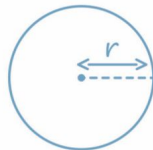
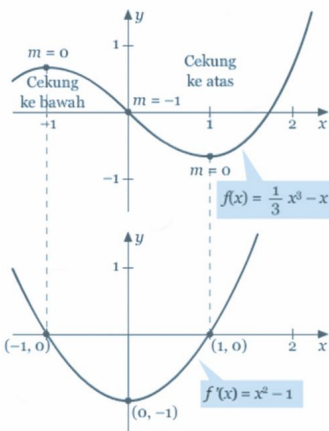




PENUNTUN PENGEMBANGAN BAHAN AJAR MATERI DIFERENSIAL

BERBASIS MODEL APOS BERBANTUAN GEOGEBRA

Dr. Dra. Hanifah, M.Kom.
Tria Utari, S.Pd., M.Pd.
Lilia Gina Febrila, S.Pd.
Gyzka Veliesa, S.Pd

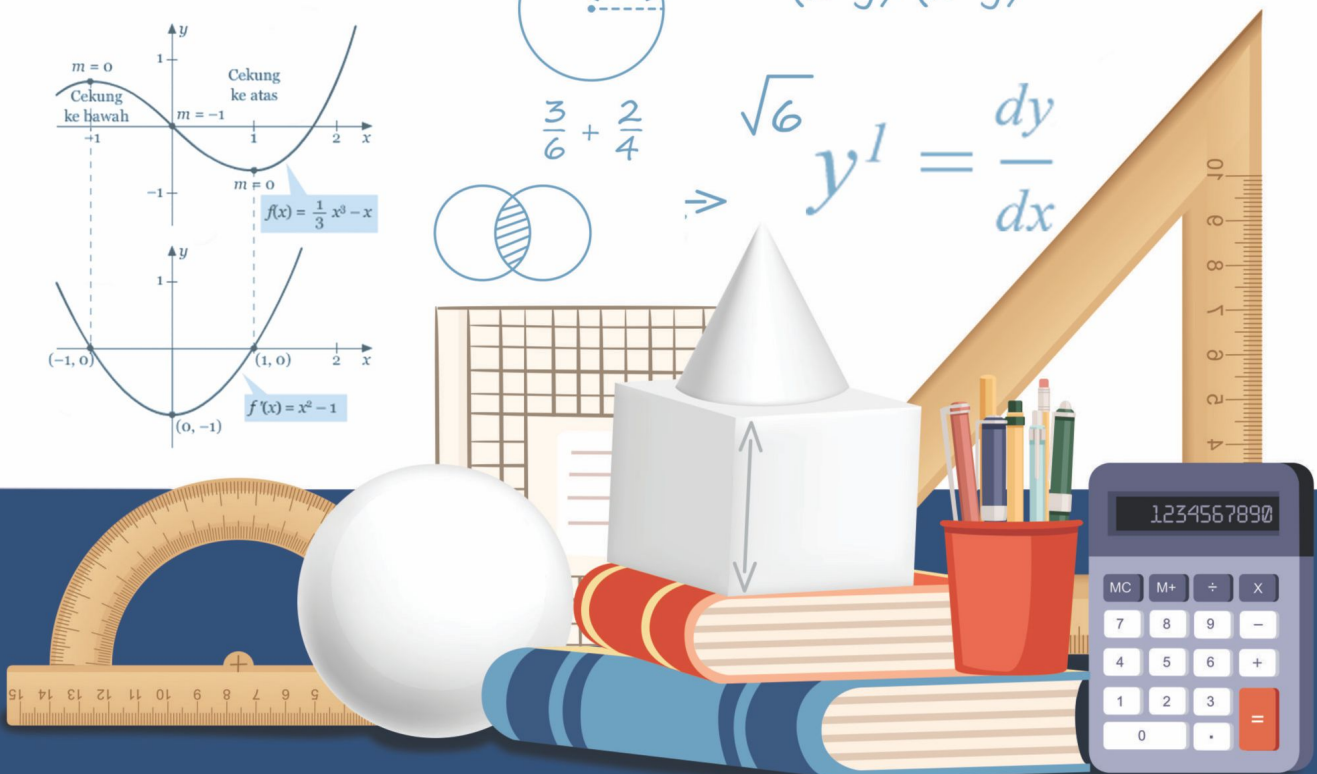


$$\frac{3}{6} + \frac{2}{4}$$



$$(x+y)^2 + (x-y)^2$$

$$\sqrt{6} y^1 = \frac{dy}{dx}$$



**PENUNTUN PENGEMBANGAN BAHAN AJAR
MATERI DIFERENSIAL BERBASIS MODEL
APOS BERBANTUAN GEOGEBRA**

UU No 28 tahun 2014 tentang Hak Cipta

Fungsi dan sifat hak cipta Pasal 4

Hak Cipta sebagaimana dimaksud dalam Pasal 3 huruf a merupakan hak eksklusif yang terdiri atas hak moral dan hak ekonomi.

Pembatasan Pelindungan Pasal 26

Ketentuan sebagaimana dimaksud dalam Pasal 23, Pasal 24, dan Pasal 25 tidak berlaku terhadap:

- i. Penggunaan kutipan singkat Ciptaan dan/atau produk Hak Terkait untuk pelaporan peristiwa aktual yang ditujukan hanya untuk keperluan penyediaan informasi aktual;
- ii. Penggandaan Ciptaan dan/atau produk Hak Terkait hanya untuk kepentingan penelitian ilmu pengetahuan;
- iii. Penggandaan Ciptaan dan/atau produk Hak Terkait hanya untuk keperluan pengajaran, kecuali pertunjukan dan Fonogram yang telah dilakukan Pengumuman sebagai bahan ajar; dan
- iv. Penggunaan untuk kepentingan pendidikan dan pengembangan ilmu pengetahuan yang memungkinkan suatu Ciptaan dan/atau produk Hak Terkait dapat digunakan tanpa izin Pelaku Pertunjukan, Produser Fonogram, atau Lembaga Penyiaran.

Sanksi Pelanggaran Pasal 113

1. Setiap Orang yang dengan tanpa hak melakukan pelanggaran hak ekonomi sebagaimana dimaksud dalam Pasal 9 ayat (1) huruf i untuk Penggunaan Secara Komersial dipidana dengan pidana penjara paling lama 1 (satu) tahun dan/atau pidana denda paling banyak Rp100.000.000 (seratus juta rupiah).
2. Setiap Orang yang dengan tanpa hak dan/atau tanpa izin Pencipta atau pemegang Hak Cipta melakukan pelanggaran hak ekonomi Pencipta sebagaimana dimaksud dalam Pasal 9 ayat (1) huruf c, huruf d, huruf f, dan/atau huruf h untuk Penggunaan Secara Komersial dipidana dengan pidana penjara paling lama 3 (tiga) tahun dan/atau pidana denda paling banyak Rp500.000.000,00 (lima ratus juta rupiah).

PENUNTUN PENGEMBANGAN BAHAN AJAR
MATERI DIFERENSIAL BERBASIS MODEL
APOS BERBANTUAN GEOGEBRA

Hanifah
Tria Utari
Lilia Gina Febrila
Gyzka Veliesa



Cerdas, Bahagia, Mulia, Lintas Generasi.

**PENUNTUN PENGEMBANGAN BAHAN AJAR MATERI DIFERENSIAL
BERBASIS MODEL APOS BERBANTUAN GEOGEBRA**

Hanifah, dkk

Desain Cover :
Syaiful Anwar

Sumber :
<https://www.shutterstock.com>

Tata Letak :
C Morris S

Proofreader :
Mira Muarifah

Ukuran :
viii, 104 hlm, Uk: 17.5x25 cm

ISBN :
978-623-02-5487-1

Cetakan Pertama :
November 2022

Hak Cipta 2022, Pada Penulis

Isi diluar tanggung jawab percetakan

Copyright © 2022 by Deepublish Publisher
All Right Reserved

Hak cipta dilindungi undang-undang.
Dilarang keras menerjemahkan, memfotokopi, atau
memperbanyak sebagian atau seluruh isi buku ini
tanpa izin tertulis dari Penerbit.

PENERBIT DEEPUBLISH
(Grup Penerbitan CV BUDI UTAMA)
Anggota IKAPI (076/DIY/2012)

Jl.Rajawali, G. Elang 6, No 3, Drono, Sardonoharjo, Ngaglik, Sleman
Jl.Kaliurang Km.9,3 – Yogyakarta 55581
Telp/Faks: (0274) 4533427
Website: www.deepublish.co.id
www.penerbitdeepublish.com
E-mail: cs@deepublish.co.id

KATA PENGANTAR

Puji syukur penyusun panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Esa atas rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penyusun dapat menyelesaikan buku yang berjudul ***Materi Diferensial Berbasis Model Apos Berbantuan Geogebra: Suatu Tuntunan Pengembangan***. Buku penuntun ini memuat permasalahan yang dihadapi oleh peserta didik dalam mempelajari materi diferensial. Selain itu buku ini dilengkapi dengan materi diferensial yang dipelajari pada tingkat SMA, model pembelajaran APOS, penjelasan mengenai *software* GeoGebra, serta contoh RPP dan LKPD yang dikembangkan dari indikator pada materi diferensial dengan menggunakan model APOS dan *software* GeoGebra.

Pada kesempatan ini, tim penyusun menyampaikan ucapan terima kasih kepada semua pihak yang telah memberikan bantuan selama proses penyelesaian buku ini. Semoga buku ini dapat bermanfaat bagi semua pembacanya, khususnya bagi guru matematika SMA/MA dalam mengembangkan bahan ajar pada materi diferensial. Penyusun menyadari bahwa buku ini masih jauh dari kata sempurna. Oleh karena itu, penyusun mengharapkan kritik dan saran dari para pembaca guna penyempurnaan buku penuntun ini ke depannya.

Bengkulu, Juli 2022

Tim Penyusun

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR.....	v
DAFTAR ISI	vii
I. LATAR BELAKANG.....	1
II. PERMASALAHAN PEMBELAJARAN DIFERENSIAL	3
III. KERUCUT PENGALAMAN EDGAR DALE.....	5
A. Kerucut Pengalaman Edgar Dale	5
B. Tingkatan Kerucut Pengalaman Edgar Dale	7
IV. MODEL PEMBELAJARAN APOS	15
A. Pengertian Model APOS.....	15
B. Sintaks Model APOS.....	16
V. GEOGEBRA.....	18
A. Pengantar GeoGebra	18
B. Manfaat GeoGebra	18
C. Tampilan GeoGebra.....	19
D. Menu Bar.....	20
E. Tool Bar	22
VI. MERANCANG RPP DAN LKPD.....	27
A. Kerangka RPP	27
B. Contoh RPP dan LKPD	31
Daftar Pustaka.....	103

I. LATAR BELAKANG

Matematika merupakan pelajaran yang menjadi dasar dan banyak digunakan pada bidang keilmuan lain. Sesuai dengan apa yang tertera dalam UU No. 20 Tahun 2003 Pasal 37 Ayat 1, bahwa “Pembelajaran matematika merupakan salah satu unsur yang menjadi landasan dalam proses pengembangan berbagai bidang keilmuan, seperti dalam bidang ekonomi, sains, teknologi, informasi, dan komunikasi, serta bidang keilmuan lainnya”. Hampir semua kegiatan manusia berhubungan dengan matematika. Dengan adanya matematika, berbagai permasalahan kehidupan bisa dipecahkan dengan cara berpikir matematis. Pengetahuan dan pengalaman mengenai matematika dapat diperoleh oleh peserta didik melalui aktivitas pembelajaran matematika di sekolah.

Pembelajaran matematika ada pada setiap jenjang pendidikan. Matematika merupakan salah satu cabang ilmu pengetahuan yang wajib dipelajari oleh peserta didik di sekolah. Tujuan belajar matematika yang ditetapkan pemerintah melalui Permen 23 Tahun 2006 yaitu 1. Memahami konsep matematika, menjelaskan keterkaitan antar konsep, dan juga mengaplikasikan konsep atau algoritma secara luwes, akurat, efisien, dan tepat dalam pemecahan masalah; 2. Menggunakan penalaran pada pola sifat, melakukan manipulasi matematika dalam membuat generalisasi, menyusun bukti, atau menjelaskan gagasan dan pernyataan matematika; 3. Memecahkan masalah yang meliputi kemampuan memahami masalah, merancang model matematika, menyelesaikan model, dan menafsirkan solusi yang diperoleh; 4. Mengomunikasikan gagasan dengan symbol, table, diagram, atau media lain yang memperjelas keadaan atau masalah; 5. Memiliki sikap menghargai kegunaan matematika dalam kehidupan, yaitu memiliki rasa ingin tahu, perhatian, dan minat dalam mempelajari matematika, serta sikap ulet percaya diri dalam penyelesaian masalah.

Berdasarkan tujuan tersebut ada banyak hal yang perlu dikuasai oleh peserta didik, seperti pemahaman konsep, penalaran, pemecahan masalah, mengomunikasikan, serta penerapan dalam kehidupan sehari-hari. Ada berbagai materi matematika yang hendaknya dikuasai oleh peserta didik di tingkat sekolah, seperti aritmetika, aljabar, geometri, kalkulus, statistika, peluang, serta trigonometri. Diferensial atau biasa disebut turunan adalah salah satu materi yang tergolong dalam kalkulus dan merupakan materi

penting yang hendaknya dikuasai oleh peserta didik di tingkat sekolah menengah atas (SMA). Materi diferensial ini bersifat abstrak, seringkali peserta didik merasa kesulitan dalam mempelajari, memahami, dan menyelesaikan berbagai persoalan mengenai diferensial. Hasil penelitian Lubis dkk. (2021) menunjukkan bahwa peserta didik seringkali merasa kesulitan dalam memahami materi turunan dan kesalahan peserta didik dalam mengerjakan soal turunan adalah kebanyakan peserta didik tidak memahami konsep turunan secara mendalam, tidak mengingat rumus, dan sering keliru dalam operasi baik penjumlahan, pengurangan, perkalian, maupun pembagian. Dalam buku penuntun ini akan dibahas mengenai permasalahan yang dialami peserta didik dalam pembelajaran diferensial, rencana pelaksanaan pembelajaran (RPP), dan lembar kerja peserta didik (LKPD) yang dapat digunakan untuk menunjang pembelajaran matematika pada materi diferensial di tingkat SMA.

