumbu X!  Gambar 2
6	Gambarkanlah hasil yang terjadi setelah daerah gambar 1 diputar mengelilingi sumbu X!
7	Hitunglah volume benda putar yang terjadi apabila gambar 1 diputar mengelilingi: Sumbu Y!
8	Gambarkanlah hasil yang terjadi setelah daerah gambar 1 diputar mengelilingi sumbu Y!
9	Tentukan panjang kurva dengan ketentuan X= (t^3)/3, y = (t^2)/2; $0\leq t \leq 1$

FASE DISKUSI KELAS (WAKTU : 50 MENIT)

A. Jelaskanlah dengan ringkas dan berikan contoh bagaimana cara menghitung volume benda putar dengan metode kulit tabung bila:
   1. Daerah D diputar mengelilingi sumbu Y
   2. Daerah D diputar mengelilingi sumbu X

B. Jelaskanlah dengan ringkas dan berikan contoh bagaimana cara menghitung panjang Kurva Bidang!

LATIHAN (WAKTU: 10 MENIT)

SOAL
Hitunglah

1. Daerah D dibatasi oleh grafik fungsi y^2 = x, garis x = 4 dan sumbu x. Hitunglah volume benda putra yang terjadi bila daerah D diputar terhadap: a) sumbu x b) sumbu y.
2. Daerah D dibatasi parabola y =4x – x^2 dan garis x + y =4. Hitunglah volume benda yang terjadi bila daerah D diputar terhadap: a) sumbu x b) sumbu y.

TUGAS (DIKERJAKAN DI RUMAH)

1) Daerah D dibatasi parabola y =5x^2 dan garis y = 5x. Hitunglah volume benda yang terjadi bila daerah D diputar terhadap: a) sumbu x b) sumbu y.
2) Tentukan panjang kurva dengan ketentuan x= 3t^2 + 2, y = 2t^3 -1 ; $1\leq t \leq 4$!
3) Tentukan panjang kurva dengan ketentuan x = 5sin 2t -1, y = 5cos 2t – 3; $0 \leq t \leq \frac{1}{2}\pi$

*****SELAMAT BEKERJA SEMOGA SUKSES*****

BAB IV
FUNGSI TRANSENDEN

Keampuhan kalkulus telah cukup diperagakan. Namun, kita baru membahas sedikit dari begitu banyak penerapan ilmu kalkulus. Untuk menggali lebih dalam, kita perlu memperluas jenis fungsi yang diperlukan bagi kita untuk bekerja.
Perhatikan kesenjangan berikut ini.

$$D_x\left(\frac{x^2}{2}\right) = x^1, D_x(x) = x^0, D_x(???) = x^{-1}$$

Adakah turunan dari fungsi 1/x? atau sebaliknya, adakah anti turunan dari $\int x^{-1}\,dx$?

Fungsi baru pertama dipilih untuk mengisi kesenjangan di atas. Kita sebut dengan fungsi logaritma normal.

Definisi
Fungsi logaritma alami, dinyatakan oleh **ln**, didefinisikan oleh

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{dt}, x > 0$$

Daerah asal fungsi logaritma alami adalah himpunan bilangan real

Sasaran bab ini adalah memperluas banyaknya fungsi dalam kajian kita. Salah satu caranya dengan membalikkan fungsi-fungsi lama. Bilamana kita lakukan ini untuk fungsi logaritma asli, kita akan dibawa ke fungsi eksponen asli.

Selain akan membahas fungsi invers dan turunan, juga fungsi eksponen asli. Fungsi invers trigonometri dan turunannya juga akan terlingkup dalam bahasan kita.

LEMBAR KERJA

(LK - 8)

FUNGSI TRANSENDEN

KALKULUS II

BERBASIS

MODEL APOS

NAMA KELOMPOK:

NAMA ANGGOTA:

1.
2.
3.
4.

FASE ORIENTASI (WAKTU: 15 MENIT)

FUNGSI TRANSENDEN-

Penjelasan tentang Fungsi Transenden bisa dibaca pada buku sumber utama Kalkulus Edisi Sembilan Jilid I halaman 317–372 tentang Fungsi Logaritma Alami, Fungsi Invers dan Turunannya, Fungsi Eksponen Alami, Fungsi Eksponen dan Logaritma Umum, Fungsi Invers Trigonometri dan Turunannya, Fungsi Hiperbolik dan Inversnya. Materi ini menuntut ketuntasan pemahaman materi yang lalu tentang fungsi Trigonometri, turunan dan integral. Silahkan ajukan pertanyaan bila ada materi yang lalu belum tuntas dipahami.

FASE PRAKTIKUM (WAKTU 50 MENIT)

A. Fungsi Logaritma Asli

Perhatikan perintah Maple berikut ini, Anda boleh menjawab langsung di kolom yang disediakan bila sudah paham, atau Anda menjawab dengan bantuan Maple bila belum paham

Tabel 1. Fungsi Logaritma Asli

NO	Perintah MAPLE	Jawaban MAPLE
	Fungsi Logaritma Asli	
1	➢ **Diff(ln(x),x)=diff(ln(x),x);** ➢ **Diff(ln(a*x),x)=diff(ln(a*x),x);** ➢ **Diff(ln(x^5),x)=diff(ln(x^5),x);** ➢ **Diff(ln(x^2),x)=diff(ln(x^2),x);** ➢ **Diff(ln(x^5+x^2 + 8),x)= diff(ln(x^5 +x^2 + 8),x);** ➢ **Diff(ln(x – 1)^(1/3)/x^2), x=1..infinity;**	
2	➢ **Int(1/x,x)=int(1/x,x);** ➢ **Int(1/u,u)=int(1/u,u);** ➢ **Int(1/(3*x + 1),x)=int(1/(3*x + 1),x);** ➢ **Int((2x+2)/(2*x^2+4*x+3),x)=int((2x+2)/(2*x^2+4*x+3),x);** ➢ **Int((6*x +9)/(3*x^2 + 9*x) ,x)= int((6*x +9)/(3*x^2 + 9*x) ,x);**	
	Fungsi Eksponen	
3	➢ **Diff(exp(x),x)= diff(exp(-x),x);** ➢ **Diff(exp(-x),x)= diff(exp(-x),x); evalf(exp(1));** ➢ **exp(I*Pi)+1;** ➢ **Diff(exp(5x),x)= diff(exp(5x),x);** ➢ **Diff(exp(a*x),x)= diff(exp(a*x),x);** ➢ **Diff(exp(b*x^2),x)= diff(exp(b*x^2),x);**	

NO	Perintah MAPLE	Jawaban MAPLE
4	➢ Int(exp(x), x) = int(exp(x), x);	
	➢ Int(exp(a*x), x) = int(exp(a*x), x);	
	➢ Int(exp(u), u) = int(exp(u), u);	
	➢ Int(exp(-4*x), x) = int(exp(-4*x), x);	
	➢ Int(5 exp(a*x), x) = int(5 exp(a*x), x);	
	➢ Int(exp(a*u), u) = int(exp(a*u), u);	
	➢ Int(x* exp(x^2), x) = int(x* exp(x^2), x);	
	➢ Int(x^2* exp(-x^3), x) = int(x^2* exp(-x^3), x);	
	➢ Int(exp(-x^2), x) = int(exp(-x^2), x);	
	➢ Int(exp(-x^2)*ln(x), x)= int(exp(-x^2)*ln(x), x);	
	➢ Int(exp(-x^2)*ln(x), x=0..infinity)=int(exp(-x^2)*ln(x), x=0..infinity);	
5	➢ Diff(a^x,x)=diff(a^x,x); ➢ Diff(a^u,u)=diff(a^u,u); ➢ Diff(10^2*x,x)=diff(10^2*x,x);	
	➢ y:= (x^4 +2)^5 + 5^(x^2 +4); ➢ Diff(y,x)=diff(y,x);	
6	➢ Int(a^x,x)=int(a^x,x); ➢ Int(a^u,u)=int(a^u,u); ➢ Int(10^2*x,x)=int(10^2*x,x); ➢ y:= x^4 +3^x + 4^(2*x) + 2; ➢ Int(y,x)=int(y,x);	
	Fungsi Balikan	
7	➢ with(Student[Calculus1]):	
	➢ f := x-> (3*x + 2)/(2*x - 1); ➢ finv(x); ➢ InversePlot((3*x + 2)/(2*x - 1), x=-5..5);	
	➢ g:=x->3*x^2 – x; ➢ ginv(x); ➢ InversePlot(g(x), x=-1..1);	
	➢ f:=x->sin(x); ➢ finv(x);	
	➢ f:=x->cos(x); ➢ finv(x);	
	➢ f:=x->tan(x); ➢ finv(x);	
	➢ f:=x->cotan(x); ➢ finv(x);	
	➢ f:=x->sec(x);	

NO	Perintah MAPLE	Jawaban MAPLE
	➢ finv(x); ➢ f:=x->cosec(x); ➢ finv(x);	
8	➢ Diff(arcsin(x),x)=diff(arcsin(x),x); ➢ Diff(arccos(x),x)=diff(arccos(x),x); ➢ Diff(arcsec(x),x)=diff(arcsec(x),x); ➢ Diff(arctan(x),x)=diff(arctan(x),x); ➢ Diff(arccosec(x),x)=diff(arccosec(x),x); ➢ Diff(arccotan(x),x)=diff(arccotan(x),x);	
9	➢ h:=x->exp(x); ➢ hinv(x); ➢ InversePlot(exp(x), -1..1); ➢ InverseTutor();	
10	➢ Int(-1/sqrt(1-x^2),x)=int(-1/sqrt(1-x^2),x); ➢ Int(1/(x^2 + 1),x)= int(1/(x^2 + 1),x);	
	Fungsi-Fungsi Hiperbola dan Balikannya	
11	➢ f1:=x->sinh(x); ➢ f2:=x->(exp(2)-exp(-x))/2; ➢ convert(arcsinh(x),ln); ➢ f3:=x->cosh(x); ➢ f4:=x->(exp^2 + exp^(-x))/2; ➢ convert(arccosh(x),ln); ➢ tanh(x)=f2(x)/f4(x); ➢ convert(arctanh(x),ln); ➢ cotanh(x)=f4(x)/f2(x); ➢ convert(arccotanh(x),ln); ➢ sech(x)=1/f4(x); ➢ convert(arcsech(x),ln); ➢ cosech(x);1/f2(x); ➢ convert(arccosech(x),ln); ➢ Diff(sinh(x),x)= diff(sinh(x),x); ➢ Diff(cosh(x),x)= diff(cosh(x),x); ➢ Diff(tanh(x),x)= diff(tanh(x),x); ➢ Diff(sech(x),x)= diff(sech(x),x); ➢ Diff(arcsinh(x),x)= diff(arcsinh(x),x); ➢ Diff(arccosh(x),x)= diff(arccosh(x),x); ➢ Diff(arctanh(x),x)= diff(arctanh(x),x); ➢ Diff(arcsech(x),x)= diff(arcsech(x),x);	

NO	Perintah MAPLE	Jawaban MAPLE
12	➢ **Int(1/(sqrt(1-x^2)),x)=int(1/(sqrt(1-x^2)),x);** ➢ **Int(1/(1 + x^2),x)=int(1/(1 + x^2),x);** ➢ **Int(1/(x*sqrt(x^2 + 1)),x)=int(1/(x*sqrt(x^2 + 1)),x);**	

FASE DISKUSI KELOMPOK KECIL (WAKTU: 50 MENIT)

BAGIAN 1

Amatilah jawaban MAPLE pada Tabel 1 di atas, kemudian jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut.

1. Buatlah kesimpulan umum bagaimana cara menyelesaikan soal pada perintah no 1!
2. Buatlah kesimpulan umum bagaimana cara menyelesaikan soal pada perintah no 2!
3. Buatlah kesimpulan umum bagaimana cara menyelesaikan soal pada perintah no 3!
4. Buatlah kesimpulan umum bagaimana cara menyelesaikan soal pada perintah no 4!
5. Buatlah kesimpulan umum bagaimana cara menyelesaikan soal pada perintah no 5!
6. Buatlah kesimpulan umum bagaimana cara menyelesaikan soal pada perintah no 6!
7. Buatlah kesimpulan umum bagaimana cara menyelesaikan soal pada perintah no 7!
8. Buatlah kesimpulan umum bagaimana cara menyelesaikan soal pada perintah no 8!
9. Buatlah kesimpulan umum bagaimana cara menyelesaikan soal pada perintah no 9!
10. Buatlah kesimpulan umum bagaimana cara menyelesaikan soal pada perintah no 10!
11. Buatlah kesimpulan umum bagaimana cara menyelesaikan soal pada perintah no 11!
12. Buatlah kesimpulan umum bagaimana cara menyelesaikan soal pada perintah no 12!