II. PERMASALAHAN PEMBELAJARAN DIFERENSIAL

Materi diferensial atau yang biasa juga disebut turunan adalah suatu materi yang di dalamnya mempelajari mengenai turunan fungsi aljabar dan turunan fungsi trigonometri. Materi diferensial ini merupakan salah satu materi matematika yang hendaknya dikuasai oleh para peserta didik pada tingkat SMA. Namun pada kenyataannya masih banyak peserta didik yang belum menguasai materi ini dikarenakan mengalami berbagai permasalahan dalam pembelajarannya. Beberapa permasalahan dalam pembelajaran diferensial di antaranya yaitu sebagai berikut:

1. Peserta didik yang belum menguasai materi pra syarat

Para peserta didik cenderung tidak memahami materi prasyarat dalam materi diferensial seperti konsep limit, konsep fungsi aljabar, identitas trigonometri, dan fungsi trigonometri, sehingga mereka kesulitan dalam mengaitkan konsep yang sudah pernah dipelajari dengan konsep yang baru dipelajari sehingga mereka kesulitan dalam memahami konsep turunan fungsi aljabar dan turunan fungsi trigonometri. Hasil penelitian Rahmawati, dkk. (2021) menunjukkan bahwa pada materi turunan fungsi trigonometri peserta didik terkadang tidak menyelesaikan soal dengan baik dikarenakan keterbatasan peserta didik dalam pemahaman konsep turunan fungsi dan konsep perhitungan sudut pada trigonometri yang merupakan materi dasar untuk materi turunan fungsi trigonometri. Peserta didik sering mengalami kesalahan dalam menurunkan fungsi trigonometri dasar, turunan yang berbentuk perkalian, turunan rantai, turunan yang melibatkan bentuk campuran aljabar dan trigonometri serta kesalahan dalam menentukan turunan pada suatu titik tertentu. Selain itu Rahmah, dkk. (2017) mengemukakan bahwa kesulitan yang dialami peserta didik yaitu mengidentifikasi fungsi dan identitas trigonometri yang menjadi dasar untuk materi turunan fungsi trigonometri.

2. Peserta didik kesulitan dalam memahami materi diferensial.

Diferensial merupakan salah satu materi matematika yang bersifat abstrak yang cukup sulit dipahami oleh peserta didik sehingga menyebabkan pemahaman konsep, prosedur, prinsip, maupun fakta peserta didik mengenai materi ini terbilang cukup rendah. Rendahnya pemahaman peserta didik ini

dapat menyebabkan peserta didik salah bahkan tidak dapat menyelesaikan berbagai persoalan mengenai turunan dengan benar. Penguasaan peserta didik tentang konsep-konsep matematika tidak terlepas dari peranan guru dalam proses pembelajaran. Saat ini masih banyak guru yang memberikan pembelajaran diferensial dengan menceramahkan konsep dan prinsipnya saja atau dengan kata lain pembelajaran ini dilakukan dengan metode ceramah yang berpusat pada guru. Kondisi seperti ini menyebabkan peserta didik kurang berpikir aktif dan peserta didik cepat merasa bosan sehingga mereka cenderung kurang memperhatikan apa yang disampaikan oleh guru dan akhirnya dapat membuat mereka tidak paham akan materi yang sedang dipelajari.

3. Kurangnya bahan ajar yang digunakan saat pembelajaran.

Pada saat pembelajaran diferensial masih banyaknya guru yang hanya menjelaskan materi dengan menggunakan sumber belajar berupa buku paket saja. Kurangnya bahan ajar yang digunakan saat pembelajaran dapat menyebabkan peserta didik kurang aktif dalam berpikir dan memahami materi diferensial. Hendaknya guru dapat menggunakan bahan ajar tambahan seperti lembar kerja peserta didik (LKPD) yang dapat membantu peserta didik dalam memahami materi diferensial dan pembelajaran lebih berpusat pada peserta didik sesuai dengan kurikulum 2013.

4. Peserta didik kebanyakan hanya menghafal rumus tanpa memahami materi yang diajarkan.

Banyak dari peserta didik hanya menghafal rumus tetapi mereka tidak memahami materi yang diajarkan yang mengakibatkan mereka kesulitan dalam menyelesaikan soal, terutama soal yang berbeda dari apa yang dicontohkan oleh guru dan soal pada tingkatan HOTS.

5. Rendahnya minat serta motivasi peserta didik untuk mempelajari materi diferensial.

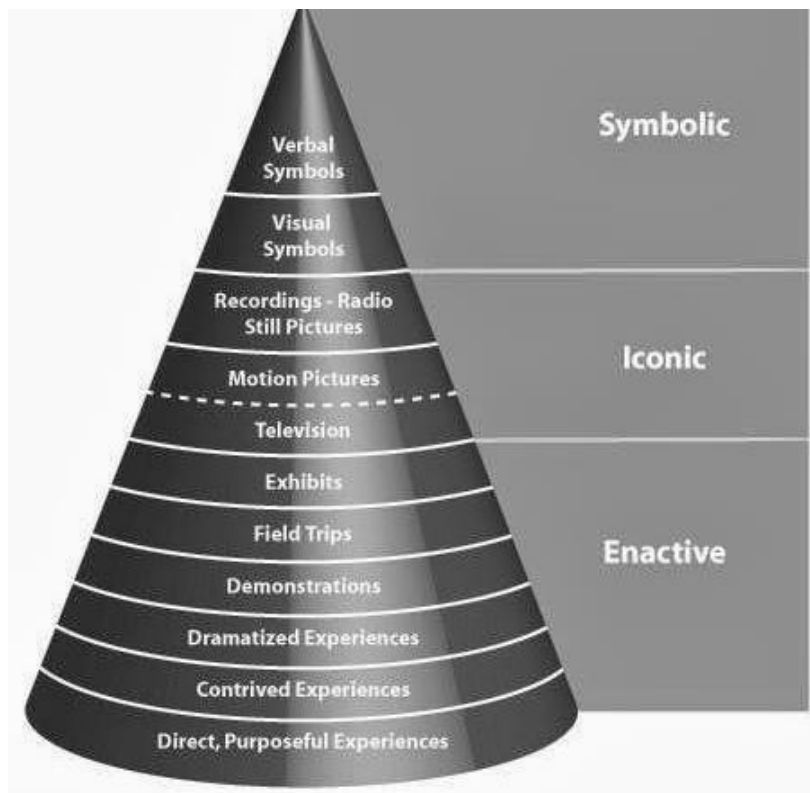
Minat dan motivasi ini merupakan salah satu faktor mempengaruhi pemahaman konsep peserta didik. Peserta didik yang memiliki minat dan motivasi untuk belajar tentu akan antusias dan mengikuti pembelajaran dengan baik, mereka juga akan berusaha mencari berbagai informasi untuk dapat memahami dan memecahkan berbagai permasalahan mengenai materi itu sendiri. Namun pada kenyataannya minat dan motivasi peserta didik untuk mempelajari turunan terutama turunan fungsi trigonometri ini masih kurang.

III. KERUCUT PENGALAMAN EDGAR DALE

A. Kerucut Pengalaman Edgar Dale

Edgar Dale pertama kali mengenalkan teori kerucut pengalaman pada tahun 1946 pada bukunya yang berjudul *Audio Visual Methods in Teaching* (Zaman, 2020). Kemudian Edgar Dale merevisi cetakan pertamanya pada tahun 1954 dan direvisi kembali pada tahun 1969. Menurut Edgar Dale hasil belajar seseorang diperoleh mulai dari pengalaman langsung (konkret), kenyataan yang ada di lingkungan kehidupan, melalui benda tiruan, sampai kepada lambang verbal (abstrak) yang semakin ke puncak kerucut semakin abstrak media penyampaian itu (Suriana, 2015).

Pada tahun 1969 Dale tertarik dengan konsep teori psikologi Bruner (1966) mengenai tingkatan modus belajar yaitu pengalaman langsung (*enactive*), pengalaman *pictoral*/gambar (*iconic*) dan pengalaman abstrak (simbolis) (Sari, 2019). Kemudian, Dale memadukan sistem klasifikasi Bruner dengan konsepnya sendiri. Konsep Bruner digambarkan oleh Arsyad dengan contoh pembelajaran tali-temali. Pengalaman langsung didapat ketika siswa belajar langsung membuat ikatan atau simpul menggunakan tali. Dengan begitu siswa belajar memahami pula makna kata simpul dipahami dengan langsung dengan membuat simpul. Pengalaman *pictoral*/gambar didapat ketika siswa belajar memahami kata 'simpul' melalui media berbasis visual yang dapat berupa gambar, foto, lukisan, atau film yang menjelaskan maksud kata 'simpul'. Sedangkan pada tingkatan simbol, siswa membaca atau mendengar penjelasan mengenai maksud dari kata "simpul" (Sari, 2019).



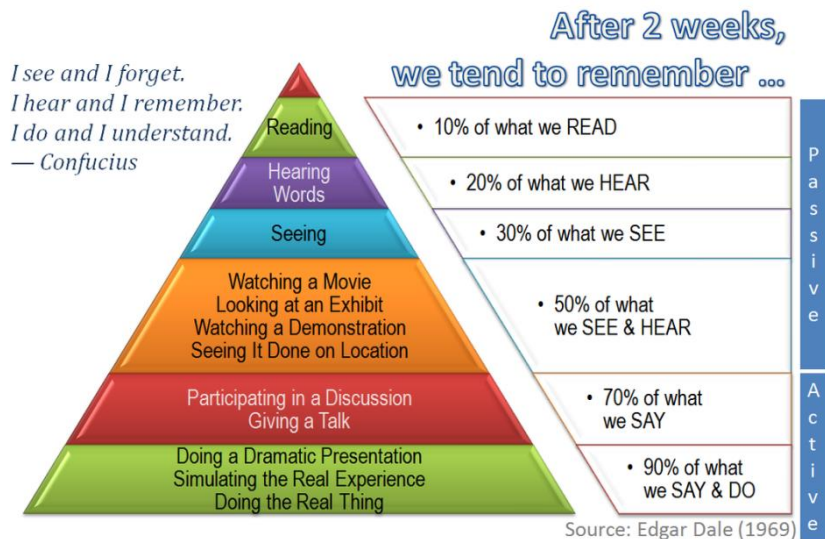
Gambar 1. Kerucut Pengalaman Edgar Dale

Dalam kerucut pengalaman hasil revisi kedua, terlihat gambaran pengalaman dari yang paling abstrak (paling atas) hingga paling konkret (paling bawah), sebagai berikut: (1) simbol verbal, (2) simbol visual, (3) rekaman, radio, gambar diam, (4) gambar bergerak, (5) televisi edukasi, (6) pameran, (7) studi banding, (8) demonstrasi, (9) pengalaman dramatis, (10) pengalaman yang dibuat-buat, (11) pengalaman langsung, pengalaman dengan tujuan tertentu.

Setelah melalui berbagai komponen *Cone of Experience*, dapat dikatakan bahwa dalam memfasilitasi pembelajaran, kita dapat menggunakan berbagai bahan dan media untuk memaksimalkan pengalaman belajar. Melalui tingkatan-tingkatan yang disediakan oleh *Cone of Experience*, dapat dikatakan bahwa pengalaman konkret harus diberikan terlebih dahulu untuk mendukung pembelajaran abstrak. Untuk lebih memahami Kerucut Pengalaman Edgar Dale, kita dapat merujuk ke gambar berikut ini:

The Cone of Learning

sparkinsight.com



Gambar 2. Kerucut Pengalaman Edgar Dale

B. Tingkatan Kerucut Pengalaman Edgar Dale

1. Simbol Verbal

Pengalaman belajar ini diperoleh melalui simbol verbal, baik bahasa lisan maupun tulisan (Ulfayana, 2018). Dapat dengan membaca buku atau bahan bacaan lainnya atau guru menyampaikan informasi kepada anak didik hanya dengan berbicara.

Contoh berdasarkan pengalaman:

Berdasarkan pengalaman sewaktu melaksanakan magang 2 di salah satu SMP di Kota Bengkulu, sehari sebelum pembelajaran *online* melalui aplikasi Cloud-X dilaksanakan, siswa diminta untuk membaca materi yang ada di buku sumber belajar dari Kemdikbud. Di awal pembelajaran daring, siswa ditanya mengenai materi yang akan dipelajari pada hari itu dan siswa diminta untuk memberikan penjelasan dari hasil bacaan mereka. Namun siswa kurang menanggapi, hanya ada dua atau tiga siswa yang menanggapi dari banyaknya siswa yang berasal dari 7 kelas.

Hal ini menyebabkan siswa bersikap pasif dan pembelajaran akan terasa bosan jika siswa hanya disuruh membaca saja. Selain itu hasil tanggapan dari siswa pun ada yang berbeda dalam menafsirkannya. Seperti halnya pada materi persamaan kuadrat, ada siswa yang menganggap bahwa

dari persamaan kuadrat $y = -2x^2 + 3x - 6$ nilai a nya adalah 2 dan c nya adalah 6, padahal nilai a nya adalah -2 dan nilai c nya adalah -6. Hal ini menunjukkan bahwa tingkat pemahaman siswa dari pengalaman membaca rendah.

Selain itu masih banyak ditemui di sekolah bahwa guru menggunakan metode ceramah di mana guru yang terus berbicara dalam menjelaskan materi. Hal ini membuat kegiatan pembelajaran terasa membosankan dan siswa juga bersikap pasif. Ketika siswa merasa bosan maka motivasi siswa untuk belajar pun menurun, mereka bersikap acuh, dan tingkat pemahaman siswa pun akan menjadi rendah.

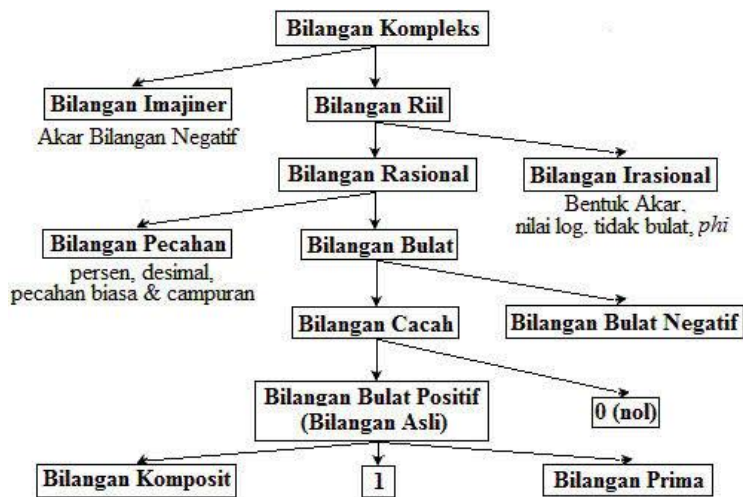
Dapat disimpulkan bahwa proses pembelajaran dengan hanya memberikan pengalaman verbal bagi siswa dapat menyebabkan siswa pasif, pembelajaran menjadi membosankan, kesalahan pemahaman konsep dan tingkat pemahaman siswa terhadap materi pun rendah bahkan dapat membuat siswa benar-benar tidak memahami materi matematika yang dipelajari dan salah dalam menafsirkannya. Hal ini sejalan dengan pendapat Purba (2017) yang menyatakan bahwa hambatan yang ditemui dalam proses belajar dengan simbol verbal ini seperti siswa lebih bersifat pasif, perhatian bercabang serta kekacauan penafsiran.

2. Simbol Visual

Simbol visual merupakan penyampaian pesan atau informasi dengan menampilkan gambar, grafik serta tata dan letaknya jelas, sehingga pesan dan gagasan dapat diterima. Siswa dapat lebih memahami berbagai perkembangan maupun struktur melalui bagan atau lambang visual lainnya (Ulfayana, 2018).

Contoh berdasarkan pengalaman:

Pada saat belajar di sekolah pemberian gambar, grafik maupun bagan ini dapat mempengaruhi tingkat pemahaman akan materi pelajaran. Contohnya pada saat mempelajari materi mengenai bilangan, penyampaian materi mengenai jenis-jenis bilangan dengan menggunakan bagan sangat berpengaruh dan dapat meningkatkan pemahaman siswa. Dari bagan kita dapat mengetahui bahwa bilangan kompleks terdiri dari bilangan riil dan bilangan imajiner, bilangan riil terdiri dari bilangan rasional dan irasional, bilangan rasional terdiri dari bilangan pecahan dan bilangan bulat, dan sebagainya. Bagan itu dapat dibuat seperti gambar berikut



Sumber: <http://matematikasmkpcwn.blogspot.com/2013/07/macam-macam-bilangan.html>

Selain itu contoh lainnya ada penjelasan dengan menampilkan gambar jenis-jenis bangun datar dapat membantu meningkatkan pemahaman siswa. Siswa dapat lebih membedakan antar bangun datar yang satu dengan yang lainnya dibandingkan hanya dengan mendengar penjelasan dari guru saja mengenai perbedaannya tanpa digambarkan.

Sehingga dapat disimpulkan bahwa pengalaman belajar yang di dapat dari tingkatan simbol visual dapat meningkatkan pemahaman siswa dibandingkan dengan pengalaman yang hanya didapat melalui membaca maupun mendengarkan saja.

3. Rekaman, Radio, Gambar Diam

Pada tingkatan ini hanya mengandalkan satu indera saja yaitu indera pendengaran atau penglihatan saja (Ulfayana, 2018). Pengalaman belajar ini dapat diperoleh dengan mendengarkan seseorang, melalui rekaman, radio, atau yang lainnya.

Contoh berdasarkan pengalaman:

Berdasarkan pengalaman, pembelajaran dengan mendengarkan penjelasan dari guru dapat meningkatkan pemahaman. Seperti halnya ada siswa yang bertanya mengenai persamaan kuadrat melalui WhatsApp, kemudian sebagai guru saya menjawab dengan merekam suara menggunakan fitur *voice note* di WhatsApp dan mengirimkan ke siswa tersebut. Setelah

mendengarkan rekaman penjelasan itu siswa menjadi paham akan materi yang ditanyakannya tadi. Begitu juga ketika teman menanyakan perihal jawaban yang mereka tidak pahami melalui WhatsApp. Ketika dijelaskan melalui pesan teks saja mereka masih merasa bingung namun ketika sudah dijelaskan melalui audio mereka lebih memahaminya. Pengalaman belajar dengan mendengarkan rekaman ini juga dapat diulang-ulang sehingga kita bisa dapat lebih memahaminya.

Dapat disimpulkan bahwa tingkat pemahaman siswa dari pengalaman belajar mendengarkan dapat meningkat pemahaman siswa dibandingkan hanya dengan simbol verbal dan visual saja. Namun tentunya tidak setiap materi dapat dipahami oleh siswa jika hanya dijelaskan melalui audio saja.

4. Gambar Bergerak

Pengalaman belajar ini dapat melalui gambar hidup atau video.

Contoh berdasarkan pengalaman:

Berdasarkan pengalaman sewaktu magang di salah satu SMP di kota Bengkulu, pada saat pembelajaran daring guru memberikan video pembelajaran kepada siswa. Pemberian video ini menyebabkan siswa lebih memahami materi dibandingkan hanya membaca dari buku saja. Siswa lebih tertarik menonton video dibandingkan disuruh membaca. Terlebih lagi untuk pembelajaran matematika yang bersifat abstrak sehingga memerlukan penjelasan dari guru karena jika membaca saja siswa sering kebingungan dalam memahami materi dan memahami proses penyelesaian suatu masalah. Selain itu siswa dapat mengulang-ulang kembali penjelasan materi melalui video pembelajaran. Sehingga dapat disimpulkan bahwa pemberian video pembelajaran ini juga membuat pembelajaran menjadi lebih menarik dan penyampaian materi dapat lebih mudah dipahami oleh siswa.

5. Televisi Edukasi

Pada tingkatan ini pengalaman belajar didapat dengan menyimak televisi edukasi yang mengandalkan indera penglihatan dan pendengaran.

Contoh berdasarkan pengalaman:

Televisi edukasi ini dapat menarik minat belajar anak. Penulis merasakan manfaatnya ketika penulis masih berada di bangku sekolah. Televisi edukasi memberikan pembelajaran layaknya di sekolah namun lebih menarik karena biasanya disertai animasi-animasi yang membuat anak menjadi lebih tertarik dan lebih memahami materi. Selain itu televisi edukasi dapat ditonton di mana saja seperti di rumah, di mana suasana lebih santai.

Pada saat pandemi Covid-19 televisi edukasi ini dapat menjadi salah satu solusi agar anak dapat tetap mendapat pembelajaran meskipun dari rumah. Selain itu menonton televisi edukasi tidak bergantung pada kuota dan gadget namun cukup dengan televisi saja. Hal ini lebih bisa dirasakan masyarakat manfaatnya karena rata-rata masyarakat sekarang lebih banyak yang mempunyai televisi di rumah dibandingkan gadget dan kuota. Salah satu saluran televisi yang memiliki program edukasi saat pandemi yaitu TVRI di mana saluran televisi ini tersedia meskipun hanya menggunakan antena saja.

Dapat disimpulkan bahwa pengalaman belajar yang di dapat dari menonton televisi edukasi ini sebagai pengalaman *iconic* dapat menarik minat belajar anak serta meningkatkan pemahaman anak mengenai pelajaran yang diajarkan dibandingkan pengalaman simbolik. Selain itu televisi edukasi dapat menjadi alternatif dibandingkan anak menonton kartun atau sinetron yang kurang mendidik. Tetapi hendaknya ini menjadi pembelajaran tambahan saja dengan tetap pembelajaran di sekolah menjadi yang utama karena pembelajaran yang melibatkan berbagai interaksi antara guru dan siswa serta berpusat pada siswa akan memberikan pengalaman belajar yang lebih baik lagi.

6. Pameran

Pengalaman belajar melalui pameran ini dapat diperoleh melalui hasil pekerjaan siswa ataupun lainnya (Purba, 2017).

Contoh berdasarkan pengalaman:

Pengalaman belajar ini contohnya melalui penyajian materi atau presentasi yang dilakukan oleh siswa lain. Pengalaman yang pernah dirasakan yaitu sebelum siswa lain mempresentasikan hasil penyelesaian suatu masalah maupun suatu materi pembelajaran siswa lain, guru memberitahukan di awal bahwa siswa lain hendaknya memberikan tanggapan yang dapat berupa saran atau pun pertanyaan agar mendapatkan nilai tambah, menambah pemahaman, dan memperbaiki apa yang telah disampaikan oleh temannya. Dengan dilakukannya hal tersebut, siswa cenderung lebih memperhatikan apa yang disampaikan oleh temannya. Selain itu bahasa teman sejawat biasanya lebih dapat dimengerti. Hal ini membuat siswa menjadi lebih aktif, pembelajaran berpusat kepada siswa dan lebih menarik serta tingkat pemahaman siswa juga dapat lebih meningkat dibandingkan saat pembelajaran berpusat pada guru.

7. Studi Banding

Pengalaman belajar ini diperoleh melalui kunjungan siswa ke suatu tempat yang memiliki objek yang akan dipelajari (Ulfayana, 2018).

Contoh:

Pengalaman belajar studi banding ini dapat dirasakan oleh siswa dalam pembelajaran matematika dengan mengajak siswa ke suatu tempat yang memiliki objek yang memiliki bentuk geometri yang dapat langsung diamati oleh siswa seperti tempat bersejarah berupa museum. Di sana siswa diminta mengamati benda-benda yang ada sekaligus meminta siswa untuk mendata bentuk-bentuk bangun datar dan bangun ruang apa saja yang ada pada museum tersebut. Hal ini dapat diterapkan agar siswa dapat melihat contoh nyata dari pelajaran tersebut sekaligus membuat pembelajaran lebih menarik dan siswa tidak jenuh dalam belajar matematika.

8. Demonstrasi

Pengalaman belajar ini diperoleh ketika siswa melihat peragaan atau percontohan mengenai suatu hal dari orang lain (Ulfayana, 2018).

Contoh berdasarkan pengalaman:

Pada pembelajaran matematika demonstrasi ini biasanya erat kaitannya dengan pembelajaran menggunakan alat peraga. Contoh pengalaman penulis yaitu ketika mempelajari bangun ruang, guru membawa alat peraga berupa benda yang memiliki bentuk bangun ruang seperti kotak makanan yang berbentuk kubus dan balok, tabungan yang berbentuk tabung, serta kotak cokelat yang berbentuk prisma. Selain itu guru juga membawa jaring-jaring bangun ruang tersebut. Hal ini membuat pembelajaran lebih menarik dan bersifat lebih nyata, pemahaman siswa juga menjadi lebih meningkat dan siswa merasakan manfaat dari mempelajari bangun ruang yang banyak aplikasinya dalam kehidupan sehari-hari.

9. Pengalaman Dramatis

Pengalaman dramatis merupakan pengalaman belajar yang diperoleh dari kondisi dan situasi yang diciptakan melalui drama (peragaan) dengan menggunakan skenario yang sesuai dengan tujuan belajar yang hendak dicapai (Ulfayana, 2018).

Contoh berdasarkan pengalaman:

Pengalaman belajar ini dapat dirasakan seperti halnya ketika guru membuat skenario dan siswa bermain peran, melakukan simulasi kegiatan jual beli untuk mempelajari aritmatika sosial. Siswa dibuat menjadi kelompok-

kelompok kecil dan diberikan skenario oleh guru untuk melakukan kegiatan jual beli layaknya situasi nyata di sebuah toko maupun di pasar. Pembelajaran seperti ini dapat membuat siswa akan lebih memahami materi tersebut dibandingkan hanya dijelaskan saja oleh guru. Selain itu pembelajaran juga akan terasa lebih menyenangkan.

10. Pengalaman yang Dibuat-buat

Pengalaman belajar ini diperoleh melalui kejadian atau benda yang dimanipulasi agar mendekati keadaan yang sesungguhnya (Ulfayana, 2018).

Contoh:

Pengalaman belajar ini dapat diperoleh melalui benda yang dimanipulasi seperti halnya ketika ingin mempelajari etnomatematika konsep bangun ruang dari Tabut. Guru tidak harus membawa tabut yang berukuran besar yang biasanya hanya dibuat ketika festival Tabut akan dilaksanakan, tetapi guru dapat membawa miniatur Tabut saja. Miniatur ini lah yang disebut sebagai benda yang dibuat agar mendekati bentuk tabut yang sesungguhnya. Dengan miniatur ini siswa mendapat gambaran mengenai bentuk Tabut dan dapat mengidentifikasi bentuk bangun ruang apa saja yang ada dalam bangunan Tabut. Hal ini membawa pelajaran matematika yang bersifat abstrak menjadi konkret dan membuat pembelajaran lebih menyenangkan. Selain itu siswa juga lebih mengenal Tabut sehingga kebudayaan daerah Bengkulu dapat dilestarikan.

11. Pengalaman Langsung

Pengalaman langsung merupakan pengalaman belajar yang diperoleh siswa ketika mengalami atau merasakan sendiri yang berhubungan dengan tujuan yang hendak dicapai, dengan kata lain pengalaman ini sebagai hasil dari aktivitas sendiri (Ulfayana, 2018).

Contoh berdasarkan pengalaman:

Selain itu ketika siswa benar-benar melakukan hal yang nyata seperti dengan menghitung volume sebuah wadah yang berbentuk tabung dengan mengisinya dengan pasir serta menghitung luas permukaan jaring-jaring tabung yang mereka buat sendiri dari kertas, mereka lebih cepat dalam memahaminya dan daya ingat mereka mengenai materi tersebut lebih tinggi. Siswa juga terlihat lebih tertarik mengenai materi yang diajarkan dan antusias dalam belajar.

Berdasarkan pengalaman mengajar atau belajar yang pernah dialami, teori kerucut pengalaman Edgar Dale ini benar. Semakin banyaknya indera

yang dilibatkan (penglihatan, pendengaran, perasaan, penciuman dan peraba) dan semakin tingginya tingkat keterlibatan siswa dalam pembelajaran, maka semakin tinggi pula tingkat pemahaman dan daya ingat siswa mengenai materi yang diajarkan.

Pembelajaran yang melibatkan siswa secara aktif akan membuat pembelajaran menjadi lebih menarik, bermakna, dan menyenangkan. Peranan aktif siswa dalam kegiatan tersebut membuat tambahan pengalaman, pengetahuan serta wawasan yang lebih luas, sehingga memancing pengalaman belajar dengan pemahaman dan daya ingat yang tinggi.

A. Pengertian Model APOS

Teori APOS ini lahir dengan tujuan untuk memahami mekanisme abstraksi reflektif yang diperkenalkan oleh Piaget yang menjelaskan perkembangan berpikir logis matematika pada anak (Khairani, 2016:48). Menurut Hanifah (2016:25), ketika pembelajaran matematika/kalkulus dikaitkan dengan teori APOS, penerapan teori APOS, dan kemampuan berfikir tingkat tinggi, atau dengan kata lain jika pembelajaran Matematika/Kalkulus diajarkan dengan teori APOS dan pendekatan yang berpusat pada peserta didik, maka akan terbangun kemampuan berfikir tingkat tinggi peserta didik. Menurut Dubinsky, kerangka teoretis APOS dalam konstruksi konsep matematika adalah transformasi objek oleh individu sebagai eksternal. Transformasi dicapai dengan menanggapi petunjuk eksternal yang memberikan rincian langkah-langkah apa yang akan diambil.