BAGIAN 2

Jawablah soal berikut dengan hitungan manual

NO	SOAL	JAWAB
1	Carilah turunan fungsi berikut a) $Y = \ln(5x)$ b) $Y = \ln(5x^2 + 2x)$	

NO	SOAL	JAWAB
	c) Y = e^{3x}	
	d) Y = e^{x^2+4}	
	e) Y = 9^{7x-x^2}	
	f) Y = ln $(2x^3 - 4x + 5)$	
2	Hitunglah integral berikut.	
	a) Y = 6 sin 3x	
	b) Y = 4x cos x^2	
	c) Y =$(6x + 3)/(x^2 + x - 5)$	
	d) Y = sinh(3x + 2)	
	e) Y = e^x sinh e^x	
	f) Y = x cosh(πx + 5)	
	g) Y = tanh(x) ln cosh x	
	h) Y = $x2^{x^2}$	

FASE DISKUSI KELAS (WAKTU : 50 MENIT)

1. Jelaskanlah dengan ringkas dan berikan contoh, bagaimana caranya mencari turunan fungsi ln u!
2. Jelaskanlah dengan ringkas dan berikan contoh, bagaimana caranya mencari turunan fungsi e^u!
3. Jelaskanlah dengan ringkas dan berikan contoh, bagaimana caranya mencari integral fungsi e^u!
4. Jelaskanlah dengan ringkas dan berikan contoh, bagaimana caranya mencari turunan fungsi a^u!
5. Jelaskanlah dengan ringkas dan berikan contoh, bagaimana caranya mencari integral fungsi a^u!
6. Jelaskanlah dengan ringkas dan berikan contoh, bagaimana caranya mencari integral fungsi arcsin(u)!
7. Jelaskanlah dengan ringkas dan berikan contoh, bagaimana caranya mencari integral fungsi sinh(u)!
8. Jelaskanlah dengan ringkas bagaimana caranya mencari invers suatu fungsi f(x)= (x+ 2)/(4-x)!

LATIHAN (WAKTU 20 MENIT)

SOAL

Hitunglah

Carilah turunan fungsi berikut

a) ln(8-2x)
b) ln(x^3-5x^2 + 2x)
c) e^{3x^2}
d) e^{x^4-2x}

e) 5^{7x-x^3}
f) ln $(x^2 - 4x - 21)$

TUGAS (DIKERJAKAN DI RUMAH)

Hitunglah integral dari fungsi berikut.

a) 6 cus 3x
b) 4x sin x^2
c) $(6x - 3)/(x^2 - x - 5)$
d) sinh(3x - 2)
e) e^x cosh e^x
f) x sinh(πx + 5)
g) tanh(x) ln sinh x dx
h) $x4^{x^3}$

*****SELAMAT BEKERJA SEMOGA SUKSES*****

BAB V
TEKNIK INTEGRASI

Setelah banyak mengenal integral, pada bab ini kita akan mengupas tentang teknik integrasi, yaitu teknik-teknik yang dipakai untuk mengintegrasi bentuk-bentuk fungsi. Fungsi-fungsi yang ada sekarang disebut fungsi-fungsi elementer, yaitu fungsi konstanta, fungsi pangkat, fungsi logaritma dan fungsi eksponen, fungsi trigonometri dan fungsi invers trigonometri, serta semua fungsi yang diperoleh dari hasil penambahan, pengurangan, perkalian, pembagian, dan komposisi dari fungsi-fungsi tersebut.

Diferensiasi suatu fungsi elementer dapat digunakan secara langsung menggunakan aturan-aturan yang telah kita pelajari. Berbeda sekali dengan integrasi. Integrasi melibatkan sedikit teknik dan lebih banyak akal. Dua teknik dasar integrasi adalah substitusi dan integrasi parsial. Teknik yang pertama yaitu substitusi, menjadi pokok bahasan utama untuk LK-9 Teknik Integrasi Substitusi

Penguasaan teknik integrasi substitusi sangat diperlukan untuk melanjutkan ke LK-10 Teknik Integrasi Trigonometri, karena pada lembar kerja ini kita akan menggabungkan metode substitusi dengan penggunaan identitas trigonometri. Kita akan mendapatkan banyak bentuk trigonometri.

Selain bentuk-bentuk fungsi yang sudah disebutkan di atas, ada juga fungsi yang memiliki bentuk akar yang dalam pengintegralannya selalu menimbulkan masalah dan biasanya kita menghindarinya. Seringkali substitusi yang tepat akan merasionalkan integral tersebut. Substitusi yang merasionalkan inilah yang menjadi pokok bahasan LK-11 substitusi yang merasionalkan.

Sedikit sudah disinggung di atas tentang integrasi parsial. Yang merupakan salah satu dari dua teknik dasar integrasi. Integrasi parsial atau nama lainnya adalah substitusi ganda, ini digunakan ketika integrasi dengan menggunakan substitusi gagal. Metode ini didasarkan pada integrasi dari rumus untuk turunan dari hasil kali dua fungsi. Integrasi parsial in termuat dalam LK-12 Integrasi Parsial

Bahasan selanjutnya dalam LK-13 adalah Intergrasi Fungsi Rasional. Fungsi rasional adalah hasil bagi dua polinomial. Oleh karena polinomial mudah diintegrasi, maka persoalan integrasi fungsi rasional adalah persoalan mengintegrasi fungsi rasional sejati.

LEMBAR KERJA

(LK- 9)

INTEGRASI SUBSTITUSI

KALKULUS INTEGRAL

BERBASIS

MODEL APOS

NAMA KELOMPOK:

NAMA ANGGOTA:

1.
2.
3.
4.

FASE ORIENTASI (WAKTU: 15 MENIT)

Integrasi dengan Substitusi

Substitusi dengan integral tak-tentu

Andaikan g adalah fungsi yang terdiferensiasikan dan anggaplah F antiturunan dari f. Kemudian, jika u=g(x),

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + C = F(g(x)) + C$$

Gunakanlah pengetahuan yang telah Anda miliki untuk menjawab langsung (tinggalkan saja bila Anda belum bisa menjawabnya), untuk lebih jelasnya Anda dapat mempelajarinya pada buku kalkulus edisi kesembilan jilid II halaman 2. kemudian laksanakanlah perintah MAPLE yang ada pada Tabel 1 tentang Integrasi dengan Substitusi. Selanjutnya setelah Tabel 1 diisi, diskusikanlah dalam kelompok kecil pertanyaan-pertanyaan yang telah disediakan di bawah Tabel 1.

FASE PRAKTIKUM (WAKTU 50 MENIT)

Tabel 1. Integrasi dengan Substitusi

NO	Perintah MAPLE	Jawaban MAPLE
1	➢ **restart; with(student):** */*digunakan untuk mengaktifkan perintah changevar dalam melakukan substitusi*/* ➢ **f:=Int(3x^3*(x^4 + 11)^(1/2),x);** /*digunakan untuk *mendefinisikan f* = ∫ x^3*(x^4 + 11)^(1/2) *dx* */ ➢ **changevar(u=(x^4+11),f,u);** */*Memisalkan u =* (x^4+11)*, dan mengganti variable x pada f menjadi variable u pada f */* ➢ **f2:=value(%);** */*Menghitung hasil integral dalam variable u.*/* ➢ **subs(u=x^4 + 11,f2);** */*Mengganti kembali variable u kedalam variable x sehingga hasil akhir kembali dalam bentuk variable x */* ➢ **diff(%,x);** */*perintah untuk menurunkan kembali hasil integral untuk menguji kebenaran hasilnya */*	
2	➢ **G:=Int(sqrt(2*x),x=1..9);** ➢ **changevar(u=3*x,G,u);** ➢ **G2:=value(%);** ➢ **subs(u=2*x,G2);** ➢ **diff(%,x);**	

NO	Perintah MAPLE	Jawaban MAPLE
3	➢ G:=Int((x+1)^(1/2), x=0..3); ➢ changevar(u= x +1,G,u); ➢ G2:=value(%); ➢ subs(u=x +1,G2); ➢ diff(%,x);	
4	➢ G:=Int(a^tan(t)/sin^2 (t),t); ➢ changevar(u=tan(t),G,u); ➢ G2:=value(%); ➢ subs(u=tan(t),G2); ➢ diff(%,t);	
5	➢ G:=Int(3/(5-9*x^2)^(1/2),x); ➢ changevar(u= 3*x, G,u); ➢ G2:=value(%); ➢ subs(u=3*x, G2); ➢ diff(%,x);	
6	➢ G:=Int(10*exp(1/x)/x^2,x); ➢ changevar(u= 1/x, G,u); ➢ G2:=value(%); ➢ subs(u=1/x, G2); ➢ diff(%,x);	
7	➢ G:=Int(exp(x)/(4+16*exp(2*x)),x); ➢ changevar(u= 4*exp(x), G,u); ➢ G2:=value(%); ➢ subs(u=4*exp(x), G2); ➢ diff(%,x);	
8	➢ G:=Int(x*e^(sin*x^2),x); ➢ changevar(u= x^22, G,u); ➢ G2:=value(%); ➢ subs(u=x^2, G2); ➢ diff(%,x);	
9	➢ G:=Int((1/4)*x^3/(x^4 + 1),x); ➢ changevar(u= x^4+1, G,u); ➢ G2:=value(%); ➢ subs(u=x*4+1, G2); ➢ diff(%,x);	

NO	Perintah MAPLE	Jawaban MAPLE
10	➢ **G:=Int(7/(x^2-6*x+25),x);** ➢ **changevar(u= x - 3, G,u);** (cttn: ubah dulu x^2-6*x+25 ke bentuk (x – 6/2)^2 …) ➢ **G2:=value(%);** ➢ **subs(u=x - 3, G2);** ➢ **diff(%,x);**	
11	➢ **G:=Int(1/(x^2+2*x+5),x);** ➢ **changevar(u= x +1, G,u);** (cttn: ubah dulu x^2+2*x+5 ke bentuk (x + 2/2)^2…) ➢ **G2:=value(%);** ➢ **subs(u=x + 1, G2);** ➢ **diff(%,x);**	
12	➢ **G:=Int(1/(x^2- 4*x+9),x);** ➢ **changevar(u= x - 2, G,u);** ➢ **G2:=value(%);** ➢ **subs(u=x - 2, G2);** ➢ **diff(%,x);**	
13	➢ **G:=Int((3*x^2+2*x)/(x + 1),x);** ➢ **G1:= (3*x^2+2*x)/(x + 1);** ➢ **G2:=convert(G1,parfrac,x);** /* perintah untuk menyederhanakan fungsi G */ ➢ **G3:=Int(G2,x)=int(G2,x);** ➢ **G=G3;**	

FASE DISKUSI KELOMPOK KECIL (WAKTU: 50 MENIT)

Bagian 1

Perhatikanlah isi Tabel 1 di atas, diskusikanlah jawaban dari pertanyaan-pertanyaan berikut.

1. Salinlah kembali jawaban MAPLE untuk perintah no 2. Jelaskanlah dengan ringkas. bagaimana caranya menyelesaikan soal integral dengan menggunakan metode substitusi?
2. Jawablah pertanyaan berikut
   a. $\int dz = \cdots$
   b. $\int d\mathbf{3} = \cdots$
   c. $\int \mathbf{3}d\mathbf{3} = \cdots$
   d. $\int \mathbf{3}^n d\mathbf{3} = \cdots$
3. Perhatikanlah soal no 2 dan jawaban Anda, kemudian jelaskanlah dengan ringkas, apakah ada hubungan antara metode substitusi dengan model integral pada soal no 2 di atas (Amati lagi jawaban MAPLE untuk perintah no 2) ?

4. Perhatikanlah jawaban MAPLE untuk perintah no 2, dan no 3 pada Tabel 1. Apa perbedaan yang Anda temui pada batas bawah dan batas` atas integral ketika variabel x diganti dengan variabel u? Mengapa hal tersebut bisa terjadi?
5. Lakukanlah perhitungan secara manual untuk mendapatkan batas-batas baru dalam variabel u tersebut untuk perintah MAPLE no 2, dan no 3 pada Tabel 1 di atas?
6. Amatilah jawaban MAPLE untuk perintah no 13 pada Tabel 1 di atas. Apa yang aneh pada integral tersebut? Dapatkah Anda memahami cara menyelesaikan soal tersebut?. Coba lakukan secara manual cara menyelesaikan soal tersebut.

BAGIAN 2

Hitunglah soal berikut secara manual

NO	SOAL/JAWAB
1	$\int x(x^2 + 1)^5 dx$
2	$\int_0^1 x\sqrt{1 - x\hat{}2}\, \mathrm{dx}$
3	$\int \frac{x^3 + 7x}{x - 1}\, dx$
4	$\int_0^1 t3^{t^2} \mathrm{dt}$

NO	SOAL/JAWAB
5	$\int \frac{dx}{x^2+8x+25}$
6	$\int \frac{x+1}{9x^2+18x+10}\,dx$

FASE DISKUSI KELAS (WAKTU : 50 MENIT)

Jelaskanlah dan berikan contoh (boleh menggunakan soal pada LKM-10) bagaimana cara menyelesaikan soal integral menggunakan metode substitusi?