Teori APOS merupakan penjabaran konstruksi mental dari *action*, *process*, *object*, dan *schema* atau dalam bahasa Indonesia yaitu aksi, proses, objek, dan skema. Menurut teori APOS, aksi adalah suatu aktivitas berupa pengulangan fisik atau manipulasi mental berdasarkan algoritma eksplisit. Aksi ini merupakan respons subjek terhadap rangsangan dari luar. Aksi dapat dianggap sebagai transformasi fisik atau mental untuk satu objek untuk mendapatkan yang lain. Jika aksi diulang dan dilakukan refleksi terhadap aksi tersebut, maka aksi ini diinternalisasi dalam proses. Artinya, itu adalah struktur internal yang dieksekusi dalam aksi yang sama, tetapi tidak perlu diperoleh secara langsung dari stimulus eksternal.

Individu dapat membangun objek kognitif dengan dua cara. Pertama, jika seorang individu berpikir tentang suatu aksi yang diterapkan pada proses tertentu dan mengetahui bahwa proses tersebut adalah suatu entitas, maka transformasi (aksi atau proses) dilakukan dan benar-benar dibangun sebagai satu kesatuan. Individu merekonstruksi proses ini sebagai objek kognitif. Dalam hal ini, proses dikatakan dienkapsulasi dalam suatu objek. Kedua, untuk membangun objek kognitif, individu melakukan refleksi terhadap skema tertentu dan mengakui bahwa skema tersebut adalah suatu totalitas yang dapat dilakukan aksi padanya. Dalam hal ini, individu dikatakan *tematisasi* (*thematized*) skema menjadi objek. Skema matematika tertentu

adalah kumpulan aksi individu, proses, objek, dan skema lain yang terkait dalam pikiran individu ketika berhadapan dengan masalah matematika.

B. Sintaks Model APOS

Teori APOS memiliki sintaks yang terdiri dari beberapa fase. Berikut ini adalah sintaks yang digunakan dalam penerapan Teori APOS untuk pembelajaran di sekolah yang dimodifikasi dari sintaks Teori APOS menurut Hanifah (2019: 73)

- a. Fase Orientasi. Pada fase ini peserta didik diarahkan untuk siap menerima pembelajaran dengan pokok bahasan terbaru. Peserta didik dibentuk menjadi beberapa kelompok kecil yang heterogen. Dilanjutkan dengan peserta didik mendapatkan LKPD dengan Teori APOS.
- b. Fase Praktikum. Pada fase ini peserta didik melaksanakan perintah suatu program aplikasi komputer misalnya GeoGebra yang dapat digunakan untuk materi diferensial di sekolah, di mana perintah tersebut tersedia pada fase Praktikum di LKPD. Fase ini bertujuan untuk mengenalkan peserta didik pada suatu situasi atau informasi yang baru (konsep-konsep yang baru). Fase Praktikum dipilih karena karakteristik pembelajaran matematika berdasarkan teori APOS adalah pengetahuan dikonstruksi menggunakan mental APOS (Aksi, Proses, Objek dan Skema).
- c. Fase Diskusi Kelompok Kecil. Pada fase ini peserta didik dalam kelompok kecil membicarakan atau menjawab pertanyaan-pertanyaan yang telah disediakan pada fase Diskusi Kelompok Kecil dalam LKPD. Pertanyaan tersebut akan mengarahkan peserta didik untuk dapat menemukan konsep yang sedang mereka pelajari.
- d. Fase Diskusi Kelas. Pada fase ini kelompok peserta didik yang terpilih mempresentasikan kesimpulan atau mempresentasikan penyelesaian salah satu soal pada fase diskusi kelompok kecil atau soal lainnya di depan kelas. Diskusi kelas yang dilaksanakan setelah Diskusi Kelompok bertujuan agar peserta didik yang mampu menyelesaikan soal-soal yang ada pada fase diskusi kelompok kecil, dapat menjelaskannya di depan kelas sehingga teman-teman di kelas mempunyai pemahaman yang sama. Jika peserta didik salah langkah, maka pendidik dapat meluruskan dengan cara memberikan *scaffolding*.
- e. Fase Latihan. Fase ini bertujuan untuk memantapkan pemahaman peserta didik akan suatu pokok bahasan, yang telah dibahas pada fase

sebelumnya. Terbatasnya waktu di kelas, maka soal-soal yang ada pada Latihan bisa dijadikan pekerjaan rumah (PR). Dalam menyelesaikan PR, peserta didik diminta mempelajari materi diferensial dari berbagai sumber, sehingga keterbatasan waktu dan info ketika di kelas dapat dilengkapi peserta didik dari mempelajari materi diferensial di rumah.

- f. Fase Evaluasi. Pada fase ini pendidik mengumpulkan informasi yang dapat dipakai untuk mengambil keputusan, apakah materi bisa diteruskan atau dilakukan pemberian bantuan untuk perbaikan, atau untuk keputusan lainnya.
- g. Waktu Istirahat. Jika peserta didik kelihatan lelah bekerja berturut-turut selama beberapa jam pelajaran, sebaiknya mereka diberikan waktu istirahat 10 menit sebelum fase diskusi kelas dilanjutkan.

A. Pengantar GeoGebra

GeoGebra merupakan salah satu *software* yang dapat digunakan secara gratis untuk mendukung pembelajaran matematika. *Software* GeoGebra dapat digunakan untuk mengkonstruksi berbagai bentuk mulai dari titik, garis, grafik, berbagai bentuk bangun datar hingga bangun ruang tiga dimensi. Selain itu GeoGebra juga dapat digunakan untuk berbagai topik lainnya seperti diferensial, integral, matriks, trigonometri, dan lain-lain.

GeoGebra dikembangkan oleh Markus Hohenwarter pada tahun 2001. Aplikasi ini terus mengalami perkembangan hingga saat ini. GeoGebra dapat digunakan secara *online* maupun *offline*. Penggunaan GeoGebra secara *offline* dapat dilakukan dengan mengunduh aplikasi tersebut secara gratis melalui internet dari situs GeoGebra, yaitu www.geogebra.org. Selain itu GeoGebra juga dapat digunakan di *smartphone* dengan mengunduhnya di Play Store atau App Store. Penggunaan aplikasi GeoGebra diharapkan dapat meningkatkan kreativitas, pengetahuan, serta pemahaman peserta didik mengenai berbagai konsep matematika, seperti konsep diferensial yang dibahas pada buku penuntun ini.

B. Manfaat GeoGebra

Menurut Mahmudi (2010) penggunaan *software* GeoGebra memberikan beberapa keuntungan, di antaranya yaitu sebagai berikut:

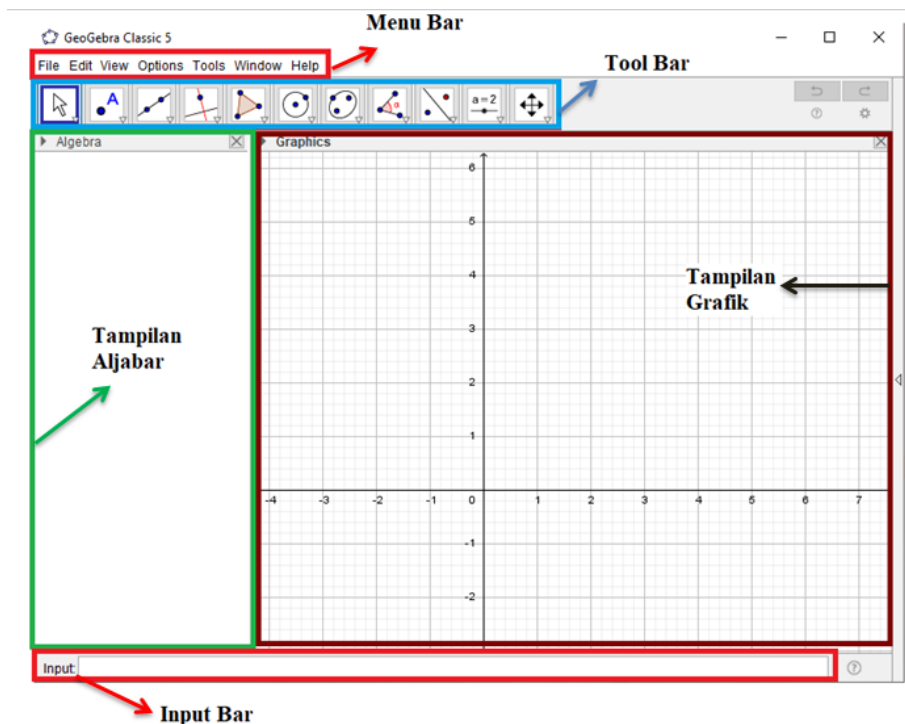
1. Lukisan-lukisan geometri yang dihasilkan lebih cepat dan teliti dibandingkan dengan menggunakan pensil, penggaris, atau jangka.
2. Terdapat fasilitas animasi dan gerakan-gerakan manipulasi (*dragging*) yang dapat memberikan pengalaman visual yang lebih jelas kepada peserta didik dalam memahami konsep geometri.
3. Dapat dimanfaatkan sebagai balikan/evaluasi untuk memastikan bahwa lukisan yang telah dibuat sudah benar.
4. Mempermudah guru dan peserta didik dalam menyelidiki atau menunjukkan sifat-sifat yang berlaku pada suatu objek geometri.

Menurut Agung (2017) dalam pembelajaran matematika, GeoGebra dapat dimanfaatkan untuk berbagai keperluan, misalnya:

1. Membuat dokumen terkait pembelajaran matematika, misalnya untuk penyiapan bahan ajar, modul belajar, makalah, bahan presentasi dll. Sebagai contoh GeoGebra digunakan untuk melukis bangun datar. Gambar yang dihasilkan ini dapat disalin ke aplikasi lain semisal ke aplikasi Word, MS PowerPoint atau aplikasi lain untuk diolah lebih lanjut yang sebelumnya diimpor sesuai dengan format *file* yang diinginkan.
2. Membuat media pembelajaran atau alat bantu pengajaran matematika. Media ini dapat digunakan untuk menjelaskan konsep matematika atau dapat juga digunakan untuk eksplorasi, baik untuk ditayangkan di depan kelas oleh guru atau peserta didik bereksplorasi menggunakan komputer sendiri.
3. Membuat lembar kerja digital dan interaktif.
4. Menyelesaikan atau memverifikasi permasalahan matematika. Dalam hal ini dapat dimanfaatkan untuk mengecek jawaban soal. Namun, perlu diperhatikan bahwa peserta didik jangan diarahkan untuk mencari jawaban dengan GeoGebra tapi lebih kepada mengecek jawaban, penekanannya adalah kepada proses yang benar.

C. Tampilan GeoGebra

Saat membuka *software* GeoGebra akan muncul tampilan awal dari GeoGebra yang memuat area Menu Bar, Tool Bar, Input Bar, Tampilan Aljabar. Menu Bar dan Tool Bar terdiri dari berbagai macam fitur yang dapat digunakan berbagai fungsi yang berbeda.



D. Menu Bar

Menu Bar merupakan menu utama pada GeoGebra yang terdiri dari File, Edit, View, Option, Tools, Windows, dan Help. Berbagai menu tersebut memiliki menu lainnya. Menu File digunakan untuk membuat, menyimpan, membuka, dan mengekspor *file*, serta keluar dari program. Menu Edit digunakan untuk mengedit lukisan. Menu View digunakan untuk mengatur tampilan GeoGebra. Menu Option untuk mengatur berbagai fitur tampilan, seperti pengaturan ukuran huruf, pengaturan jenis (*style*) objek-objek geometri, dan sebagainya. Sedangkan menu Help menyediakan petunjuk teknis penggunaan program GeoGebra. Berbagai menu selengkapnya disajikan pada gambar berikut ini.

a. Menu File

Menu	Fungsi
New Window	Menampilkan <i>file</i> GeoGebra kosong tanpa menutup file yang sudah terbuka
New	Menampilkan <i>file</i> GeoGebra kosong dan menutup file yang sedang terbuka
Open	Membuka <i>file</i> GeoGebra yang sudah ada
Open Recent	Melihat daftar dan membuka <i>file</i> GeoGebra yang baru saja ditutup

Menu	Fungsi
Save	Menyimpan <i>file</i> GeoGebra
Save as	Menyimpan ulang <i>file</i> GeoGebra dengan nama yang berbeda
Share	Berbagi <i>file</i> GeoGebra ke pengguna yang lain
Export	Mengubah format <i>file</i> GeoGebra sesuai dengan kebutuhan, seperti mengubah ke format gambar, <i>webpage</i> , <i>copy clipboard</i> dll.
Print Preview	Melihat tampilan GeoGebra sebelum di cetak melalui printer
Close	Menutup aplikasi GeoGebra

b. Menu Edit

Menu	Fungsi
Undo	Mengembalikan tampilan ke posisi terakhir
Redo	Mengembalikan tampilan setelah terhapus
Copy	Menyalin objek yang ada di GeoGebra
Paste	Menempelkan objek yang sudah disalin
Graphics view to clipboard	Menyalin tampilan GeoGebra untuk ditempelkan ke Microsoft Word
Insert image from	Menambahkan file gambar ke dalam tampilan grafik GeoGebra
Object properties	Mengubah pengaturan tampilan objek
Select all	Memilih semua objek

c. Menu View

Menu	Fungsi
Algebra	Memunculkan tampilan aljabar
Spreadsheet	Menampilkan lembar kerja kolom dan baris seperti Excel
CAS	Menampilkan kalkulator aljabar
Graphics	Menampilkan tampilan grafik
Graphics 2	Menampilkan tampilan grafik kedua
3D Graphics	Menampilkan tampilan 3 dimensi
Constructon Protocol	Menampilkan daftar <i>object</i> secara terurut
Probability Calculator	Menampilkan kalkulator peluang
Keyboard	Menampilkan keyboard virtual GeoGebra
Input Bar	Menampilkan/menyembunyikan kolom Input Bar yang ada di bawah GeoGebra
Layout	Mengatur tampilan GeoGebra secara komprehensif
Refresh Views	Menyegarkan/memuat ulang tampilan GeoGebra

d. Menu Options

Menu	Fungsi
Algebra Description	Value: menampilkan hasil <i>object</i> Definisi: menampilkan nama suatu objek Command: menampilkan formula suatu objek
Rounding	Mengatur jumlah tempat desimal atau angka yang hendak dimunculkan