LATIHAN (WAKTU 20 MENIT)

SOAL

Hitunglah

1. $\int 8x(x^2-1)^{10}dx$
2. $\int \frac{3x^2+2x}{x+1}\,dx$

TUGAS (DIKERJAKAN DI RUMAH)

1. $\int \frac{x^3}{x^4+4}\,dx$
2. $\int \frac{\sin x}{16-\cos^2 x}\,dx.$
3. $\int \frac{8-x}{\sqrt{16+16x-x^2}}\,dx$
4. $\int_0^1 \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}}dx$
5. $\int \frac{x^3}{x^4+4}\,dx$
6. $\int_0^1 \frac{8+x}{\sqrt{16+16x+x^2}}\,dx$
7. $\int \frac{e^x}{2+e^x}\,dx$
8. $\int \frac{dx}{9x^2+18x+10}$
9. $\int \frac{dx}{\sqrt{16+16x-x^2}}$
10. $\int 8x(x^2-1)^{10}dx$
11. $\int \frac{8-x}{\sqrt{16+16x-x^2}}\,dx$
12. $\int \frac{x^5}{x^2+2x}dx$

LEMBAR KERJA

(LK -10)

BEBERAPA INTEGRAL TRIGONOMETRI

KALKULUS INTEGRAL

BERBASIS

MODEL APOS

NAMA KELOMPOK:
NAMA ANGGOTA:

1.

2.

3.

4.

FASE ORIENTASI (WAKTU: 15 MENIT)

Integral Trigonometri

Bila kita mengombinasikan metode substitusi dengan pemakaian kesamaan trigonometri yang tepat, maka kita dapat mengintegralkan banyak bentuk trigonometri. Kita tinjau tiga jenis integral yang sering muncul yaitu:

1. $\int sin^n x\ dx\ dan \int cos^n x\ dx$
2. $\int sin^m x\ cos^n x\ dx$
3. $\int \sin mx \cos nx\ dx$, $\int \sin mx \sin nx\ dx$, $\int \cos mx \cos nx\ dx$
4. $\int tan^n x\ dx, \int cot^n x\ dx$
5. $\int tan^m x\ sec^n x\ dx, \int cot^m x csc^n x\ dx$

Di mana setiap jenis memiliki aturannya masing-masing, untuk lebih jelasnya Anda dapat mempelajarinya pada buku Kalkulus Edisi sembilan jilid II halaman 11-16. penguasaan materi tentang Fungsi Trigonometri beserta turunan dan integralnya sangat diperlukan sebelum melanjutkan materi berikut ini. Silahkan ajukan pertanyaan bila materi yang dikupas pada LK belum tuntas dipahami.

FASE PRAKTIKUM (WAKTU 50 MENIT)

Gunakanlah pengetahuan yang telah Anda miliki untuk menjawab langsung, atau laksanakanlah perintah MAPLE yang ada pada Tabel 1berikut ini tentang Beberapa Integral Trigonometri, kemudian salinlah jawaban MAPLE pada kolom yang sudah disediakan.

Tabel 1. Beberapa Integral Trigonometri

NO	Perintah MAPLE	Jawaban MAPLE
1	➢ **with(student):** ➢ **f0:=sin^2(x);** ➢ **f1:=subs(sin^2(x)=(1-cos(2*x))/2, f0);** ➢ **f2:=Int(f1,x);** ➢ **f3:=changevar(u=2*x,f2,u);** ➢ **f4:=value(f3);** ➢ **f5:=changevar(u=2*x,f4);** ➢ **Int(f0,x)=f5;**	
2	➢ **f0:=sin^4(x);** ➢ **f1:=subs(sin^4 (x)=((1-cos(2*x))/2)^2,f0);** ➢ **f2:=Int(f1,x);** ➢ **f3:=changevar(u=2*x,f2,u);** ➢ **f4:=value(f3);** ➢ **f5:=changevar(u=2*x,f4);** ➢ **Int(f0,x)=f5;**	

NO	Perintah MAPLE	Jawaban MAPLE
3	➢ f0:=sin^6(x); ➢ f1:=subs(sin^6(x)=((1-cos(2*x))/2)^3,f0); ➢ f2:=Int(f1,x); ➢ f3:=changevar(u=2*x,f2,u); ➢ f4:=value(f3); ➢ f5:=changevar(u=2*x,f4); ➢ Int(f0,x)=f5;	
4	➢ f0:=cos^3(x); ➢ f1:=subs(cos^3(x)=cos(x).(1–sin^2(x)),f0); ➢ f2:=Int(f1,x); ➢ f3:=value (f2); ➢ Int(f0,x)= f3;	
5	➢ with(student): ➢ f0:=sin^5(x); ➢ f1:=subs(sin^5(x)=sin(x).((1–cos^2(x))^2),f0); ➢ f2:=Int(f1,x); ➢ f3:=value (f2); ➢ Int(f0,x)= f3;	
6	➢ with(student): ➢ f0:=sin^3(x).cos^4(x); ➢ f1:=subs(sin^3(x).cos^4(x)=sin(x).(1 –cos^2(x))* cos^(4)(x), f0); ➢ f2:=Int(f1,x); ➢ f3:=value (f2); ➢ Int(f0,x)= f4;	
7	➢ f0:=sin^2(x).cos^2(x); ➢ f1:=subs(sin^2(x)*cos^2(x)=((1-cos(2*x))/2). ((1 + cos(2*x))/2), f0); ➢ f2:=Int(f1,x); ➢ f3:=changevar(2*x=u,f2); ➢ f4:=value (f3); ➢ f5:=changevar(u=2*x,f4); ➢ Int(f0,x)= f5;	
8	➢ f0:=sin(2*x)*sin(3*x); ➢ f1:=combine(f0); ➢ f2:=Int(f1,x); ➢ f3:=value (f2); ➢ Int(f0,x)= f4;	
9	➢ f0:=sin(2*x)*cos(3*x); ➢ f1:=combine(f0); ➢ f2:=Int(f1,x); ➢ f3:=value (f2); ➢ Int(f0,x)= f4;	

NO	Perintah MAPLE	Jawaban MAPLE
10	➢ **f0:=cos(2*x)*cos(3*x);** ➢ **f1:=combine(f0);** ➢ **f2:=Int(f1,x);** ➢ **f3:=value (f2);** ➢ **Int(f0,x)= f4;**	

FASE DISKUSI KELOMPOK KECIL (WAKTU: 50 MENIT)

Bagian 1

1. Salinlah kembali jawaban MAPLE pada Tabel 1 di atas untuk perintah nomor 1, pelajarilah cara MAPLE menyelesaikan soal integral, kemudian lakukanlah penghitungan integral tersebut secara manual (tanpa bantuan komputer)!
2. Lakukan hal yang sama seperti soal nomor 1 di atas untuk perintah MAPLE nomor 4!
3. Kesimpulan apa yang dapat Anda peroleh dari jawaban MAPLE untuk perintah nomor 1 dan perintah nomor 4 pada Tabel 1 di atas?
4. Kesimpulan apa yang dapat Anda peroleh dari jawaban MAPLE untuk perintah nomor 6?
5. Kesimpulan apa yang dapat Anda peroleh dari jawaban MAPLE untuk perintah nomor 7?
6. Kesimpulan apa yang dapat Anda peroleh dari jawaban MAPLE untuk perintah nomor 8,9 dan 10?

BAGIAN 2

NO	SOAL/JAWAB
1	$\int \cos^2(x)dx$
2	$\int \sin^3(x)dx$
3	$\int \sin^2(x)\cos(x)dx$

NO	SOAL/JAWAB
4	$\int \sin(6x)\sin(3x)\,dx$
5	$\int \sin(6x)\cos(3x)\,dx$
6	$\int \cos(6x)\sin(3x)\,dx$

FASE DISKUSI KELAS (WAKTU : 50 MENIT)

1) Ambillah soal no 1 pada LKM-9 di atas, jelaskanlah jawaban Anda!
2) Ambillah soal no 3 pada LKM-9 di atas, jelaskanlah jawaban Anda!
3) Pilihlah salah satu soal selain no 1 dan 3, kemudian jelaskanlah jawaban Anda!

LATIHAN DAN EVALUASI (WAKTU: 10 MENIT)

SOAL

Hitunglah

1. $\int \cos^4(x)dx$
2. $\int \cos^5(x)dx$

TUGAS (DIKERJAKAN DI RUMAH)

1) $\int sin^4\, 6x\, dx$
2) $\int \sin^3 x \cos^2 x\ \ dx$
3) $\int \sin^2 x \cos^3 x\ \ dx$
4) $\int \sin^2 4x \cos^2 4x\ \ dx$
5) $\int \sin^3 2x \cos^3 2x\ \ dx$
6) $\int \sin 4y \cos 5y\, dy$
7) $\int \cos 4y \cos 5y\, dy$
8) $\int \sin 4y \sin 5y\, dy$

***** SELAMAT BELAJAR SEMOGA SUKSES *****

LEMBAR KERJA

(LK- 11)

SUBSTITUSI MERASIONALKAN

KALKULUS INTEGRAL BERBASIS MODEL APOS

NAMA KELOMPOK:

NAMA ANGGOTA:

1.
2.
3.
4.

FASE ORIENTASI (WAKTU 15 MENIT)

Substitusi merasionalkan

Integral yang melibatkan $\sqrt[n]{ax+b}$ jika $\sqrt[n]{ax+b}$ muncul dalam suatu integral, substitusi $u=\sqrt[n]{ax+b}$ akan menghilangkan akar.

Integral yang melibatkan $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{a^2+x^2}$, $dan\,\sqrt{x^2-a^2}$, untuk merasionalkan tiga ekspresi ini, kita boleh mengasumsikan bahwa a positif dan membuat substitusi trigonometri berikut

Akar	**substitusi**	**pembatasan pada t**
$\sqrt{a^2-x^2}$	x= a sin t	$-\pi/2 \le t \le \pi/2$
$\sqrt{a^2+x^2}$	x= a tan t	$-\pi/2 \le t \le \pi/2$
$\sqrt{x^2-a^2}$	x= a sec t	$0 \le t \le \pi, t \ne \pi/2$

Sekarang perhatikan penyederhanaan yang diperoleh dari substitusi ini.

$\sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2-a^2sin^2t} = \sqrt{a^2cos^2t}$ = |a cos t| = a cos t

$\sqrt{a^2+x^2} = \sqrt{a^2+a^2tan^2t} = \sqrt{a^2sec^2t}$ = |a sec t| = a sec t

$\sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{a^2sec^2t-a^2} = \sqrt{a^2tan^2t}$ = |a tan t| = a tan t

Penjelasan tentang substitusi merasionalkan terdapat pada buku sumber utama Kalkulus edisi kesembilan jilid II halaman 17. Bentuk akar dalam integral selalu menimbulkan kesulitan dan biasanya kita akan berusaha menghindarinya. Seringkali substitusi yang tepat akan merasionalkan bentuk tersebut. Silakan ajukan pertanyaan bila ada yang sukar dipahami.

FASE PRAKTIKUM (WAKTU 50 MENIT)

Substitusi yang Merasionalkan

Gunakanlah pengetahuan yang telah Anda miliki untuk menjawab langsung (tinggalkan saja bila Anda belum bisa menjawabnya) pada kolom yang sudah disediakan, kemudian laksanakanlah perintah MAPLE yang ada pada Tabel 1berikut ini tentang Substitusi yang merasionalkan, kemudian salinlah jawaban MAPLE pada kolom yang sudah disediakan.