Menu	Fungsi
Labeling	Menentukan pengaturan label dari objek yang sudah dibuat
Font Size	Mengatur ukuran tampilan huruf
Language	Mengatur bahasa <i>interface</i> GeoGebra
Advanced	Pengaturan lebih lanjut mengenai tampilan grafik GeoGebra
Save Sttings	Menyimpan pengaturan yang telah dibuat
Restore Default Settings	Mengembalikan pengaturan saat awal penginstalan

e. Menu Tools

Menu	Fungsi
Customize Toolbar	Mengatur beberapa Tool Bar yang akan ditampilkan
Create New Tool	Membuat Tool Bar baru dari beberapa fungsi Tool Bar yang sudah ada
Manage Tools	Menghapus dan memodifikasi nama dan <i>icon</i> Tool Bar

f. Menu Help

Menu	Fungsi
Tutorials	Membuka link panduan penggunaan
Manual	Membuka link manual operasi GeoGebra
Geogebra Forum	Membuka link forum GeoGebra
About / License	Informasi lisensi GeoGebra
Report Bug	Laporkan kesalahan dari fungsi aljabar atau ikonik yang ada di GeoGebra

E. Tool Bar

Ikon Tool Bar	Nama Tool Bar	Fungsi
	Move	Untuk memilih objek
	Move Around Point	Untuk memindahkan objek di sekeliling titik
	Freehand Snap	Untuk membuat gambar dengan bebas
	Pen	Untuk membuat tulisan/gambar dengan bebas
	New Point	Untuk membuat titik
	Point on object	Untuk membuat titik pada objek

Ikon Tool Bar	Nama Tool Bar	Fungsi
	Attach/Deattach Point	Untuk mengaitkan titik
	Intersect	Untuk membuat titik potong
	Midpoint or center	Untuk membuat titik tengah
	Complex Number	Untuk mengetahui bilangan kompleks
	Extremum	Untuk menentukan titik maksimum/ minimum suatu grafik
	Roots	
	Line	Untuk membuat garis lurus
	Segment	Untuk membuat ruas garis dua buah titik
	Segment with given length	Untuk membuat ruas garis yang ditentukan
	Ray	Untuk membuat garis cahaya
	Polyline	Untuk membuat banyak garis
	Vector	Untuk membuat <i>vector</i> di antara dua titik
	Vector from point	Untuk membuat <i>vector</i> dari suatu titik
	Perpendicular Line	Untuk membuat garis tegak lurus
	Parallel line	Untuk membuat garis sejajar
	Perpendicular bisector	Untuk membuat garis tegak lurus di antara dua titik
	Angle bisector	Untuk membagi sudut sama besar

Ikons Tool Bar	Nama Tool Bar	Fungsi
	Tangents	Untuk membuat garis tangen
	Polar or diameter Line	Untuk membuat garis polar
	Best Fit Line	Untuk membuat garis cocok terbaik
	Locus	Untuk membuat titik yang bergantung pada titik lain
	Polygon	Untuk membuat <i>polygon</i> di antara titik-titik
	Regular Polygon	Untuk membuat <i>polygon</i> dari n titik
	Rigid Polygon	Untuk membuat <i>polygon</i> yang bersimpul
	Vektor Polygon	Untuk membuat <i>polygon</i> dengan <i>vector</i>
	Circle through three points	Untuk membuat lingkaran melewati tiga titik
	Circle: Center & Radius	Untuk membuat tali busur yang disambungkan dengan garis
	Compass	Untuk membuat kompas
	Circle through 3 points	Untuk membuat busur tiga titik pada lingkaran
	Semicircle	Untuk membuat setengah lingkaran
	Circular Arc	Untuk membuat busur
	Circumcircular Arc	Untuk membuat
	Circular Sector	Untuk membuat tali busur yang disambungkan oleh garis
	Circumcircular sector	Untuk membuat tali busur dan jari-jari suatu lingkaran

Ikon Tool Bar	Nama Tool Bar	Fungsi
	Elips	Untuk membuat elips bebas
	Hiperbola	Untuk membuat hiperbola
	Parabola	Untuk membuat parabola
	Conic through five point	Untuk membuat <i>conic</i> dari lima titik
	Angle	Untuk membuat besar sudut
	Angle with given size	Untuk membuat sudut yang ditentukan
	Distance or length	Untuk menghitung panjang ruas garis
	Area	Untuk menghitung luas daerah
	Slope	Untuk membuat garis <i>slope</i> atau tangen
	Create list	Untuk membuat <i>list number</i>
	Relation	Untuk mengetahui suatu relasi
	Function Inspector	Untuk menyelidiki terkait dengan fungsi
	Reflect about line	Untuk merefleksikan <i>object</i> dengan titik pusat atau garis
	Reflect object about point	Untuk membuat refleksi dari titik
	Reflect object about circle	Untuk merefleksikan objek melalui lingkaran
	Rotate around point	Untuk merotasikan objek dengan sudut
	Translate by Vector	Untuk mentranslasi objek oleh vektor

Ikon Tool Bar	Nama Tool Bar	Fungsi
	Dilate from point	Untuk mendilatasi objek
	Slider	Untuk membuat peluncur/ <i>slide</i>
	Text	Untuk membuat teks pada lembar grafik
	Image	Untuk menambahkan gambar
	Button	Untuk membuat tombol aktif
	Check Box	Untuk membuat tombol akhir <i>hidden object</i> yang lebih dari satu
	Input Box	Untuk membuat kolom <i>input box</i>
	Move graphic view	Untuk memindahkan/ menggeser tampilan grafik
	Zoom in	Untuk memperbesar tampilan grafik
	Zoom out	Untuk memperkecil tampilan grafik
	Show or hide object	Untuk menyembunyikan atau menampilkan objek
	Show or hide label	Untuk menyembunyikan dan memunculkan nama label objek
	Delete	Untuk menghapus objek
	Copy visual style	Untuk menyalin objek

A. Kerangka RPP

**RENCANA PELAKSANAAN PEMBELAJARAN
(RPP)**

Satuan Pendidikan :
 Kelas/Semester :
 Mata Pelajaran :
 Materi Pokok :
 Alokasi Waktu :
 Pertemuan :

B. Kompetensi Inti

1. Menghargai dan menghayati ajaran agama yang dianutnya.
2. Menghargai dan menghayati perilaku jujur, disiplin, tanggung jawab, peduli (toleransi, gotong royong), santun, percaya diri, dalam berinteraksi secara efektif dengan lingkungan sosial dan alam dalam jangkauan pergaulan dan keberadaannya
3. Memahami pengetahuan (faktual, konseptual, dan prosedural) berdasarkan rasa ingin tahunya tentang ilmu pengetahuan, teknologi, seni, budaya terkait fenomena dan kejadian tampak mata
4. Mencoba, mengolah, dan menyaji dalam ranah konkret (menggunakan, mengurai, merangkai, memodifikasi, dan membuat) dan ranah abstrak (menulis, membaca, menghitung, menggambar, dan mengarang) sesuai dengan yang dipelajari di sekolah dan sumber lain yang sama dalam sudut pandang/teori.

C. Kompetensi Dasar dan Indikator Pencapaian Kompetensi

No	Kompetensi Dasar	Indikator Pencapaian Kompetensi (IPK)
1.		
2.		

D. Tujuan Pembelajaran

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.

E. Materi Ajar

- ❖ Fakta
- ❖ Konsep
- ❖ Prinsip
- ❖ Prosedur

F. Model, Pendekatan, dan Metode Pembelajaran

- a. Model Pembelajaran : *Action, Process, Object, and Schema* (APOS)
- b. Pendekatan :
- c. Metode Pembelajaran :

G. Media dan Sumber Pembelajaran

1. Media
2. Sumber belajar:

H. Langkah-Langkah Pembelajaran

Kegiatan	Deskripsi Kegiatan	Alokasi Waktu
1. Kegiatan Pendahuluan		
Orientasi		
Apersepsi		
Motivasi		

Kegiatan	Deskripsi Kegiatan	Alokasi Waktu
Pemberian Acuan		
II. Kegiatan Inti		110 Menit
Fase 1: Orientasi		
Fase 2: Praktikum		
Fase 3: Diskusi Kelompok Kecil		
Fase 4: Diskusi Kelas		
Fase 5: Latihan		
Fase 6: Evaluasi		
III. Kegiatan Penutup		
Penutup		

Kegiatan	Deskripsi Kegiatan	Alokasi Waktu

I. Penilaian

1. Sikap

- a. Teknik :
- b. Bentuk :
- c. Instrumen :

2. Pengetahuan

- a. Teknik :
- b. Bentuk :
- c. Instrumen :

3. Keterampilan

- a. Teknik :
- b. Bentuk :
- c. Instrumen :

Bengkulu, 2022

Mengetahui,
Kepala SMA

Guru Mata Pelajaran

.....
NIP.....

.....
NIP.....

B. Contoh RPP dan LKPD

RENCANA PELAKSANAAN PEMBELAJARAN (RPP)

Satuan Pendidikan : SMA
Kelas/Semester : XI/2
Mata Pelajaran : Matematika
Materi Pokok : Turunan Fungsi Trigonometri
Alokasi Waktu : 3 x 45 Menit
Pertemuan : 1

A. Kompetensi Inti

1. Menghargai dan menghayati ajaran agama yang dianutnya.
2. Menghargai dan menghayati perilaku jujur, disiplin, tanggung jawab, peduli (toleransi, gotong royong), santun, percaya diri, dalam berinteraksi secara efektif dengan lingkungan sosial dan alam dalam jangkauan pergaulan dan keberadaannya
3. Memahami pengetahuan (faktual, konseptual, dan prosedural) berdasarkan rasa ingin tahunya tentang ilmu pengetahuan, teknologi, seni, budaya terkait fenomena dan kejadian tampak mata
4. Mencoba, mengolah, dan menyaji dalam ranah konkret (menggunakan, mengurai, merangkai, memodifikasi, dan membuat) dan ranah abstrak (menulis, membaca, menghitung, menggambar, dan mengarang) sesuai dengan yang dipelajari di sekolah dan sumber lain yang sama dalam sudut pandang/teori.

B. Kompetensi Dasar dan Indikator Pencapaian Kompetensi

No	Kompetensi Dasar	Indikator Pencapaian Kompetensi (IPK)
1.	3.3 Menggunakan prinsip turunan ke fungsi Trigonometri sederhana	3.3.1 Menjelaskan konsep turunan fungsi trigonometri sederhana 3.3.1 Menjelaskan konsep turunan fungsi trigonometri bentuk $\sin u(x)$, $\cos u(x)$, $\tan u(x)$, $\csc u(x)$, $\sec u(x)$, dan $\cot u(x)$
2.	4.3 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan turunan fungsi trigonometri	4.3.1 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan turunan fungsi trigonometri sederhana 4.3.2 Menyelesaikan masalah yang

No	Kompetensi Dasar	Indikator Pencapaian Kompetensi (IPK)
		berkaitan dengan turunan fungsi trigonometri bentuk $\sin u(x)$, $\cos u(x)$, $\tan u(x)$, $\csc u(x)$, $\sec u(x)$, dan $\cot u(x)$

C. Tujuan Pembelajaran

1. Peserta didik dapat menjelaskan turunan fungsi trigonometri sederhana.
2. Peserta didik dapat menjelaskan turunan fungsi trigonometri bentuk $\sin u(x)$, $\cos u(x)$, $\tan u(x)$, $\csc u(x)$, $\sec u(x)$, dan $\cot u(x)$
3. Peserta didik dapat menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan turunan fungsi trigonometri sederhana
4. Peserta didik dapat menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan turunan fungsi trigonometri bentuk $\sin u(x)$, $\cos u(x)$, $\tan u(x)$, $\csc u(x)$, $\sec u(x)$, dan $\cot u(x)$

D. Materi Ajar

- ❖ Fakta
Turunan fungsi aljabar, turunan fungsi trigonometri
- ❖ Konsep
Menentukan turunan fungsi trigonometri.
- ❖ Prinsip
Menggunakan prinsip turunan ke fungsi trigonometri sederhana.
- ❖ Prosedur
Langkah-langkah dalam menentukan penyelesaian masalah yang berkaitan dengan turunan fungsi trigonometri sederhana dan turunan fungsi trigonometri bentuk $\sin u(x)$, $\cos u(x)$, dan $\tan u(x)$.

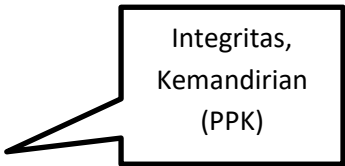
E. Model, Pendekatan, dan Metode Pembelajaran

- a. Model Pembelajaran : *Action, Process, Object, and Schema (APOS)*
- b. Pendekatan : Saintifik dan TPACK
- c. Metode Pembelajaran : Diskusi, Tanya jawab dan Penugasan

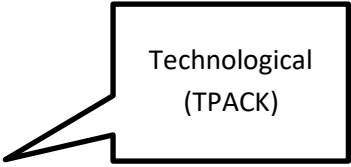
F. Media dan Sumber Pembelajaran

1. Media
 - a. Bahan ajar
 - b. LKPD
 - c. Laptop
 - d. LCD
 - e. Spidol dan Papan Tulis
2. Sumber belajar:
 - a. Manullang, S., Kristianto, A., dkk. (2017). *Buku Paket Matematika SMA/MA/MAK Kelas XII Kurikulum 2013 Edisi Revisi 2017*. Jakarta: Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.
 - b. Internet

G. Langkah-Langkah Pembelajaran

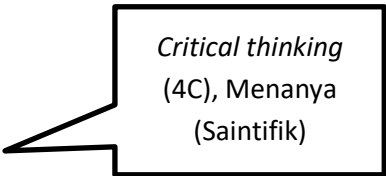
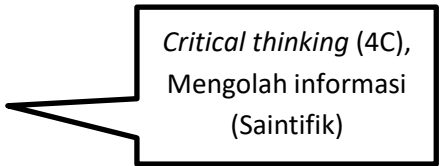
Kegiatan	Deskripsi Kegiatan	Alokasi Waktu
2. Kegiatan Pendahuluan		15 Menit
Orientasi	1. Guru bersama peserta didik saling memberi dan menjawab salam.	
	2. Salah satu peserta didik diminta untuk memimpin doa. (Religius)	
	3. Guru bersama peserta didik untuk menyanyikan lagu Indonesia Raya yang dipimpin oleh salah satu peserta didik. (Nasionalisme)	 Nasionalisme, Religius (PPK)
	4. Guru menanyakan kabar dan mengecek kehadiran peserta didik.	4 menit
	5. Peserta didik diminta untuk menyiapkan diri agar siap untuk belajar serta memeriksa kerapian diri dan bersikap disiplin dalam setiap kegiatan. (Integritas,	 Integritas, Kemandirian (PPK)

Kegiatan	Deskripsi Kegiatan	Alokasi Waktu
	<i>Kemandirian).</i>	
Apersepsi	6. Guru menanyakan kepada peserta didik dan meminta salah satu peserta didik untuk menjelaskan mengenai materi turunan fungsi aljabar yang telah dipelajari pada pertemuan sebelumnya serta materi prasyarat yaitu limit dan trigonometri yang telah dipelajari. <i>(Collaboration-Menanya)</i> 7. Peserta didik mendengarkan dengan saksama mengenai tujuan pembelajaran yang disampaikan oleh guru. <i>(Communication-Mengomunikasikan)</i> 8. Peserta didik gambaran mengenai turunan fungsi trigonometri <i>(Communication-Mengomunikasikan)</i>	<i>Collaboration</i> (4C), Menanya (Saintifik) 4 Menit <i>Communication (4C),</i> Mengomunikasikan (Saintifik)
Motivasi	9. Guru memberikan gambaran tentang manfaat mempelajari turunan fungsi trigonometri, seperti untuk mengetahui kuat arus maksimum dan minimum yang dapat diselidiki dengan menggunakan turunan fungsi trigonometri.	4 Menit
Pemberian Acuan	10. Guru memberitahukan materi pelajaran yang akan dibahas, yaitu menentukan turunan fungsi trigonometri	3 Menit

Kegiatan	Deskripsi Kegiatan	Alokasi Waktu
	sederhana dan turunan fungsi trigonometri bentuk $\sin u(x)$, $\cos u(x)$, $\tan u(x)$, $\csc u(x)$, $\sec u(x)$, dan $\cot u(x)$. 11. Guru memberitahukan mekanisme pembelajaran dengan pengerjaan LKPD dan mekanisme penilaian.	
II. Kegiatan Inti		110 Menit
Fase 1: Orientasi	12. Guru Membagi peserta didik ke dalam kelompok yang heterogen 13. Guru membagikan LKPD kepada setiap kelompok 14. Guru meminta peserta didik untuk memperhatikan masalah mengenai turunan fungsi trigonometri sederhana yang terdapat pada LKPD 15. Guru mendorong peserta didik agar aktif bekerja dan belajar bersama kelompok kecil yang telah dibentuk. 16. Guru memberikan kesempatan kepada peserta didik untuk bertanya	10 menit
Fase 2: Praktikum	17. Guru meminta peserta didik untuk menyiapkan laptopnya dan membuka <i>software</i> GeoGebra yang telah diinstal sebelum pembelajaran. (Technological) 18. Guru meminta peserta	 Technological (TPACK)

Kegiatan	Deskripsi Kegiatan	Alokasi Waktu
	didik untuk mengamati dan memahami langkah-langkah penyelesaian pada fase praktikum (<i>Collaboration-Mengamati</i>) 19. Guru meminta peserta didik berkolaborasi untuk menyelesaikan fase praktikum secara bersama-sama dengan kelompok mereka masing-masing. (<i>Collaboration</i>) 20. Guru berkeliling mengamati peserta didik yang berdiskusi, mencermati dan menemukan berbagai kesulitan yang dialami peserta didik, serta memberikan kesempatan kepada peserta didik untuk bertanya hal-hal yang belum dipahami	Collaboration (4C), Mengamati (Saintifik) 20 menit Collaboration (4C)
Fase 3: Diskusi Kelompok Kecil	21. Guru meminta peserta didik untuk mulai mengerjakan LKPD dengan mengacu pada hasil praktikum, berdiskusi dan mengumpulkan informasi dari berbagai sumber seperti buku pegangan peserta didik, konsep atau aturan yang sudah dipelajari sebelumnya untuk membantu dalam memecahkan masalah secara berkelompok. (<i>Literasi; Critical Thinking-</i>	Literasi, <i>Critical thinking</i> (4C), Mengumpulkan informasi (Saintifik), Disiplin, Kerja Sama (PPK)

Kegiatan	Deskripsi Kegiatan	Alokasi Waktu
	Mengumpulkan Informasi–Disiplin dan Kerja Sama) 22. Guru meminta peserta didik untuk bekerja sama menyelesaikan permasalahan dalam LKPD berdasarkan informasi yang telah didapatnya dengan mengikuti langkah-langkah pengerjaan yang terdapat pada LKPD. (<i>Creativity; Critical thinking-Mengolah informasi</i>) 23. Guru mengamati peserta didik dan memberikan bantuan (<i>scaffolding</i>) berkaitan dengan kesulitan yang dialami peserta didik secara individu, kelompok atau klasikal. (<i>Collaboration</i>)	40 menit <i>Creativity, Critical Thinking (4C), Mengolah informasi (Saintifik)</i>
Fase 4: Diskusi Kelas	24. Guru menunjuk beberapa kelompok peserta didik untuk mempresentasikan hasil kerjanya di depan kelas terkait turunan fungsi trigonometri dengan percaya diri dan santun. (<i>Communication-Mengomunikasikan</i>) 25. Guru meminta peserta didik lainnya untuk memperhatikan kelompok yang sedang presentasi di depan kelas (<i>Mengamati</i>) 26. Guru melibatkan peserta didik	<i>Communication (4C), Mengomunikasikan (Saintifik)</i> 20 menit

Kegiatan	Deskripsi Kegiatan	Alokasi Waktu
	mengevaluasi jawaban kelompok penyaji dan kesempatan kepada peserta didik untuk bertanya dan menanggapi hasil presentasi kelompok penyaji dan dijawab oleh kelompok penyaji. (Critical thinking-Menanya)	 <i>Critical thinking (4C), Menanya (Saintifik)</i>
Fase 5: Latihan	27. Guru meminta peserta didik untuk mengerjakan soal pada fase latihan yang terdapat dalam LKPD. (Critical thinking-Mengolah informasi) 28. Guru memberikan kesempatan kepada peserta didik untuk bertanya apabila mengalami kesulitan.	 <i>Critical thinking (4C), Mengolah informasi (Saintifik)</i> 15 menit
Fase 6: Evaluasi	29. Guru meminta peserta didik untuk mengumpulkan LKPD dan jawaban latihan 30. Guru memeriksa jawaban LKPD yang telah didiskusikan secara berkelompok dan jawaban latihan yang dikerjakan oleh peserta didik secara individu. 31. Guru menganalisis informasi yang terkumpul dan mengarahkan semua peserta didik pada kesimpulan mengenai turunan fungsi trigonometri sederhana dan turunan fungsi trigonometri bentuk	5 menit

f. Instrumen : Terlampir

3. Keterampilan

d. Teknik : Observasi dan Penugasan

e. Bentuk : Tugas (Keterampilan)

f. Instrumen : Terlampir

Bengkulu, 2022

Mengetahui,

Kepala SMA

Guru Mata Pelajaran

.....
NIP.....

Lilia Gina Febrila, S.Pd.

Lembar Kerja Peserta Didik (LKPD)

Waktu: 2 x 45 Menit

Turunan Fungsi Trigonometri

Satuan Pendidikan : SMA
Mata pelajaran : Matematika



Kompetensi Dasar

- 3.3 Menggunakan prinsip turunan ke fungsi trigonometri sederhana
- 4.3 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan turunan fungsi trigonometri.

Tujuan Pembelajaran

- 1. Peserta didik dapat menjelaskan turunan fungsi trigonometri sederhana
- 2. Peserta didik dapat menjelaskan turunan fungsi trigonometri bentuk $\sin u(x)$, $\cos u(x)$, $\tan u(x)$, $\csc u(x)$, $\sec u(x)$, dan $\cot u(x)$
- 3. Peserta didik dapat menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan turunan fungsi trigonometri sederhana
- 4. Peserta didik dapat menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan turunan fungsi trigonometri bentuk $\sin u(x)$, $\cos u(x)$, $\tan u(x)$, $\csc u(x)$, $\sec u(x)$, dan $\cot u(x)$.



Nama Anggota Kelompok:

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.
- 5.

Petunjuk Penggunaan LKPD Berbasis Model APOS dengan Pendekatan Saintifik

1. Selesaikanlah LKPD ini dengan berdiskusi dengan teman kelompok
2. Kerjakan sesuai dengan perintah pengerjaan yang ada di dalam LKPD
3. Setiap langkah pengerjaan LKPD memiliki waktu yang berbeda-beda
4. Tanyakan kepada guru jika ada informasi LKPD yang kurang jelas

Fase Orientasi

Guru memberikan materi pelajaran mengenai turunan fungsi trigonometri sederhana

Fase Praktikum

Peserta didik mencari turunan suatu fungsi trigonometri sederhana menggunakan aplikasi GeoGebra

Fase Diskusi Kelompok Kecil

Peserta didik menyelesaikan soal-soal turunan fungsi trigonometri sederhana bentuk $\sin u(x)$, $\cos u(x)$, dan $\tan u(x)$ dengan mendiskusikan bersama teman kelompok

Fase Diskusi Kelas

Secara bergiliran setiap kelompok menjelaskan hasil diskusi kelompok di depan kelas dilanjutkan dengan diskusi kelas

Fase latihan

Peserta didik menyelesaikan soal-soal turunan fungsi trigonometri sederhana bentuk $\sin u(x)$, $\cos u(x)$, dan $\tan u(x)$ secara mandiri

Rangkuman Materi

1. $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
2. $f(x) = \frac{u}{v} \rightarrow f'(x) = \frac{u'v-uv'}{v^2}$
3. $f(x) = ax^n \rightarrow f'(x) = n \cdot a x^{n-1}$



Fase Orientasi

MENANYA (10 MENIT)

Tulislah dua pertanyaan mengenai turunan fungsi trigonometri sederhana dan turunan fungsi trigonometri bentuk $\sin u(x)$, $\cos u(x)$, dan $\tan u(x)$! (misal: tentukan turunan pertama dari fungsi $f(x) = \sin 2x$)



Fase Praktikum

MENGEKSPLORASI & MENGAMATI (20 MENIT)

Langkah 1

❖ **Alat dan Bahan**

1. Komputer/Laptop
2. Perangkat Lunak GeoGebra
3. Alat Tulis

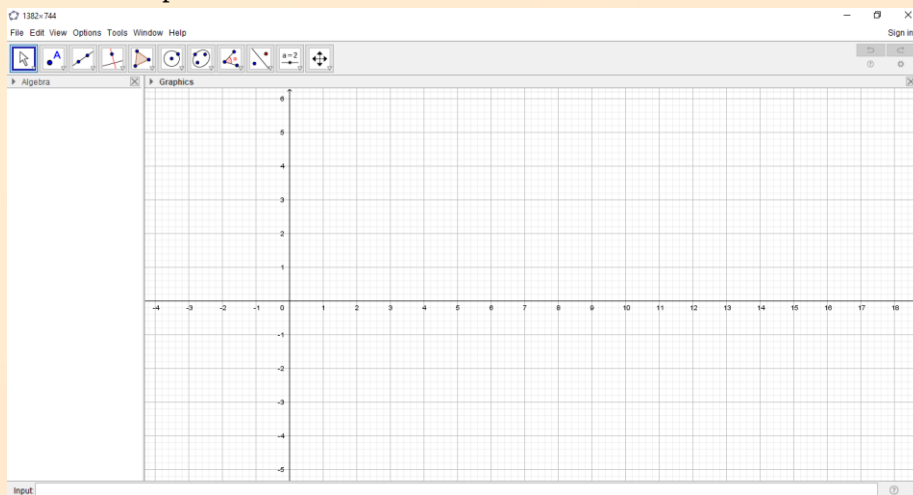
❖ **Aplikasi GeoGebra**

Untuk menentukan nilai turunan suatu fungsi trigonometri sederhana, dapat dilakukan dengan cara yang lebih mudah yaitu dengan menggunakan aplikasi GeoGebra. Akan dicari turunan pertama dari fungsi, yaitu:

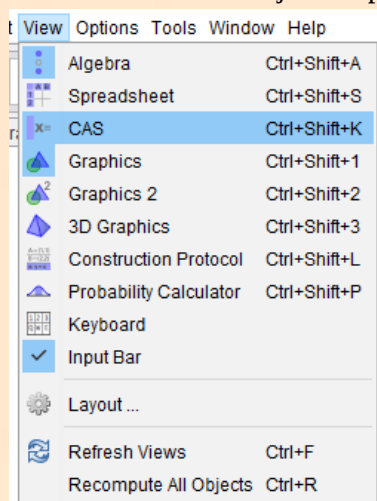
- | | | |
|--------------------|--------------------|---------------------|
| 1. $f(x) = \sin x$ | 4. $f(x) = \csc x$ | 7. $f(x) = \sin 5x$ |
| 2. $f(x) = \cos x$ | 5. $f(x) = \sec x$ | 8. $f(x) = \cos 2x$ |
| 3. $f(x) = \tan x$ | 6. $f(x) = \cot x$ | 9. $f(x) = \tan 3x$ |

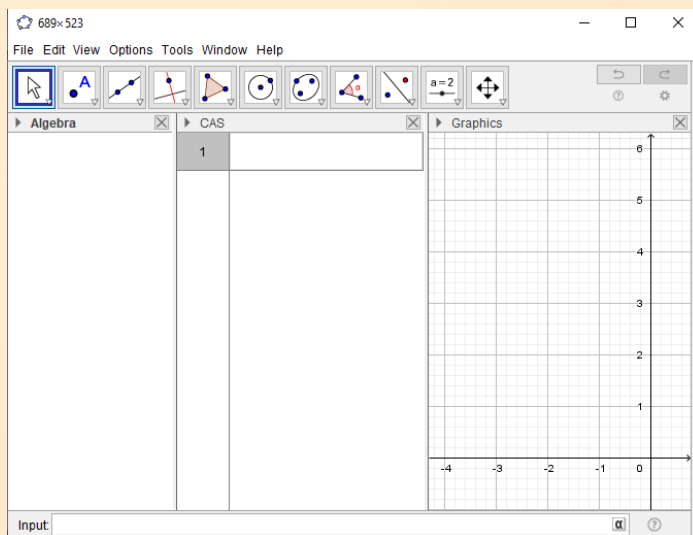
Adapun langkah-langkahnya adalah sebagai berikut:

1. Buka aplikasi GeoGebra

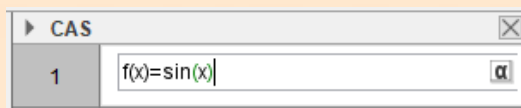


2. Pada Menu Bar, klik View kemudian pilih CAS. Sehingga akan muncul CAS atau kalkulator aljabar seperti tampak berikut

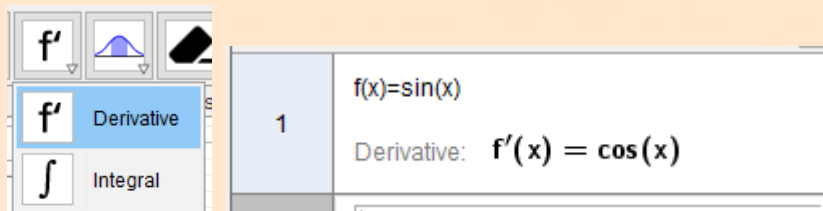




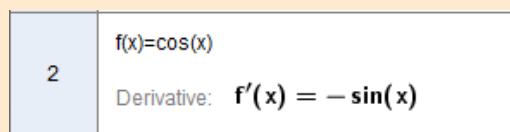
3. Pada kotak CAS tersebut, input fungsi $f(x) = \sin x$, namun jangan di enter terlebih dahulu



4. Klik tool Derivative dan akan muncul hasil turunan pertama dari fungsi $f(x) = \sin x$ yang telah kita input tadi



5. Ulangi langkah 3 dan 4 pada kotak CAS yang ke 2 hingga 9 untuk mencari turunan pertama dari kedelapan fungsi lainnya yaitu $f(x) = \cos x$, $f(x) = \tan x$, $f(x) = \csc x$, $f(x) = \sec x$, $f(x) = \cot x$, $f(x) = \sin 5x$, $f(x) = \cos 2x$ dan $f(x) = \tan 3x$.