Tabel 1. Sustitusi yang Merasionalkan

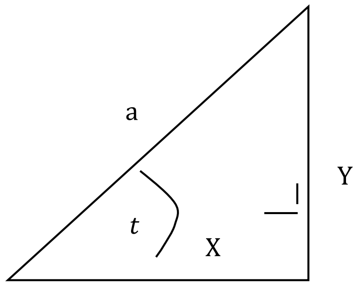
NO	**Perintah MAPLE**	**Jawaban MAPLE**
1	➢ **f:= x*(x – 4)^(1/3);** ➢ **f1:=changevar((x-4)^(1/3)=u, Int(x*(x – 4)^(1/3),x),u);** ➢ **f2:=simplify(f1), value (f2);**	

NO	Perintah MAPLE	Jawaban MAPLE
	➢ f3:= subs(u=(x-4)^(1/3)); ➢ Int(f,x)=f3 + C;	
2	➢ f:= 1/(x – sqrt(x)); ➢ f1:=changevar(sqrt(x)=u, Int(1/(x – sqrt(x)),x),u); ➢ f2:=simplify(f1), value (f2); ➢ f3:= subs(u=sqrt(x)); ➢ Int(f,x)=f3 + C;	
3	➢ f:= x*((x – 4)^(2/5);; ➢ f1:=changevar((x-4)^(1/5)=u, Int(x*((x – 4)^ (2/5),x),u); ➢ f2:=simplify(f1), value (f2); ➢ f3:= subs(u=(x-4)^(1/5)); ➢ Int(f,x)=f3 + C;	
4	➢ f:= sqrt(4 – x^2); ➢ f1:=changevar(x= 2*sin(u), Int(sqrt(4 – x^2),x),u); ➢ Int(f,x)=value(f1)+C; ➢ f2:= subs(sin(u)=(x)/2,u=arcsin(x)/2, value(f1) + C); ➢ f3:=simplify(subs(sin(u)=(x)/2, u=arcsin(x)/2,value(f1) + C)); ➢ Int(f,x) = f3;	
5	➢ f:= sqrt(a^2 –x^2); ➢ f1:=changevar(x=(a)*sin(u), Int(sqrt(a^2 – x^2),x),u); ➢ Int(f,x)=value(f1)+C; ➢ f2:= subs(sin(u)=x/a,u=arcsin(x/a), value(f1) + C); ➢ f3:=simplify(subs(sin(u)=(x/a), u=arcsin(x/a),value(f1) + C)); ➢ Int(f,x) = f3;	
6	➢ f:= sqrt(4 – 9*x^2); ➢ f1:=changevar(x=(2 /3)*sin(u),Int(sqrt(4 – 9*x^2),x),u); ➢ Int(f,x)=value(f1)+C; ➢ f2:= subs(sin(u)=(3*x)/2, u=arcsin(3*x/2), value(f1) + C); ➢ f3:=simplify(subs(sin(u)=(3*x)/2, u=arcsin(3*x/2),value(f1) + C)); ➢ Int(f,x) = f3;	
7	➢ f:= sqrt(x^2 - 4)/x; ➢ f1:=changevar(x=2*sec(u),Int(sqrt(x^2 - 4)/x, x=2..4),u); ➢ Int(f,x)=value(f1)+C; ➢ f2:= subs(sec(u)=x/2, u=arcsec(x/2), value(f1) + C); ➢ f3:=simplify(subs(sec(u)=(x)/2, u=arcsec(x/2),value(f1) + C)); ➢ Int(f,x=2..4) = f3;	
8	➢ f:= 1/(sqrt(9 + x^2)); ➢ f1:=changevar(x=3*tan(u), Int(sqrt (9 +x^2)/x, x),u); ➢ Int(f,x)=value(f1)+C; ➢ f2:= subs(tan(u)=x/3, u=arctan(x/3), value(f1) + C); ➢ f3:=simplify(subs(tan(u)=(x)/3, u=arctan(x/3),value(f1) + C)); ➢ Int(f,x) = f3;	

NO	Perintah MAPLE	Jawaban MAPLE
9	➢ f:= sqrt(x^2 - 4)/x; ➢ f1:=changevar(x=2*sec(u), Int(sqrt(x^2 - 4)/x, x=2..4),u); ➢ Int(f,x)=value(f1)+C; ➢ f2:= subs(sec(u)=x/2, u=arcsec(x/2), value(f1) + C); ➢ f3:=simplify(subs(sec(u)=(x)/2, u=arcsec(x/2),value(f1) + C)); ➢ Int(f,x=2..4) = f3;	
10	➢ f:= (2*x -3)/(sqrt(x^2 - 1)); ➢ f1:=changevar(x=1*sec(u), Int((2*x-3)/sqrt(x^2 - 1), x),u); ➢ Int(f,x)=value(f1)+C; ➢ f2:= subs(sec(u)=x/1, u=arcsec(x/1), value(f1) + C); ➢ f3:=simplify(subs(sec(u)=(x)/1, u=arcsec(x/1),value(f1) + C)); ➢ Int(f,x) = f3;	

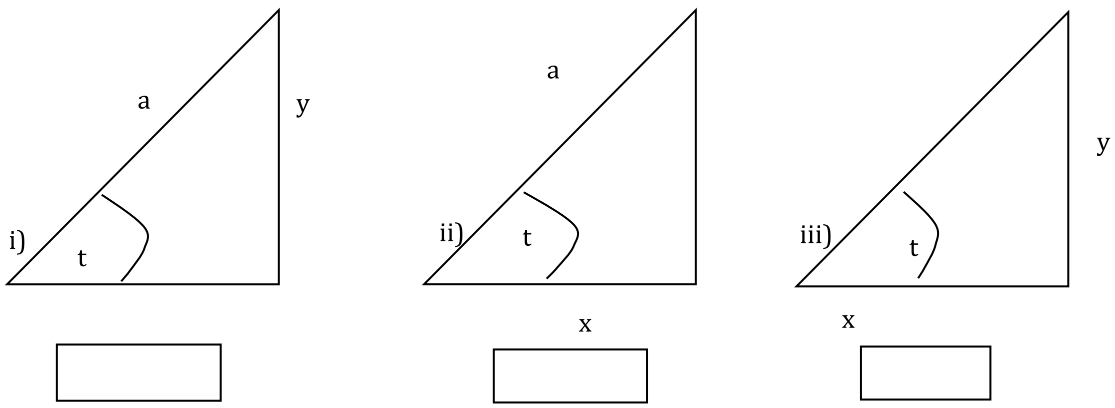
FASE DISKUSI KELOMPOK KECIL (WAKTU: 50 MENIT)

Diskusikanlah



1. Perhatikanlah segitiga siku-siku di atas, kemudian isilah titik berikut ini

sin (t) = ….	t = …	cos (t) = ….	t = …
tan (t)= ….	t = …	cot (t) = ….	t = …
sec (t)= ….	t = …	cosec (t)= ….	t = …



2. Perhatikanlah ketiga gambar di atas, isi dari kotak-kotak tersebut masing-masingnya adalah:

   a) ….   b) …,   c) …

3. Isilah Tabel berikut berdasarkan ketiga gambar di atas yang sudah diisi kotaknya

Gambar i)	Gambar ii)	Gambar iii)
sin (t) = ... t = ...	sin (t) = ... t = ...	sin (t) = ... t = ...
cos (t) = ... t = ...	cos (t) = ... t = ...	cos (t) = ... t = ...
tan (t) = ... t = ...	tan (t) = ... t = ...	tan (t) = ... t = ...
cot (t) = ... t = ...	cot (t) = ... t = ...	cot (t) = ... t = ...
sec (t)= .... t = ...	sec (t)= .... t = ...	sec (t)= .... t = ...
cosec (t)= .... t = ...	cosec (t)= .... t = ...	cosec (t)= .... t = ...

4. Perhatikanlah kembali Jawaban MAPLE pada Tabel 1 di atas. Salinlah Jawaban MAPLE untuk nomor 1, kemudian lakukan perhitungan integral tersebut secara manual, dengan mengikuti jawaban MAPLE dan info lainnya.
5. Lakukan cara yang sama untuk Jawaban MAPLE dalam soal yang menggunakan substitusi x = a sin t.
6. Lakukan cara yang sama untuk Jawaban MAPLE dalam soal yang menggunakan substitusi x = a tan t.
7. Lakukan cara yang sama untuk Jawaban MAPLE dalam soal yang menggunakan substitusi x = a sec t.

BAGIAN 2

Tabel 4. Substitusi yang Merasionalkan

NO	SOAL
1	$\int \boldsymbol{x\sqrt{x+1}\,dx}$
2	$\int \boldsymbol{\sqrt{9-x^2}\,dx}$
3	$\int \boldsymbol{\sqrt{x^2-\ 9}\ dx}$
4.	$\int \boldsymbol{\sqrt{x^2+\ 4}\ dx}$

NO	SOAL
5.	$\int \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\boldsymbol{x}^2 + \mathbf{4}\boldsymbol{x} + \mathbf{5}}} \boldsymbol{dx}$

FASE DISKUSI KELAS (WAKTU : 50 MENIT)

1. Pilihlah salah satu soal yang ada pada LKM-11, kemudian jelaskanlah dengan ringkas bagaimana caranya Anda menyelesaikan soal tersebut!
2. Pilihlah soal selain yang sudah terpilih pada pertanyaan no 1, kemudian jelaskanlah dengan ringkas bagaimana caranya Anda menyelesaikan soal tersebut!

LATIHAN DAN EVALUASI (WAKTU: 10 MENIT)

SOAL

Hitunglah

1) $\int x\sqrt[3]{x+1}\ dx$
2) $\int \frac{t}{\sqrt{3t+4}}$ dt

TUGAS (DIKERJAKAN DI RUMAH)

Hitunglah

a. $\int \frac{t}{\sqrt{4-3t4}}$ dt
b. $\int \frac{t}{\sqrt{t+4}}$ dt
c. $\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+4}}$ dx
d. $\int \frac{dt}{t^2\sqrt{t^2-4}}$ dt
e. $\int \frac{2x-3}{\sqrt{4-x^2}}$ dx
f. $\int \frac{1}{\sqrt{16+6x-x^2}}$ dx

*****SELAMAT BEKERJA SEMOGA SUKSES*****

LEMBAR KERJA

(LK- 12)

INTEGRAL PARSIAL

KALKULUS INTEGRAL BERBASIS MODEL APOS

NAMA KELOMPOK:

NAMA ANGGOTA:

1.
2.
3.
4.

FASE ORIENTASI (WAKTU 15 MENIT)

Integrasi Parsial

jika suatu integrasi menggunakan substitusi gagal, dimungkinkan menggunakan substitusi ganda, yang lebih dikenal dengan integral parsial. Metode ini didasarkan pada integrasi rumus untuk turunan hasil kali dua fungsi.

Andaikan u = u(x) dan v = v(x), maka

$$D_X[u(x)v(x)] = u(x)v'(x) + v(x)u'(x)$$

Atau u(x)v'(x)=$D_x[u(x)v(x)] - v(x)u'(x)$

Dengan mengintegrasikan kedua ruas persamaan tersebut kita memperoleh

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$$

Karena dv=v'(x) dx dan du=u'(x)dx, maka persamaan tersebut dapat ditulis:

(integral tak-tentu)

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

(integral tentu)

$$\int_a^b u\,dv = [uv]_a^b - \int_a^b v\,du$$

Untuk Penjelasan tentang Integrasi Parsial dapat dibaca di buku sumber utama Kalkulus edisi kesembilan jilid II halaman 5-9. Silahkan ajukan pertanyaan bila ada materi yang sukar dipahami.

FASE PRAKTIKUM (WAKTU 50 MENIT)

Integrasi Parsial

Gunakanlah pengetahuan yang telah Anda miliki untuk menjawab langsung (tinggalkan saja bila Anda belum bisa menjawabnya) pada kolom yang sudah disediakan, kemudian laksanakanlah perintah MAPLE yang ada pada Tabel 1 berikut ini tentang Integrasi Parsial

Tabel 1. Tabel Integrasi Parsial

NO	Perintah MAPLE	Jawaban MAPLE
1	➢ **restart; with(student):** ➢ **f := x -> x*exp(3*x);** ➢ **Int(f(x),x);** ➢ **u:=x;** ➢ **du:=diff(u,x);** ➢ **dv:=exp(3*x);**	

NO	Perintah MAPLE	Jawaban MAPLE
	➢ **v:=int(dv,x);** ➢ **f1:=(u*v) – Int(v*du,x);** ➢ **value(f1) + c;** ➢ **Int(f(x),x)=value(f1)+c;**	
2	➢ **f:= x -> x*exp(3*x);** ➢ **IP:=Int(f(x),x);** ➢ **intparts(Int(f(x),x),x);** ➢ **IP=value(%);**	
3	➢ **f:= x -> x*sqrt(x+1);** ➢ **Int(f(x),x);** ➢ **u:=x;** ➢ **du:=diff(u,x);** ➢ **dv:=sqrt(x+1);** ➢ **v:=int(dv,x);** ➢ **f1:=(u*v) – Int(v*du,x);** ➢ **value(f1) + c;** ➢ **Int(f(x),x)=value(f1)+c;**	
4	➢ **f:= x -> x*sqrt(x+1);** ➢ **IP:=Int(f(x),x);** ➢ **intparts(Int(f(x),x),x);** ➢ **IP=value(%);**	
5	➢ **f:= z -> z^3 ln(z);** ➢ **Int(f(z),z);** ➢ **u:=z^3;** ➢ **du:=diff(u,z);** ➢ **dv:=ln(z);** ➢ **v:=int(dv,z);** ➢ **f1:=(u*v) – Int(v*du,z);** ➢ **value(f1) + c;** ➢ **Int(f(z),z)=value(f1)+c;**	
6	➢ **f:= z -> z^3 ln(z);** ➢ **IP:= Int(f(z),z);** ➢ **intparts(Int(f(z),z),z^3);** ➢ **IP = value(%);**	
7	➢ **f:=x-> x*cos(x);** ➢ **Int(f(x),x);** ➢ **u:=x;** ➢ **du:=diff(u,x);** ➢ **dv:=cos(x);** ➢ **v:=int(dv,x);** ➢ **f1:=(u*v) – Int(v*du,x);** ➢ **value(f1) + c;** ➢ **Int(f(x),x)=value(f1)+c;**	
8	➢ **f:= x-> x*exp(x);** ➢ **Int(f(x),x);**	