Langkah 2

Dari hasil praktikum yang dilakukan, tuliskan hasil turunan pertama dari fungsi

Fungsi	Turunan pertama
$f(x) = \sin x$	$f'(x) =$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) =$
$f(x) = \tan x$	$f'(x) =$
$f(x) = \csc x$	$f'(x) =$
$f(x) = \sec x$	$f'(x) =$
$f(x) = \cot x$	$f'(x) =$

Fungsi	Turunan pertama
$f(x) = \sin 5x$	$f'(x) =$
$f(x) = \cos 2x$	$f'(x) =$
$f(x) = \tan 3x$	$f'(x) =$



Fase Diskusi Kelompok Kecil

MENGASOSIASI (40 MENIT)

Sekarang kita akan menentukan bagaimana bentuk umum turunan pertama dari fungsi trigonometri bentuk $\sin u(x)$, $\cos u(x)$, $\tan u(x)$, $\csc u(x)$, $\sec u(x)$, dan $\cot u(x)$

Langkah 1

$f(x) = \sin u(x)$ dengan $u(x)$ merupakan sebuah fungsi

Misalkan: $u(x) = 5x$, akan dicari turunan pertama dari $f(x) = \sin 5x$

Pada fase praktikum sebelumnya telah didapat turunan pertama dari $f(x) = \sin 5x$ adalah $f'(x) = 5 \cos \dots$

Ingat aturan turunan fungsi yang sudah dipelajari sebelumnya bahwa:

$$f(x) = ax^n \rightarrow f'(x) = n \cdot a x^{n-1}$$

$$\text{Jadi, } u'(x) = \dots \cdot 5 x^{1-1}$$

$$= \dots x^0$$

$$= 5$$

Turunan dari $f(x) = \sin x$ adalah $f'(x) = \dots$

Sehingga di dapat bahwa **bentuk umum** turunan pertama fungsi trigonometri bentuk $\sin u(x)$, yaitu

$$f(x) = \sin 5x \rightarrow f'(x) = 5 \cos \dots$$

$$f(x) = \sin u(x) \rightarrow f'(x) = \dots \cos \dots$$

Langkah 2

$f(x) = \cos u(x)$ dengan $u(x)$ merupakan sebuah fungsi

Misalkan: $u(x) = 2x$, akan dicari turunan pertama dari $f(x) = \cos 2x$

Pada fase praktikum sebelumnya telah didapat turunan pertama dari $f(x) = \cos 2x$ adalah $f'(x) = -\dots \sin \dots$

Ingat aturan turunan fungsi yang sudah dipelajari sebelumnya bahwa:

$$f(x) = ax^n \rightarrow f'(x) = n \cdot a x^{n-1}$$

$$\text{Jadi, } u'(x) = \dots \cdot 2 x^{1-1}$$

$$= \dots x^0$$

$$= 2$$

Turunan dari $f(x) = \cos x$ adalah $f'(x) = \dots$

Sehingga di dapat bahwa **bentuk umum** turunan pertama fungsi trigonometri bentuk $\cos u(x)$, yaitu

$$f(x) = \cos 2x \rightarrow f'(x) = -\dots \sin \dots$$

$$f(x) = \cos u(x) \rightarrow f'(x) = -\dots \sin \dots$$

Langkah 3

$f(x) = \tan u(x)$ dengan $u(x)$ merupakan sebuah fungsi

Misalkan: $u(x) = 3x$, akan dicari turunan pertama dari $f(x) = \tan 3x$

Pada fase praktikum sebelumnya telah didapat turunan pertama dari $f(x) = \tan 3x$ adalah $f'(x) = \dots \sec^2 \dots$

Ingat aturan turunan fungsi yang sudah dipelajari sebelumnya bahwa:

$$f(x) = ax^n \rightarrow f'(x) = n \cdot a x^{n-1}$$

Jadi, $u'(x) = \dots \cdot 3 x^{\dots}$

$$= \dots x^{\dots}$$

$$= \dots$$

Turunan dari $f(x) = \tan x$ adalah $f'(x) = \dots$

Sehingga di dapat bahwa **bentuk umum** turunan pertama fungsi trigonometri bentuk $\sin u(x)$, yaitu

$$f(x) = \tan 5x \rightarrow f'(x) = \dots \sec^2 \dots$$

$$f(x) = \tan u(x) \rightarrow f'(x) = \dots \sec^2 \dots$$

Langkah 4

Sekarang kita akan menentukan bentuk umum turunan pertama dari fungsi trigonometri bentuk $\csc u(x)$, $\sec u(x)$, dan $\cot u(x)$.

1. $f(x) = \csc u(x)$ dengan $u(x)$ merupakan sebuah fungsi

Ingat: $f(x) = \csc x \rightarrow f'(x) = -\csc x \cot x$

Sehingga di dapat bahwa **bentuk umumnya**, yaitu

$$f(x) = \csc u(x) \rightarrow f'(x) = -\dots \csc \dots \cot \dots$$

2. $f(x) = \sec u(x)$ dengan $u(x)$ merupakan sebuah fungsi

Ingat: $f(x) = \sec x \rightarrow f'(x) = \dots \sec x \tan x$

Sehingga di dapat bahwa **bentuk umumnya**, yaitu

$$f(x) = \sec u(x) \rightarrow f'(x) = \dots \sec \dots \tan \dots$$

3. $f(x) = \cot u(x)$ dengan $u(x)$ merupakan sebuah fungsi

Ingat: $f(x) = \cot x \rightarrow f'(x) = -\dots \csc^2 \dots$

Sehingga di dapat bahwa **bentuk umumnya**, yaitu

$$f(x) = \cot u(x) \rightarrow f'(x) = -\dots \csc^2 \dots$$



Fase Diskusi Kelas

MENGKOMUNIKASIKAN & MENANYA (20 MENIT)

Berdasarkan langkah-langkah yang telah kalian lakukan untuk menyelesaikan permasalahan di atas, bersama kelompokmu berilah contoh soal terkait materi turunan fungsi trigonometri yang telah dipelajari dan jelaskan di depan kelas bagaimana cara menyelesaikannya.



Fase Latihan (15 MENIT)

Kerjakanlah latihan berikut secara mandiri!

Latihan

Tentukan turunan pertama dari fungsi trigonometri berikut ini

1. $f(x) = \sin 2x^2$
2. $f(x) = \cos(3x + 1)$
3. $f(x) = -\tan 9x$
4. $f(x) = \csc 8x$
5. $f(x) = \cot x^2$

RENCANA PELAKSANAAN PEMBELAJARAN (RPP)

Sekolah :
Mata Pelajaran : Matematika
Kelas/Semester : XII/Ganjil
Materi Pokok : Turunan fungsi trigonometri
Tahun Pelajaran : 2021/2022
Alokasi Waktu : 120 menit (1 pertemuan)

A. Kompetensi Inti

- KI 1 Menghargai dan menghayati ajaran agama yang dianutnya
- KI 2 Menunjukkan perilaku jujur, disiplin, tanggung jawab, peduli (toleransi, gotong royong), santun, percaya diri dalam berinteraksi secara efektif dengan lingkungan social dan alam dalam jangkauan pergaulan dan keberadaannya
- KI 3 Memahami pengetahuan (faktual, konseptual, dan prosedural) berdasarkan rasa ingin tahunya tentang ilmu pengetahuan, teknologi, seni, budaya terkait fenomena dan kejadian tampak mata
- KI 4 Mencoba, mengolah, dan menyaji dalam ranah konkret (menggunakan, mengurai, merangkai, memodifikasi, dan membuat) dan ranah abstrak (menulis, membaca, menghitung, menggambar, dan mengarang) sesuai dengan yang dipelajari di sekolah dan sumber lain yang sama dalam sudut pandang/teori

B. Kompetensi Dasar dan Indikator Pencapaian Kompetensi (IPK)

Kompetensi Dasar (KD)	Indikator Pencapaian Kompetensi (IPK)
3.3 Menggunakan prinsip turunan ke fungsi trigonometri sederhana	3.3.1 Menjelaskan konsep turunan fungsi trigonometri
	3.3.2 Menjelaskan rumus-rumus turunan fungsi trigonometri
4.3 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan turunan fungsi trigonometri	4.3.1 Menyelesaikan masalah terkait turunan fungsi trigonometri

C. Tujuan Pembelajaran

Setelah mengikuti proses pembelajaran ini diharapkan:

- a. Peserta didik mampu menjelaskan konsep turunan fungsi trigonometri

- b. Peserta didik mampu menjelaskan rumus-rumus turunan fungsi trigonometri
- c. Peserta didik mampu menyelesaikan masalah terkait turunan fungsi trigonometri

D. Materi Pembelajaran

1. Materi reguler
 - a. Fakta : Trigonometri
 - b. Konsep : Turunan fungsi trigonometri
 - c. Prinsip : Aplikasi turunan fungsi trigonometri
 - d. *Skill* : Menyelesaikan masalah terkait turunan fungsi trigonometri dengan menggunakan GeoGebra

E. Metode Pembelajaran

Pendekatan : Saintifik (mengamati, menanya, mengumpulkan informasi/ eksperimen, mengasosiasi/ mengolah informasi, mengomunikasikan)

TPACK

Model Pembelajaran : *APOS*

Metode : Diskusi, tanya jawab dan Penugasan

F. Media dan Alat

1. Media : LKPD, aplikasi GeoGebra, buku cetak.
2. Alat : *LCD projector*, laptop.

G. Sumber Belajar

1. Sukino. 2016. *Matematika untuk SMA/MA Kelas IX Semester 1*. Jakarta: Erlangga.
2. Bahan Ajar

H. Langkah-Langkah Pembelajaran

Pertemuan ke-1	Waktu
Kegiatan Pendahuluan	10 mnt
Guru	
<i>Orientasi</i>	
1. Melakukan pembukaan dengan salam pembuka. 2. Memulai pembelajaran dengan berdoa bersama dipimpin salah satu peserta didik (<i>religious</i>).	

3. Guru memberikan penguatan tentang pentingnya menanamkan semangat nasionalisme.		
4. Guru menyampaikan tujuan pembelajaran.		
5. Guru membagi kelas menjadi beberapa kelompok yang heterogen (laki-laki, perempuan, introver, ekstrover, pandai, kurang pandai)		
Apersepsi		
Mengingatn materi pada kegiatan sebelumnya yaitu dengan memberi pertanyaan seperti “Ingatkah kalian cara menyelesaikan turunan limit fungsi?”.		
Motivasi		
Menunjukkan serta menjelaskan cara menggunakan aplikasi GeoGebra untuk menemukan turunan trigonometri dan grafiknya. (TPACK)		
Pemberian Acuan		
1. Memberitahukan materi pelajaran yang akan dibahas. 2. Memberitahukan tentang KI, KD, IPK, dan KKM. 3. Menjelaskan mekanisme pelaksanaan pengalaman belajar dan penilaian		
Kegiatan Inti		105 menit
Langkah Pembelajaran APOS	Kegiatan Pembelajaran	
Fase Orientasi	1. Peserta didik dibentuk dalam berbagai kelompok 4-5 orang dan diberikan LKPD setiap kelompoknya. Apabila daring maka Setiap kelompok dibagikan bahan literasi digital, LKPD, video pembelajaran. (TPACK) 2. Guru meminta setiap kelompok untuk mempersiapkan semua alat dan bahan belajar. (mengamati)	10 menit
	3. Peserta didik dalam kelompok membuka aplikasi GeoGebra yang sebelumnya telah di-download pada HP maupun laptop. (mencoba) (TPACK)	
Fase Praktikum	1. Peserta didik membaca langkah-langkah pengerjaan praktikum (mengumpulkan informasi) (mengamati) 2. Peserta didik melaksanakan praktikum dengan aplikasi GeoGebra untuk menyelesaikan masalah diberikan (mencoba) 3. Peserta didik mengajukan pertanyaan kepada guru jika menemukan kesulitan	

	terhadap permasalahan yang diberikan. (<i>Menanya</i>) 4. Peserta didik diminta untuk menyelesaikan aktivitas yang diberikan menggunakan GeoGebra. (<i>Mengumpulkan informasi</i>) (<i>TPACK</i>)	30 menit
Fase Diskusi kelompok	1. Peserta didik diminta berdiskusi dalam kelompok untuk menyelesaikan permasalahan. (<i>Mengumpulkan informasi, Mengasosiasi</i>) (<i>Kerja sama, Tanggung jawab</i>) 2. Peserta didik diarahkan dalam memecahkan masalah pada LKPD dengan bantuan GeoGebra dan mencoba menjawab manual dengan mengingat kembali materi trigonometri dan turunan limit fungsi aljabar (<i>Mencoba dan menalar</i>). (<i>TPACK</i>)	25 menit
	3. Peserta didik diberi arahan sehingga mempermudah dalam menyelesaikan permasalahan pada LKPD. (<i>mengamati dan mengumpulkan informasi</i>) 4. Guru mempersilahkan peserta didik untuk menanyakan hal-hal yang belum dipahami (<i>Menanya</i>)	
Fase 4 Diskusi Kelas	1. Peserta didik bersama kelompoknya membuat kesimpulan hasil diskusi. (<i>mengomunikasikan</i>) (<i>Berpikir Kreatif</i>) 2. Peserta didik menyajikan hasil 3. Bagi kelompok yang tidak presentasi dapat memperhatikan dan memberikan tanggapan terhadap hasil yang dipresentasikan. (<i>Toleransi</i>) (<i>Keberanian</i>)	20 menit
Fase 5 Latihan	1. Peserta didik mengerjakan latihan sebanyak 3 soal latihan secara individu (<i>mencoba, menalar</i>) 2. Guru memantau peserta didik dalam mengerjakan latihan (<i>mengamati</i>) 3. Peserta didik mengumpulkan hasil diskusi dan latihan secara tertib.	20 menit
Kegiatan Penutup		5 menit
1. Melakukan refleksi terhadap kegiatan pembelajaran		

a. Bagaimana menurut kalian tentang kegiatan pembelajaran kali ini? b. Apa yang perlu kita perbaiki untuk pertemuan selanjutnya? 2. Memberi tugas <i>mandiri</i> (soal HOTS). 3. Menyampaikan kegiatan pembelajaran pada pertemuan 4. Menutup dengan salam dan doa	
--	--