NO	Perintah MAPLE	Jawaban MAPLE
	➢ **u:=x;** ➢ **du:=diff(u,x);** ➢ **dv:=exp(x);** ➢ **v:=int(dv,x);** ➢ **f1:=(u*v) – Int(v*du,x);** ➢ **value(f1) + c;** ➢ **Int(f(x),x)=value(f1)+c;**	
9	➢ **f:=x -> x^2*sin(x);** ➢ **Int(f(x),x);** ➢ **u:=x^2;** ➢ **du:=diff(u,x);** ➢ **dv:=sin(x);** ➢ **v:=int(dv,x);** ➢ **f1:=(u*v) – Int(v*du,x);** ➢ **value(f1) + c;** ➢ **Int(f(x),x)=value(f1)+c;**	
10	➢ **f:=x -> ln(x);** ➢ **Int(f(x),x=1..2) ;** ➢ **u:=ln(x);** ➢ **du:=diff(u, x) ;** ➢ **dv:=1 ;** ➢ **v:=int(dv,x);** ➢ **f1:=int(u*v,x=1..2) -Int(v*du, x=1..2);** ➢ **value(%);** ➢ **Int(f(x),x=1..2)=value(f1) +C;**	
11	➢ **f:=x -> exp(x)*sin(x);** ➢ **Int(f(x),x);** ➢ **u:=exp(x);** ➢ **du:=diff(u,x);** ➢ **dv:=sin(x);** ➢ **v:=int(dv,x);** ➢ **f1:=(u*v) – Int(v*du,x);** ➢ **value(f1) + c;** ➢ **Int(f(x),x)=value(f1)+c;**	
12	➢ **f:=x -> exp(x)*sin(x);** ➢ **Int(f(x),x);** ➢ **u:=exp(x);** ➢ **du:=diff(u,x);** ➢ **dv:=sin(x);** ➢ **v:=int(dv,x);** ➢ **f1:=(u*v) – Int(v*du,x);** ➢ **value(f1) + c;** ➢ **Int(f(x),x)=value(f1)+c;**	
13	➢ **f:= x-> exp(x)*sin(x);** ➢ **Int(f(x),x);** ➢ **u:=exp(x);**	

NO	Perintah MAPLE	Jawaban MAPLE
	➢ **du:=diff(u,x);** ➢ **dv:=sin(x);** ➢ **v:=int(dv,x);** ➢ **f1:=(u*v) – Int(v*du,x);** ➢ **value(f1) + c;** ➢ **Int(f(x),x)=value(f1)+c;** ➢	
14	➢ **f:= x-> x*sin(3*x) ;** ➢ **Int(f(x),x);** ➢ **u:= x;** ➢ **du:=diff(u,x);** ➢ **dv:= sin(3*x);** ➢ **v:=int(dv,x);** ➢ **f1:=(u*v) – Int(v*du,x);** ➢ **value(f1) + c;** ➢ **Int(f(x),x)=value(f1)+c;**	
15	➢ **f:=x ->x^2*cos(x) ;** ➢ **Int(f(x),x);** ➢ **u:=x^2;** ➢ **du:=diff(u,x);** ➢ **dv:= cos(x);** ➢ **v:=int(dv,x);** ➢ **f1:=(u*v) – Int(v*du,x);** ➢ **value(f1) + c;** ➢ **Int(f(x),x)=value(f1)+c;**	
16	➢ **f:= x->ln(3*x) ;** ➢ **Int(f(x),x);** ➢ **u:=ln(3*x);** ➢ **du:=diff(u,x);** ➢ **dv:= 1;** ➢ **v:=int(dv,x);** ➢ **f1:=(u*v) – Int(v*du,x);** ➢ **value(f1) + c;** ➢ **Int(f(x),x)=value(f1)+c;**	
17	➢ **f:= x->ln^2(x^20);** ➢ **Int(f(x),x);** ➢ **u:= ln^2(x^20);** ➢ **du:=diff(u,x);** ➢ **dv:= 1;** ➢ **v:=int(dv,x);** ➢ **f1:=(u*v) – Int(v*du,x);** ➢ **value(f1) + c;** ➢ **Int(f(x),x)=value(f1)+c;**	
18	➢ **f:= x -> ln^2(x^20);** ➢ **IP:=Int(f(x),x);** ➢ **intparts(Int(f(x),x), ln^2(x^20));** ➢ **IP=value(%);**	

FASE DISKUSI KELOMPOK KECIL (WAKTU: 50 MENIT)

Diskusikanlah

Perhatikanlah Tabel 1 di atas, kemudian jawablah pertanyaan berikut:

1. Perhatikanlah perintah MAPLE dan Jawaban MAPLE untuk no 1 dan no 2 yang terdapat pada Tabel 1 di atas. Kemudian jawablah dengan ringkas kesimpulan apa yang Anda peroleh dari no 1 dan no 2 tersebut.
2. Apa keunggulan cara menyelesaikan menurut no 1?
3. Apa keunggulan cara menyelesaikan menurut no 2?
4. Salinlah kembali salah satu perintah dan jawaban MAPLE untuk menyelesaikan soal integrasi pada Tabel 1 di atas. Diskusikanlah dan jelaskanlah dengan ringkas bagaimana caranya Anda menyelesaikan soal tersebut tanpa bantuan komputer!

BAGIAN 2

Tabel 2. Integrasi Parsial

NO	SOAL
1	$\int x\, cos\ 2x\ dx$
2	$\int \frac{\ln x}{x^2}$
3	$\int 3x\ \mathrm{e}\text{^}x\ dx$

FASE DISKUSI KELAS (WAKTU : 50 MENIT)

Pilihlah salah satu soal yang ada pada LKM-12, kemudian jelaskanlah bagaimana cara Anda menyelesaikan soal tersebut.

LATIHAN DAN EVALUASI (WAKTU: 10 MENIT)

SOAL
Hitunglah

1) $\int x \cos 2x \, dx$
2) $\int 5x \sin x \, dx$

TUGAS (DIKERJAKAN DI RUMAH)

Hitunglah integral di bawah ini.

a. $\int t^2 \ln t \;\, dt$
b. $\int \ln(7x^5) \, dx$
c. $\int t^5 \ln t^2 dt$
d. $\int 3x \, e^{3x} dx$
e. $\int x^2 e^{2x} \, dx$
f. $\int x\text{^}2 \cos x \, dx$
g. $\int x \cos 2x \, dx$
h. $\int e^x \sin x \;\, dx$
i. $\int \sin(\ln x) \;\, dx$
j. $\int e^x \cos x \, dx$

*****SELAMAT BEKERJA SEMOGA SUKSES*****

LEMBAR KERJA

(LK- 13)

INTEGRASI FUNGSI RASIONAL

KALKULUS INTEGRAL

BERBASIS

MODEL APOS

NAMA KELOMPOK:

NAMA ANGGOTA:

1.
2.
3.
4.

FASE ORIENTASI (WAKTU 15 MENIT)

Integrasi Fungsi Rasional

Suatu fungsi rasional adalah hasil bagi dua fungsi polinomial. Contoh fungsi rasional adalah:

$$f(x) = \frac{2}{(x+1)^3}, g(x) = \frac{2x+2}{x^2-4x+8}, h(x) = \frac{x^5+2x^3-x+1}{x^3+5x}$$

Fungsi f dan g adalah **fungsi rasional sejati** (*proper rational function*) bermakna bahwa derajat pembilang lebih kecil daripada derajat penyebut. Fungsi rasional tak-sejati selalu dapat ditulis sebagai penjumlahan suatu fungsi polinomial dan suatu fungsi rasional sejati, oleh karena polinomial-polinomial mudah diintegrasi, maka persoalan mengintegrasi fungsi rasional sebenarnya adalah persoalan mengintegrasi fungsi rasional sejati. Penjelasan tentang Integrasi Fungsi Rasional dapat dibaca pada buku sumber Kalkulus edisi kesembilan jilid II halaman 22. Menurut definisi, fungsi rasional adalah hasil bagi dua fungsi polinomial. Untuk mengintegrasi bentuk fungsi rasional in dibutuhkan ketuntasan pada materi sebelumnya yaitu substitusi dan parsial. Silakan ajukan pertanyaan bila ada yang sukar dipahami.

FASE PRAKTIKUM (WAKTU 50 MENIT)

Integrasi Fungsi Rasional

Gunakanlah pengetahuan yang telah Anda miliki untuk menjawab langsung (tinggalkan saja bila Anda belum bisa menjawabnya) pada kolom yang sudah disediakan, kemudian laksanakanlah perintah MAPLE yang ada pada Tabel 1berikut ini tentang Integrasi Fungsi Rasional.

Tabel 1. Integrasi Fungsi Rasional

NO	Perintah MAPLE	Jawaban MAPLE
1	➢ **restart; with(student):** ➢ **f :=(2*x +2)/(x^2 -4*x +6);** ➢ **convert(f, parfrac, x);** ➢ **Int(f,x)=int(f,x);**	
2	➢ **f :=(3*x-1)/(x^2-x-6);** ➢ **convert(f, parfrac, x);** ➢ **Int(f,x)=int(f,x);**	
3	➢ **f:=(5*x+3)/(x^3-2*x^2-3*x);** ➢ **convert(f, parfrac, x);** ➢ **Int(f,x)=int(f,x);**	

NO	Perintah MAPLE	Jawaban MAPLE
4	➢ **f:=x/(x-3)^2;** ➢ **convert(f, parfrac, x);** ➢ **Int(f,x)=int(f,x);**	
5	➢ **f:=(3*x^2 – 8*x +13)/((x + 3)*(x-1)^2);** ➢ **convert(f, parfrac, x);** ➢ **Int(f,x)=int(f,x);**	
6	➢ **f:=(6*x^2-3*x+1)/(4*x +1)*(x^2 + 1);** ➢ **convert(f, parfrac, x);** ➢ **Int(f,x)=int(f,x);**	
7	➢ **f:=(6*x^2-15*x+22)/(x +3)*(x^2 + 2);** ➢ **convert(f, parfrac, x);** ➢ **Int(f,x)=int(f,x);**	
8	➢ **f:= (x^3+x)/(x^2-1);** ➢ **convert(f, parfrac, x);** ➢ **Int(f,x)=int(f(x),x);**	
9	➢ **f:=(x - 3)/(2*x^3 - x^2 – 3*x);** ➢ **convert(f, parfrac, x);** ➢ **Int(f,x)=int(f,x);**	
10	➢ **f:=3* x/(x + 2)^2;** ➢ **convert(f, parfrac, x);** ➢ **Int(f,x)=int(f,x);**	
11	➢ **f:= (x^2 – x + 12)/((x+3)*(x^2 +2)^2);** ➢ **convert(f, parfrac, x);** ➢ **Int(f,x)=int(f,x);**	
12	➢ **f:= (3* x + 13)/(x^2 +3*x-10);** ➢ **convert(f, parfrac, x);** ➢ **Int(f,x)=int(f,x);**	
13	➢ **f:= (x^3 + x^2)/(x^2 +5*x + 6);** ➢ **convert(f,parfrac, x);** ➢ **Int(f,x)=int(f,x);**	
14	➢ **f:= (3*x + 13)/(x^2 + 4*x +3);** ➢ **convert(f, parfrac, x);** ➢ **Int(f,x=1..5)=int(f,x=1..5);**	

Catatan:

Keterbatasan langkah dan cenderung dapat jawaban langsung tentang hasil penghitungan integral fungsi rasional, membuat minimnya informasi yang bisa diberikan. Untuk itu Anda harus membaca buku Kalkulus jilid oleh Prrcell, dkk.

FASE DISKUSI KELOMPOK KECIL (WAKTU: 50 MENIT)

Diskusikanlah

1. Perhatikanlah perintah dan jawaban MAPLE nomor 1 Tabel 1 di atas, kemudian jawablah pertanyaan atau perintah berikut: Coba diperhatikan fungsi pada pembilang dan fungsi pada penyebut pada integral yang akan diselesaikan. Periksalah kembali catatan Anda kapan suatu integral hasilnya berupa ln u + C, kapan pula berupa $\tan^{-1}$ u + C..
   Diskusikanlah, bagaimana cara mendapatkan jawaban MAPLE tersebut tanpa menggunakan komputer.
2. Perhatikanlah perintah dan jawaban MAPLE nomor 2 Tabel 1 di atas. Jawaban terakhir dalam bentuk ln u + C. Supaya bisa jawaban berbentuk ln u + C, maka dapat Anda lihat bahwa penyebut pada soal integral telah difaktorkan. Dapatkah Anda menemukan dari mana datangnya penyebut pada soal integral berubah menjadi (x + 2) atau (x – 3)? Bagaimana pula caranya untuk memperoleh angka pada pembilang? Bukalah buku Kalkulus untuk membantu Anda menjawabnya.
3. Lakukan dengan cara yang serupa untuk soal-soal lainnya, sehingga Anda mampu memahami bagaimana mendapatkan dan menyelesaikan masing-masing perintah dan jawaban MAPLE yang ada pada Tabel 1 di atas.

BAGIAN 2

Tabel 4. Integrasi Fungsi Rasional

NO	SOAL/JAWAB
1	$\int \frac{2}{x^2+3x}dx$
2	$\int \frac{5x}{2x^3+6x^2}dx$
3	$\int \frac{2x^2+x-4}{x^3-x^2+2x}dx$
4	$\int \frac{x+1}{(x\ \ -3)^\wedge 2}dx$

NO	SOAL/JAWAB
5	$\int \frac{3x+2}{(X-2)+(3-x)}dx$

FASE DISKUSI KELAS (WAKTU : 50 MENIT)

1. Pilihlah soal yang ada pada LKM-13, kemudian jelaskanlah di depan kelas bagaimana cara menyelesaikan soal tersebut secara manual!

LATIHAN (WAKTU: 10 MENIT)

SOAL

Hitunglah

1. $\int \frac{5}{x^2-4}dx$
2. $\int \frac{17x-3}{-x^2+x-2}dx$

TUGAS (DIKERJAKAN DI RUMAH)

a. $\int \frac{7x^2+2x-3}{(2x-1)(3x+2)(x-3)}dx$

b. $\int \frac{6x^2+22x-23}{(2x+1)(x^2+x-6)}dx$

c. $\int \frac{x^3}{x^2+x-2}dx$

d. $\int \frac{3x+2}{x^3+3x^2+3x+1}dx$

e. $\int \frac{2x^2+x-8}{x^3+4x}dx$

f. $\int \frac{2}{(x-1)^2(x+4)}dx$

g. $\int \frac{\cos t}{sin^2 t-16}dx$

*****SELAMAT BEKERJA SEMOGA SUKSES*****

BAB VI
INTEGRAL TAK WAJAR

Dalam definisi $\int_a^b f(x)\,dx$, diasumsikan bahwa interval [a,b] adalah terhingga. Namun demikian, dalam banyak penerapan fisika, ekonomi, dan probabilitas, kita ingin mengubah a dan b menjadi $\infty\ dan - \infty$. Integral dengan limit tak hingga seperti ini disebut juga integral tak wajar, yang menjadi pokok bahasan pada bab ini.

Sebuah limit tak terhingga. Tinjau fungsi f(x) =xe^{-x}. Sangat masuk akan untuk menanyakan $\int_0^b xe^{-x}$dx , di mana b adalah sebarang bilangan positif . ketika kita memperbesar limit atas integral tentu maka nilai integral juga bertambah besar tetapi kelihatannya tidak tanpa batas.

Definisi

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

Jika limit-limit pada ruas kana nada dan mempunyai nilai-nilai terhingga, maka kita katakan bahwa integral tak wajar yang bersangkutan konvergen dan memiliki nilai-nilai itu. Jika tidak, integral disebut divergen.
Kedua limit tak terhingga. Lalu kita dapat mendefinisikan untuk $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$

Definisi

Jika $\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx$ dan $\int_{0}^{\infty} f(x)\,dx$ keduanya konvergen, maka $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ dikatakan konvergen dan mempunyai nilai

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\infty} f(x)\,dx$$

Jika tidak, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ divergen

Demikianlah definisi-definisi tentang integral tak wajar yang akan menjadi modal kita dalam memahami dan menjalani lembar kerja LK-14 Integral Tak Wajar.

LEMBAR KERJA

(LK- 14)

INTEGRAL TAK WAJAR

KALKULUS INTEGRAL

BERBASIS

MODEL APOS

NAMA KELOMPOK:

NAMA ANGGOTA:

1.
2.
3.
4.

FASE ORIENTASI (WAKTU 15 MENIT)

Integrasi Tak Wajar

Penjelasan tentang Integral Tak Wajar dapat dibaca pada buku sumber utama Kalkulus edisi kesembilan jilid II halaman 51. Dalam definisi $\int_a^b f(x)dx$, diasumsikan bahwa integra [a,b] adalah terhingga. Namun demikian, dalam banyak penerapan fisika, ekonomi, dan probabilitas, kita ingin mengubah a atau b (atau keduanya) menjadi $\infty\ atau - \infty$. Oleh karena itu kita harus mencari cara untuk memberikan makna pada lambang seperti:

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx, \int_{-\infty}^{-1} xe^{-x^2}\,dx,\ \int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-x^2}dx$$

Integral seperti ini dinamakan **integral tak-wajar** (*improper integral*) dengan limit tak-terhingga. Atau dapat diartikan bahwa dalam sebuah definisi limit integrasi yang tak berhingga dinamakan integrasi tak wajar. Penguasaan materi menuntut penguasaan materi sebelumnya, yaitu integrasi parsial. Silakan ajukan pertanyaan bila ada materi yang sukar di pahami.

FASE PRAKTIKUM (WAKTU 50 MENIT)

Integral Tak Wajar

Gunakanlah pengetahuan yang telah Anda miliki untuk menjawab langsung (tinggalkan saja bila Anda belum bisa menjawabnya) pada kolom yang sudah disediakan, kemudian laksanakanlah perintah MAPLE yang ada pada Tabel 1 tentang Integral Tak Wajar.

Tabel 1. Integral Tak Wajar

NO	Perintah MAPLE	Jawaban MAPLE
	Limit Tak Hingga dan Limit di Tak Hingga	
1	➢ **Limit((sin(x)-2*x)/x,x=0)= limit((sin(x)-2*x)/x,x=0);**	
2	➢ **Limit((sec(x)+1)/tan(x),x=pi/2)=limit((sec(x)+1)/tan(x),** ➢ **x=pi/2);**	
3	➢ **Limit(sin(x)/x,x=0)= limit(sin(x)/x,x=0);**	
4	➢ **Limit((x^2-9)/(x^2-x-6),x=3)= limit((x^2-9)/(x^2-x-6),x=3);**	
5	➢ **Limit((f(x)-f(a))/(x-a),x=a)= limit((f(x)-f(a))/(x-a),x=a);**	
6	➢ **Limit((tan(2*x))/ln(1+x),x=0)= limit((tan(2*x))/ln(1+x),x=0);**	
7	➢ **Limit((sin(x)-x)/x^3,x=0)= limit((sin(x)-x)/x^3,x=0);**	
8	➢ **Limit((x^2+3*x-10)/(x^2-4*x+4),x=2)=limit((x^2+3*x-10)/ (x^2-4*x+4),x=2);**	
9	➢ **Limit(ln(x)/cot(x),x=0)= limit(ln(x)/cot(x),x=0);**	
10	➢ **Limit((x/(x-1))-(1/ln(x)),x=1)= limit((x/(x-1))-(1/ln(x)),x=1);**	
11	➢ **Limit(exp(x), x=infinity);limit(exp(x), x=infinity);**	

NO		Perintah MAPLE	Jawaban MAPLE
12	➢	Limit(exp(x), x= -infinity);limit(exp(x), x= -infinity);	
13	➢	Limit(tan(x), x=infinity)=limit(tan(x), x=infinity);	
14	➢	Limit((x^2-2*x)/(2*x^2+1), x= infinity)= limit((x^2-2*x)/ (2*x^2 + 1), x= infinity);	
15	➢	Limit((x^3-x^2-2*x)/(2*x^3 + 3*x), x= - infinity) =limit((x^3-x^2-2*x)/(2*x^3 + 3*x), x= infinity);	
		Intergral Tak Wajar	
16	➢	f:=x->1/((x-1)^(1/2));	
	➢	Int(f(x),x=1..2)=int(f(x),x=1..2);	
17	➢	g:=x->1/((5 - x)^(1/2));	
	➢	Int(g(x),x=1..5)=int(g(x),x=1..5);	
18	➢	h:=x->1/((x - 2)^(1/2));	
	➢	Int(h(x),x=1..3)=int(h(x),x=1..3);	
19	➢	f:=x-> x/(1+x^2)^2;	
	➢	Int(f(x),x=0..infinity)= int(f(x),x=0..infinity);	
20	➢	f:=x-> x/(1+x^2)^2;	
	➢	Int(f(x),x= -infinity..0) =int(f(x),x=infinity..0);	
21	➢	f:=x-> x/(1+x^2)^2;	
	➢	Int(f(x),x= -infinity..infinity)= int(f(x),x= -infinity..infinity);	
22	➢	g:=x-> x/(1+x^2);	
	➢	Int(g(x),x=0..infinity)=int(g(x),x=0..infinity);	
23	➢	g:=x-> x/(1+x^2);	
	➢	Int(g(x),x= -infinity..0) = int(g(x),x=infinity..0);	
24	➢	g:=x-> x/(1+x^2);	
	➢	Int(g(x),x= -infinity..infinity)=int(g(x),x= -infinity..infinity);	

FASE DISKUSI KELOMPOK KECIL (WAKTU: 50 MENIT)

Diskusikanlah

Perhatikanlah jawaban MAPLE pada Tabel 1 di atas, kemudian jawablah pertanyaan berikut:

1. Periksalah nilai limit fungsi pada jawaban MAPLE untuk perintah no 1–15. Berapa nilai pembilang dan berapa nilai penyebutnya dari masing-masing fungsi (pilih 3 fungsi) pilihan Anda!
2. Bacalah buku Kalkulus untuk mendapatkan jawaban kapan suatu limit bisa diselesaikan dengan cara menurunkan fungsi pada pembilang dan menurunkan fungsi pada penyebut!
3. Jelaskanlah dengan ringkas bagaimana cara Anda menyelesaikan perintah no 16 tanpa bantuan komputer!
4. Jelaskanlah dengan ringkas bagaimana cara Anda menyelesaikan perintah no 17 tanpa bantuan komputer!
5. Jelaskanlah dengan ringkas bagaimana cara Anda menyelesaikan perintah no 18 tanpa bantuan komputer!

6. Jelaskanlah dengan ringkas bagaimana cara Anda menyelesaikan perintah no 19 tanpa bantuan komputer!
7. Jelaskanlah dengan ringkas bagaimana cara Anda menyelesaikan perintah no 20 tanpa bantuan komputer!
8. Jelaskanlah dengan ringkas bagaimana cara Anda menyelesaikan perintah no 21 tanpa bantuan komputer!

BAGIAN 2

Tabel 2. Integral Tak Wajar

NO	SOAL/JAWAB
1	$\int_0^2 \frac{5}{x-2}\,dx$
2	$\int_2^4 \frac{5}{2-x}\,dx$
3	$\int_0^4 \frac{5}{x-2}\,dx$
4	$\int_0^\infty x(1+x^2)\text{^}2\ dx$
5	$\int_{-\infty}^0 x(1+x^2)\text{^}2\ dx$
6	$\int_{-\infty}^\infty x(1+x^2)\ dx$

FASE DISKUSI KELAS (WAKTU : 50 MENIT)

1. Jelaskanlah dengan ringkas dan berikan contoh kapan dikatakan suatu integral tak wajar!
2. Jelaskanlah dengan ringkas bagaimana cara menyelesaikan soal no 3 LKM-14!
3. Jelaskanlah dengan ringkas bagaimana cara menyelesaikan soal no 6 LKM-4!

TUGAS (DIKERJAKAN DI RUMAH)

SOAL
Hitunglah

1. $\int_3^4 \frac{1}{x^2-2*x-3}\,dx$
2. $\int_0^4 \frac{2}{x-4}\,dx$
3. $\int_0^3 \frac{x}{x\wedge 2-4}\,dx$
4. $\int_0^\infty \frac{x}{\sqrt{(x^2+1)}}\,dx$
5. $\int_{-\infty}^0 \frac{x}{\sqrt{(x^2+1)}}\,dx$
6. $\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{\sqrt{(x^2+1)}}\,dx$

*****SELAMAT BEKERJA SEMOGA SUKSES*****

DAFTAR PUSTAKA

Ari, Rosihan. 2008. *Kalkulus Dengan MAPLE*. www.scribd.com/doc/.../Kalkulus-Dengan-Maple

Martono, Koko. 1999. *Kalkulus*. Bandung: Erlangga.

Rachmatin, Dewi. t.t. *Hands-Out Program Aplikasi Komputer Matematika*. Jurusan Pendidikan Matematika Fakultas Pendidikan Matematika dan IPA. Universitas Pendidikan Indonesia. *file.upi.edu/.../FPMIPA/...MATEMATIKA/...DEWI_R...*

Sahid. 2003. *Komputer sebagai Media Pembelajaran Matematika Penggunaan MAPLE untuk Pembelajaran Kalkulus*. staff.uny.ac.id/sites/default/.../12_Maple4 Kalkulus.pd

Varberg, Purcell, Rigdon. 2010. *Kalkulus. Edisi Kesembilan Jilid 1*. Jakarta: Erlangga.

Varberg, Purcell, Rigdon. 2010. *Kalkulus*. Edisi Kesembilan Jilid 1I. Jakarta: Erlangga.

______. t.t. *Bab VII Integral*. depsi.fst.unair.ac.id/wp-content/.../Bab-7.-Integral.pdf

______. 2011. *MAPLE*. *mahdi47.files.wordpress.com/2011/09/Maple5.doc*

______. 2007. *Maple 11 Help.*

______. 2013. *Maple 17.00 Help.*

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

IDENTITAS

1. Nama : Dr. Dra. Hanifah, M.Kom
2. Tempat/Tgl. Lahir : Sungai Tanang, Agam, 15 Agustus 1962
3. Jenis Kelamin : Perempuan
4. Agama : Islam
5. NIP : 196208151986032024
6. Pangkat/Golongan : Pembina Utama Muda / IVc
7. Jabatan Fungsional : Lektor Kepala
8. Alamat Rumah : Jl. KS. Tubun 4 No 29 Lingkar Barat Bengkulu
   HP. 085365031961

PENDIDIKAN

Macam Pendidikan	Tempat	Tahun		Gelar	Bidang Ilmu
		Masuk	Tamat		
SD	\Sungai Tanang	1968	1974	-	-
SMP	Banuhampu	1975	1977	-	-
SMA	SMA N 2 Bukittinggi	1978	1979	-	IPA
Sarjana (S-1)	FKIE IKIP Padang	1981	1984	Dra.	Matematika
Pascasarjana (S-2)	Fasilkom Universitas Indonesia	1997	1999	M.Kom	Ilmu Komputer
Pascasarjana (S-3)	Universitas Negeri Padang	2010	2015	Dr.	Ilmu Pendidikan Konsentrasi MIPA

PENGALAMAN KERJA

No	Jabatan	Tahun Akademik
1	Dosen Matematika FKIP UNIB	1986 s.d 2000
2	Dosen Matematika FMIPA	2000 s.d 2007
3	Dosen Teknik Informatika FT UNIB	2007 s.d 2015
4	Dosen S2 Pendidkan Matematika FKIP UNIB	2015 s.d s2019
5	Dosen S1 Pendidkan Matematika FKIP UNIB	2019 s.d. Sekarang

PENGALAMAN PROFESIONAL (PELATIHAN/LOKAKARYA)

No	Lembaga Penyelenggara	Bidang Ilmu	Thn
1	ORACLE Academy	Java Fundamentals and Programming	2016
2	ORACLE Academy	Database Design and Programming with SQL	2015
3	ITS	Workshop Metode Pembelajaran Matematika SMA Berbasis Kurikulum 2013	2014
4	UNP	Workshop on Educational & Design Research	2013
5	UNP	Workshop “The Use of Contextualized Tasks to Foster Mathematics Learning”	2012
6	UGM	Peningkatan Keterampilan Analisis Sistem	2007
7	GECC UGM	Magang Bidang Sistem Informasi Manajemen	2006
8	IPB	Pelatihan Pemodelan Matematika, Pengembangan dan Implementasinya dalam Komputer	2002
9	IKIP Bandung dan ITB	Pelatihan Pengelola Laboratorium PMIPA LPTK	1995
10	Universitas Indonesia	Pra-Pascasarjana Ilmu Komputer	1996/ 1997
11	Heds Project, USU	Training in Engineering Design	1999
12	Heds Project, UNIB	“Mathematical Modeling” Workshop	1996
13	Heds Project, UNIB	Seminar & Pertemuan Bersama MIPA UNIB	1994
14	Heds Project. UNIB	The Comoputational Physics	1993
15	Heds Project, UNIB	Lokakarya Rancangan Sistem Instruksional	tt
16 17	Heds Project, USU	Short Course on Basic Mathematics	1992
18	Heds Project, USU	Training on Technique of Evaluation Education on Basic Science	1991
19	ITB	PRA-S2 Program Studi Matematika	1990

PENGALAMAN KERJA DALAM PENELITIAN

No	Institusi	Judul	Jabatan	Periode Kerja
1	Mandiri	Penggunaan Internet Sebagai Media Pembelajaran (Studi Kasus pada PBM Matakuliah Struktur Data & Algoritma di UNIB TA 2005	Ketua	2005
2	Mandiri	Kesalahan dalam Menyelesaikan Soal Pertidaksamaan dan Nilai Mutlak (Studi Kasus Pretest Matematika Oleh Peserta Matrikulasi Program Teknik UNIB TA 2005)	Ketua	2005
3	PPD Heds project	Analisis Sistem Informasi Perpustakaan UNIB	Ketua	2001

4	Mandiri	Perancangan Sistem Informasi yang Berorientasi Objek (Studi Kasus di Rumah Sakit Anu)	Ketua	2001
5	Mandiri	Praktikum Versus Download di Internet untuk Matakuliah Struktur Data dan Algoritma oleh Mahasiswa Matematika FMIPA UNIB TA 2005	Ketua	2006
6	Mandiri	Membangun Sistem Informasi Berbasis Komputer untuk Menyonsong Era Globalisasi	Ketua	2001
7	Mandiri	Analisis Kesalahan Mahasiswa TI FT UNIB TA 2009 Dalam Menyelesaikan Soal UTS Kalkulus I	Ketua	2010
8	Mandiri	Analisis Kesalahan Mahasiswa TI FT UNIB TA 2009 Dalam Menyelesaikan Soal UAS Kalkulus I	Ketua	2010
9	Mandiri	Implementasi Pembelajaran Terpusat mahasiswa dengan Model l Pembelajaran Berkelompok Pada Matakuliah Struktur Data & Algoritma di UNIB	Ketua	2012
10	Mandiri (Tugas Akhir S2)	Perencanaan Sistem Informasi yang Strategis di UNIB	Ketua	1999
11	Mandiri (Disertasi)	Pengembangan Model Pembelajaran Kalkulus Berdasarkan Teori APOS	Ketua	2015
12	Mandiri	Implementasi Model Pembelajaran Kalkulus Berdasarkan Teori APOS {MPK-APOS) di Prodi Teknik Informatika FT UNIB	Ketua	2016
13	Mandiri	Implementasi Model APOS Berbantuan GeoGebra pada Matakuliah Geometri Transformasi Pada Mahasiswa Semester 3 Kelas A Prodi Matematika FKIP UNIB TA 2016/ 2017	Ketua	2017
14	Mandiri	Implementasi Model Pembelajaran Matematika Berdasarkan Teori APOS {Model APOS) Pada Mahasiswa Semester 3 Kelas A Prodi Matematika FKIP UNIB TA 2017/ 2018	Ketua	2018
15	Mandiri	Implementasi Buku Ajar Kalkulus Berbasis Model APOS Pada Mahasiswa Semester 3 Kelas A Prodi Matematika FKIP UNIB TA 2018/ 2019	Ketua	2019
16	Mandiri	Penambahan *Scaffolding* Pada Buku Ajar Kalkulus Integral Berbasis Model Apos Upaya Peningkatan Hasil Belajar Mahasiswa Pada Matakuliah Kalkulus Integral Di Kelas B Prodi Matematika Fkip Unib Ta 2019/2020	Ketua	2019/20 20 (Dalam Proses)

PUBLIKASI

a) “Pengelolaan Jaringan (*Network Management)* “TRIADIK Kajian Pendidikan dan Kebudayaan Nomor 9 Tahun 6, Maret 2000. ISBN 8055 8501. Jurnal Ilmiah FKIP UNIB
b) Pelatihan Komputer “Aplikasi Perkantoran” Bagi Guru dan Staf tata Usaha SMP/SMU/SMK Se-Kodya Bengkulu). Dharma Raflesia Jurnal Ilmiah Pengembangan dan Penerapan Ipteks, Volume 3, Nomor 2 Desember 2005.Diterbitkan oleh Lembaga Pengabdian Masyarakat UNIB

c) Analisis Kesalahan Peserta PLPG Matematika Di FKIP UNIB TA 2017 Dalam Menyelesaikan Soal Pertidaksamaan. Triadik Jurnal Ilmiah Pendidikan. April 2017, Vol.16 No 1. Penerbit FKIP UNIB Press.
d) Penerapan Lembar Kerja berbasis Model Akis, Proses, Objek, dan Skema (APOS) Pada Matakuliah Kalkulus Integral Pokok bahasan Teknik Integrasi Substitusi Yang Merasionalkan. Jurnal Pendidikan Eksakta, Vol.2 No 6, Januari 2018
e) Model APOS. Inovasi Pada Pembelajaran Matematika. 2016. FKIP UNIB Press. ISBN : ISBN 978 – 602 – 8043 – 52 – 6 (Buku)
f) Buku Ajar Kalkulus Integral Berbasis Model APOS Berbantuan Maple. FKIP UNIB Press. ISBN : ISBN 978-602-8043-82-3 (Buku)
g) Model APOS. Pembelajaran Berbantuan Komputer. 2018. CV. Zigie Utama
h) Implementation of mathematics learning model based on theory: Action, process, object, scheme (APOS model) on improper integral subject. 2019. International Journal of Scientific and Technology Research
i) The effectivity of APOS model based worksheets on the improper integral. 2019. Journal of Physics: Conference Series.
j) Learning integration techniques by APOS model and analysis of student’s error. 2019. International Journal of Scientific and Technology Research
k) Respon Siswa Sma N 1 Kota Bengkulu Terhadap Lkpd Model Apos Dengan Pendekatan Saintifik. 2019. Dharma Raflesia Unib Tahun XVII, Nomor 1 Juni 2019 14
l) Perbandingan hasil belajar matematika peserta didik menggunakan pendekatan realistic mathematics education dengan pendekatan saintifik di SMP Negeri 14 Kota Bengkulu. 2019. PENDIPA Journal of Science Education, 2019: 3(3), 125-131 ISSN 2086-9363
m) Membangun Kemampuan Pemecahan Masalah dan Kreativitas Mahasiswa Melalui Penugasan Pembuatan Alat Peraga Program Linear. PENDIPA Journal of Science Education, 2020: 4(1), 17-23 ISSN 2086-9363

PENGALAMAN PENGABDIAN PADA MASYARAKAT

No	Judul	Status	Tahun	Sponsor
1	Memberikan Pelatihan Penggunaan MS Excel Untuk Mengolah Nilai pada Guru-Guru SMA N 4 Bengkulu	Ketua	2010	Mandiri
2	Pembicara pada Kuliah Umum Sehari Informatika “Teori Graf dan Implementasinya pada Search Engine”	Anggota	2015	UMB dan UNIVED
3	Sosialisasi Model Pembelajaran Kalkulus Berdasarkan Teori APOS (MPK-APOS) Berbantuan Maple Kepada Guru MAN Model 1 Kota Bengkulu	Ketua	2016	Mandiri
4	Memberikan Pelatihan Pembuatan Alat Peraga Bidang Matematika	Anggota	2017	RBA FKIP

No	Judul	Status	Tahun	Sponsor
5	Pelatihan Pengembangan Perangkat Pembelajaran Berbasis Model APOS Berbantuan Komputer Dengan Pendekatan Saintifik Kepada Guru-Guru Matematika & IPA SMA N I Kota Bengkulu	Ketua	2018	RBA FKIP
6	Memberikan Pelatihan tentang Penelitian Tindakan Kelas Kepada guru MGMP bidang Matematika SLTP /SLTA Kota Bengkulu	Anggota	2019	Prodi Pendidikan Matematika

DAFTAR MAKALAH YANG DISEMINARKAN/DILOKAKARYAKAN DAN SEJENISNYA

No	Judul Makalah	Waktu,tempat kegiatan	Penyelenggara
1	Pengembangan Model Kalkulus Berdasarkan Teori APOS	22 Oktober 2015 FMIPA UNP	FMIPA UNP
2	Pengembangan Model Pembelajaran Kalkulus II Berdasarkan Teori APOS Dimuat pada prosiding Seminar Nasional Pendidikan Matematika ISBN 978-602-17108-4-5	14 Maret 2014 S2 Pendidikan Matematika FKIP UNIB	S2 Pendidikan Matematika FKIP UNIB
3	Uji Efektifitas Model Pembelajaran Kalkulus II Berdasarkan Teori APOS. Dimuat pada Proceeding 2014 Education International Seminar ISBN: 978-602-17125-6-6	22-24 November 2014 Fakultas Ilmu Pendidikan UNP	Fakultas Ilmu Pendidikan UNP
4	Uji Kepraktisan Model Pembelajaran Kalkulus II Berdasarkan Teori APOS. Dimuat pada Prosiding Seminar Nasional Pendidikan MIPA 2014 ISBN 978-602-19877-2-8	1 November 2014 FMIPA UNP	FMIPA UNP
5	Worksheet Development to Support Learning Model Calculus II Based on APOS Theory. Dimuat pada Proceedings International Seminar & Workshop on Education and Design Research ISBN 978-602-17878-3-0	28-30 Septembar 2013 Graduate Program Padang State University	Graduate Program Padang State University
6	Implementasi Pembelajaran Terpusat Mahasiswa dengan Model Pembelajaran Berkelompok pada Matakuliah Struktur Data & Algoritma di UNIB. Dimuat pada Prosiding Internasional Prospek Pendidikan Nonformal dan Informal dalam Perspektif Nasional dan Internasional ISBN: .978-602-8819-89-3	4 Juli 2013 Fakultas Ilmu Pendidikan	Fakultas Ilmu Pendidikan
7	Implementasi Algoritma Kompresi Huffman dan Algoritma Kriptografi RC6 pada Pesan SMS. Dimuat pada Prosiding KNSI 2010	2010 UNSRI	UNSRI

No	Judul Makalah	Waktu,tempat kegiatan	Penyelenggara
8	Developing Calculus Learning Model Based On The Theory of APOS (Action, Process, Object, And Schema). Proceeding. ISBN: 978-602-19877-3-5. The International Conference On Mathematics, Science, Education And Technologi..	October 22, 2015, Inna Muara Hotel and Convention Center. Padang Indonesia.	FMIPA UNP
9	The Impact of Mathematics Learning Model Implementation Based on APOS Theory (APOS Model). (A Case Study on Integral Calculus Learning). International Conference on Science and Technology. “science and technology for improving quality of life”.	November 9-10, 2016. Pekanbaru, Indonesia. http://www.estech.org.	FMIPA UNRI
10	Kepraktisan Lembar Kerja Berbasis Model Pembelajaran Kalkulus Berdasarkan Teori APOS. Prosiding ISBN: 979-602-71798-1-3 Semirata 2016 Bidang MIPA BKS-PTN Wilayah Barat.	Graha Sriwijaya, Universitas Sriwijaya Palembang, 22-24 Mei 2016. Hal 214 - 224	FMIPA UNSRI
11	Development of math worksheets bases on APOS model (a case study of Integral Calculus). Proceeding . ISBN: 978-602-19877-5-9. The Fourth South East Asia Design/Development Research International Conference 2016..	Graduate Programme, Uninersitas Negeri Padang. April, 17th – 18th 2016	UNP
12	Peranan Komputer Pada Model Pembelajaran Matematika Berdasarkan Teori APOS (Model APOS). Prosiding ISSN: 2580 – 1104. Seminar Nasional Matematika V	Universitas Negeri Jakarta 5 November 2016.	UNJ
13	The Implementation of APOS MODEL In Transformation Geometry Course. Proceeding of International Conference on Mathematics and Mathematics Education)ICM2E) 2017.ISBN: 978-602-50919-0-2.	Novotel Hotel Bukittinggi 27 – 29 August 2017	JM FMIPA UNP
14	Computer Based APOS Model on Mathematics Learning . Proceeding ISBN: 2598-2532. International Conference of Applied Science on Engineering, Business, Linguistics and Information Technology (Ico-ASCNITech).	Politeknik Negeri Padang and Politeknik Ibrahim Sultan, 13 -15 October 2017	Politeknik Negeri Padang
15	Implementasi Model APOS pada matakuliah Kalkulus Integral pada pokok Bahasan Fungsi Transenden di Prodi Pendidikan Matematika FKIP UNIB TA 2017/2018. Prosiding ISBN: 978-602-8043-83-0. Conference on Mathematics, Science, and Education.	Gedung Dekanat FKIP UNIB 21-23 Desember 2017 .	Prodi S2 Pend.Mat

No	Judul Makalah	Waktu,tempat kegiatan	Penyelenggara
16	Kepraktisan Lembar Kerja Berbasis Model Pembelajaran Matematika Berdasarkan Teoari APOS (Model APOS) oleh Mahasiswa Teknik Informatika Fakultas Teknik UNIB TA 2015/2016 (Studi Kasus Pada Pembelajaran Kalkulus); Prosiding SEMIRATA 2017 Bidang MIPA BKS-PTN Wilayah Barat.	Jambi. Ratu Convention Center 12 – 14 Mei 2017.	FMIPA UNJA
17	Collage Students' Errors in Solving Volume of Solids of Revolution Problems and the Scaffolding Given on Model APOS Learning. Proceeding ISBN : 978-602-8043-84-7. Bengkulu International Conference (BICSE-2017).	Rectorate Building 3rd Floor, University of Bengkulu. December 14 – 15, 2017.	UNIB
18	The Impact of Calculus Learning Based on APOS MODEL to Students' Mastery of Improper Integral Materials. Paper presented at Semirata and International Conference on Science and Technology (SEMIRATA –ICST) 2018.	Medan International Convention Center (MICC) May 4 -6th, 2018. not yet published	FMIPA USU
19	The Effectivity of APOS Model Based Worksheets On The Improper Integral. Paper presented at International Conference on Mathematics, Science, Education and Technology (ICOMSET) 2018. At Universitas Negeri Padang,	Padang City, Indonesia. On October 4 – 5 th. not yet published	FMIPA UNP
20	Implementasi Model APOS Pada Mata Kuliah Kalkulus Integral Pada Bab Teknik Pengintegralan Di Prodi Pendidikan Matematika FKIP UNIB TA 2017/2018	Gedung Laboratorium Pembelajaran FKIP UNIB November 2018 (dalam proses penerbitan prosiding)	PGSD FKIP UNIB
21	Building Critical, Tenacious, And Confidential Characters Through Application Of APOS Model (Case Study On Integral Calculus Learning). Proceeding ICETEP. ISSN: 2352-5398 ISBN: 978-94-6252-695-2 FKIP UNIB 26-28 october 2018. Atlantis Press	Gedung Laboratorium Pembelajaran FKIP UNIB 2018.	FKIP UNIB
22	Upaya Pengentasan Kemiskinan Melalui Perubahan Karakter Sebagai Dampak Penerapan Model Pembelajaran Yang Terpusat Pada Siswa. Akan dipresentasikan pada tanggal ... Juli 2019	Hotel Siantika Juli 2019	RENPER UNIB

No	Judul Makalah	Waktu,tempat kegiatan	Penyelenggara
23	Implementasi Model APOS Pada Bab Teknik Integrasi Di Prodi Pendidikan Matematika FKIP UNIB TA 2017/2018 Prosiding Seminar Nasional 2018. Hal.72-82 PGSD FKIP UNIB	FKIP Universitas Bengkulu	Magister Pendidikan Dasar & Pendidikan Guru Sekolah Dasar
24	Analisis Kemampuan Pemecahan Masalah Soal Cerita Himpunan Oleh Mahasiswa Pendidikan Matematika FKIP UNIB Diseminarkan Tahun 2019 (Dalam proses terbit di jurnal PGSD)	FKIP Universitas Bengkulu	Magister Pendidikan Dasar & Pendidikan Guru Sekolah Dasar
25	Practicality Test Of Student Worksheet (SWS) Based On: Action, Process, Object, Schema (APOS MODEL) Assisted On Geogebra In The Subject Of Riemann Sum. 2019 (Dalam Proses Penerbitan di IOP)	FKIP Universitas Bengkulu	S2 IPA FKIP

PENGALAMAN MENGAJAR

No	Nama Matakuliah
1	Kalkulus Diferensial
2	Kalkulus Integral
3	Aljabar Linear
4	Microteaching
5	Kapita Selekta Pembelajaran Matematika Jenjang Sekolah Menengah
6	Kapita Selekta Pembelajaran Matematika Jenjang Sekolah Dasar
7	Seminar
8	Psikology
9	Geometri
10	Geometri Transformasi
11	Matematika Komputasi
12	Konsep Pemrograman
13	Struktur Data dan Algoritma
14	Pemrograman Berorientasi Objek
15	Analisa dan Perancangan Sistem Informasi

Data ini dibuat dengan sebenarnya dan jika perlu dapat dibuktikan kebenarannya.

Bengkulu, 13 Juni 2020
Yang membuat,

Dr. Dra. Hanifah, M.Kom
NIP. 196208151986032024

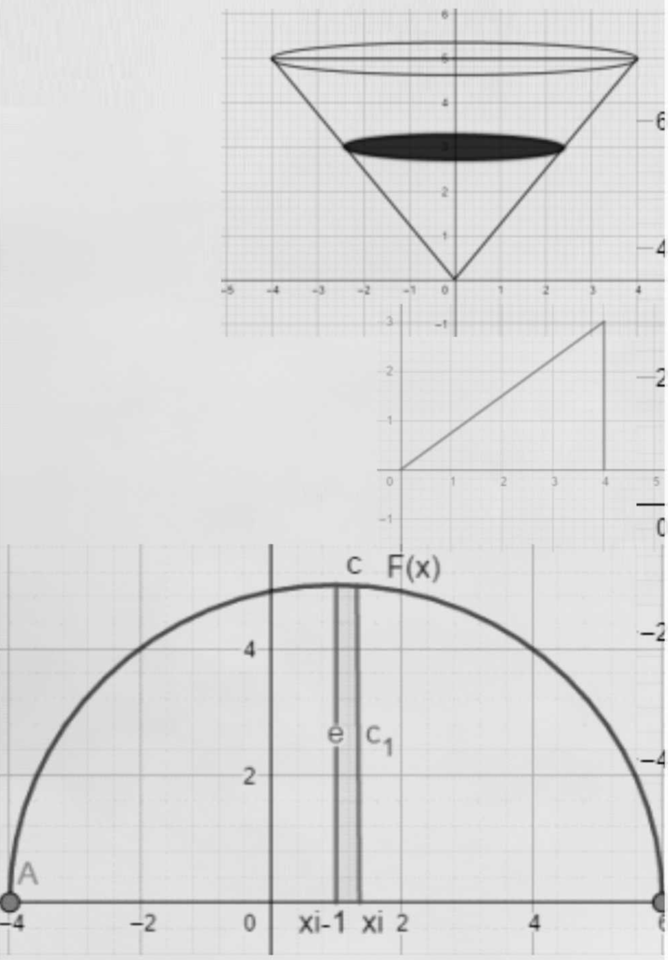
KALKULUS INTEGRAL BERBASIS MODEL APOS BERBANTUAN MAPLE

BUKU AJAR

Pada tahun 2015 dalam rangka penulisan disertasi, penulis telah mengembangkan model pembelajaran Kalkulus berbasis model APOS (Aksi, Proses, Objek, dan Skema). Untuk mendukung model APOS maka dikembangkan juga Lembar Kerja Kalkulus Integral berbasis model APOS. Seiring berjalannya waktu, lembar kerja tersebut direvisi beberapa kali. Setelah direvisi, kemudian lembar kerja tersebut dibukukan. Buku ajar tersebut kemudian disempurnakan lagi dengan harapan mahasiswa lebih terbantu untuk memahami materi Kalkulus Integral. Buku ajar ini untuk masing-masing pokok bahasan dikembangkan dengan mengikuti sintak dari model APOS yang terdiri atas fase Orientasi, fase Praktikum, fase Diskusi Kelompok Kecil, fase Diskusi Kelas, fase Latihan, dan fase Evaluasi.

Buku ajar Kalkulus Integral diawali dengan pengenalan Maple sebagai program aplikasi komputer yang digunakan pada fase Praktikum. Materi Kalkulus Integral sendiri dipecah menjadi 14 pokok bahasan yang dikembangkan ke dalam lembar kerja yang terdiri atas 14 lembar kerja mahasiswa dengan materi berasal dari buku Kalkulus, yaitu integral tak tentu sebagai anti turunan, integral tentu, penerapan integral, fungsi transenden, teknik pengintegralan, dan integral tak wajar.

Berdasarkan pengalaman menerapkan model APOS pada pembelajaran Kalkulus Integral berbantuan Maple yang terpusat pada mahasiswa. Mulanya mahasiswa memang terlihat terpaksa melakukan tugas menyelesaikan Lembar Kerja Kalkulus Integral. Setelah merasakan bagaimana rasanya presentasi pada fase Diskusi Kelas, sikap mahasiswa berubah menjadi lebih baik. Kemampuan bekerja samanya terasah, kemampuan berkomunikasi di depan kelas terasah, lebih ulet, dan lebih teliti. Perbedaan sikap tersebut akan terasa bila dibandingkan dengan mahasiswa yang diajar secara konvensional. Untuk menghadapi pembelajaran daring selama wabah pandemi Covid-19, buku ajar Kalkulus Integral diharapkan dapat berkontribusi sebagai buku yang dapat membantu mahasiswa dalam memahami materi.



Penerbit Deepublish (CV BUDI UTAMA)
Jl. Rajawali, Gang Elang 6 No.3, Drono, Sardonoharjo, Ngaglik, Sleman
Jl. Kaliurang Km 9,3 Yogyakarta 55581
Telp/Fax : (0274) 4533427
Anggota IKAPI (076/DIY/2012)
cs@deepublish.co.id @penerbitbuku_deepublish
Penerbit Deepublish www.penerbitbukudeepublish.com

Kategori : Matematika

ISBN 978-623-02-2030-2