I. Penilaian

	Sikap Spiritual	Sikap sosial	Pengetahuan	Keterampilan
Teknik	Nontes	Nontes	Tes tertulis, tugas	Tes tertulis
Bentuk	Jurnal	Jurnal	Uraian	Uraian
Instrumen	Terlampir	Terlampir	Terlampir	Terlampir

J. Pembelajaran Remedial dan Pengayaan

a. Remedial

1. Diberikan kepada Peserta didik yang belum mencapai KKM atau belum mencapai KD.
2. Dilakukan dengan memberikan lembar kerja terkait KD yang belum dikuasai.

b. Pengayaan

1. Diberikan untuk menambah wawasan dan pengembangan materi.

Bengkulu, Juli 2022

Mengetahui,

Kepala Sekolah

Guru Mata Pelajaran,

.....
NIP.

Gyzka Veliesa, S.Pd.

LKPD

Turunan Fungsi Trigonometri

Kompetensi Dasar

- 3.3 Menggunakan prinsip turunan fungsi trigonometri sederhana
- 4.3 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan turunan fungsi trigonometri

Indikator

- 3.2.1 Menjelaskan konsep turunan fungsi trigonometri
- 3.2.2 Menjelaskan rumus-rumus turunan fungsi trigonometri
- 4.2.1 Menyelesaikan masalah terkait turunan fungsi trigonometri

Tujuan Pembelajaran

- 1. Peserta didik mampu menjelaskan konsep turunan fungsi trigonometri
- 2. Peserta didik mampu menjelaskan rumus-rumus turunan fungsi trigonometri
- 3. Peserta didik mampu menyelesaikan masalah terkait turunan fungsi trigonometri

Waktu 105 menit



Kelompok :
Kelas :
Anggota Kelompok:

- 1. -----
- 2. -----
- 3. -----
- 4. -----
- 5. -----

**Petunjuk Penggunaan LKPD
Berbasis Model APOS
Berbantuan GeoGebra**

1. Selesaikanlah LKPD ini dengan berdiskusi dengan teman kelompok
2. Kerjakan sesuai dengan perintah pengerjaan yang ada di dalam LKPD
3. Setiap langkah pengerjaan LKPD memiliki waktu yang berbeda-beda
4. Tanyakan kepada guru jika ada informasi LKPD yang kurang jelas

Fase Orientasi

Guru memberikan materi turunan fungsi trigonometri.

Fase Praktikum

Siswa menentukan gambar turunan fungsi trigonometri dengan menggunakan aplikasi GeoGebra

Fase Diskusi Kelompok Kecil

Siswa menyelesaikan soal-soal turunan fungsi trigonometri dengan mendiskusikan bersama teman kelompok

Fase Diskusi Kelas

Secara bergiliran setiap kelompok menjelaskan hasil diskusi kelompok di depan kelas dilanjutkan dengan diskusi kelas

Fase latihan

Siswa menyelesaikan soal-soal turunan fungsi trigonometri secara mandiri

FASE ORIENTASI

Waktu: 10 Menit

Duduklah bersama kelompok yang telah dibagikan oleh guru secara tertib.

Selesaikan permasalahan di bawah ini dengan menyelesaikan setiap tahapan pada LKPD.

Tentukan turunan fungsi trigonometri dari:

1. $f(x) = \sin x$
2. $f(x) = \cos x$
3. $f(x) = \tan x$
4. $f(x) = \cot x$
5. $f(x) = \sec x$
6. $f(x) = \operatorname{cosec} x$

FASE PRATIUM

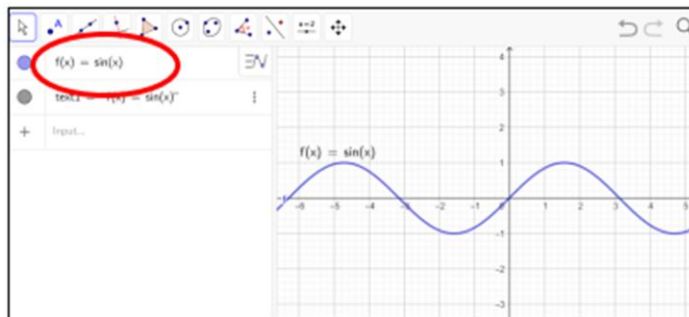
Waktu: 30 Menit

Alat dan Bahan:

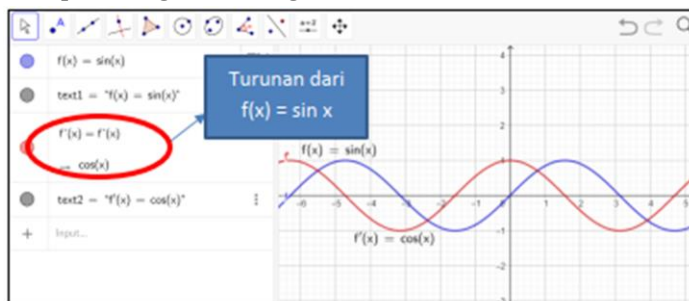
- | | |
|-----------------------------|-------------|
| 1. Komputer/Laptop | Alat tulis |
| 2. Perangkat Lunak GeoGebra | Alat gambar |

Turunan fungsi Trigonometri
Ikuti Prosedur berikut:

1. Siapkan area kerja GeoGebra
2. Pada bagian input ketik $f(x)=\sin(x)$, kemudian akan kalian peroleh gambar sebagai berikut.

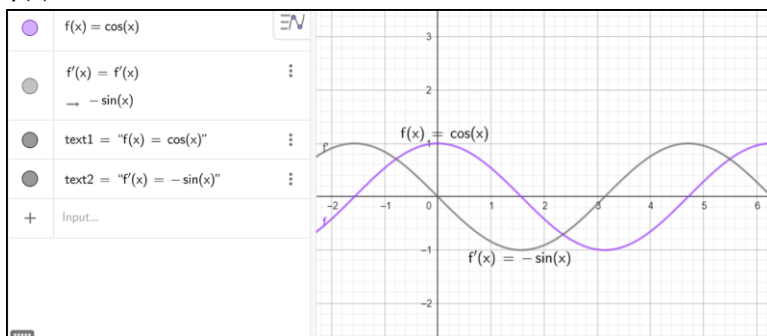


3. Selanjutnya pada input tuliskan $f'(x)$, kemudian akan memperoleh grafik sebagai berikut.

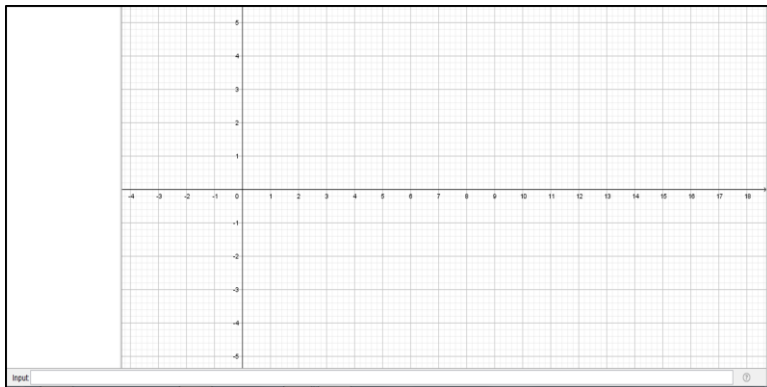


4. Dari grafik di atas kalian juga memperoleh turunan pertama dari fungsi $f(x) = \sin x$ yaitu $f'(x) = \cos x$.
5. Sekarang bukalah jendela baru pada GeoGebra dengan menekan tombol $\text{control} + N$ untuk menemukan turunan dari fungsi $f(x) = \cos x$, $f(x) = \tan x$, $f(x) = \cot x$, $f(x) = \sec x$, $f(x) = \csc x$, lakukanlah langkah yang sama seperti cara menemukan turunan fungsi $f(x) = \sin x$.
Kemudian salinlah gambar yang kalian peroleh (grafik fungsi dan turunannya) pada grafik kartesius di bawah ini!

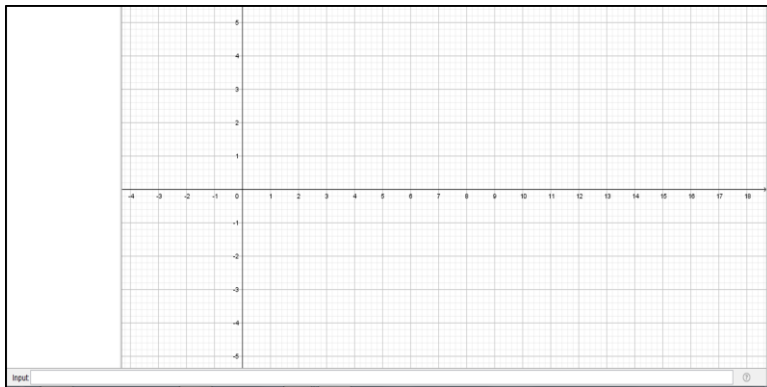
$$f(x) = \cos x$$



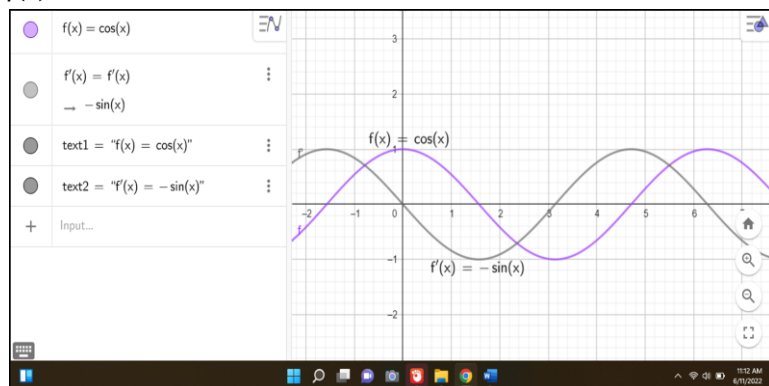
$$f(x) = \tan x$$



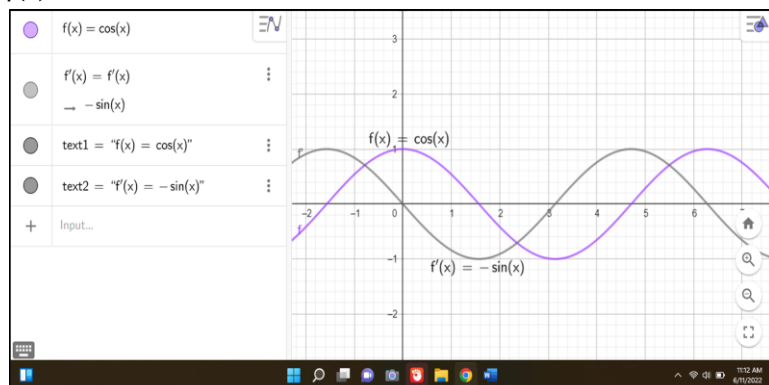
$$f(x) = \cot x$$



$$f(x) = \sec x$$



$$f(x) = \csc x$$



**FASE DISKUSI KELOMPOK
KECIL**

Waktu: 25 Menit

Sekarang berdiskusilah bersama kelompok kalian untuk menentukan turunan dari fungsi trigonometri menggunakan rumus, manfaatkanlah grafik dan turunan fungsi yang sudah kalian temukan pada fase praktikum.

Selamat bekerja!

1. Tentukan turunan dari fungsi $f(x) = \sin x$ dengan menggunakan rumus

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Penyelesaian:

$$f(x) = \sin x$$

$$f(x+h) = \sin(x+h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h$$



Ingat!!!

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

dengan menggunakan $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, diperoleh

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h - \sin x + \cos x \sin h}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x (\cos h - 1) + \cos x (\sin h)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x (\cos h - 1)}{h} + \frac{\cos x (\sin h)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x (\cos h - 1)}{h} + \cos x$$



Ingat!!!

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

Karena $h \rightarrow 0$ maka $\cos h = \cos 0 = 1$, diperoleh

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x (1 - 1)}{h} + \cos x$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x (0)}{h} + \cos x$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} + \cos x$$

$$f'(x) = 0 + \cos x$$

Jadi, $f'(x) = \cos x$

Untuk menyelesaikan soal nomor 2 dan seterusnya kalian harus mengisi bagian titik-titik yang tersedia dan kalian boleh melihat langkah nomor 1 agar lebih paham ☺

2. Tentukan turunan dari fungsi $f(x) = \cos x$ dengan menggunakan rumus

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Penyelesaian:

Penyelesaian:

$$f(x) = \cos x$$

$$f(x+h) = \cos(x+h) = \cos x \cos h - \sin x \sin h$$

dengan menggunakan $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, diperoleh

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \cos h - \cos x - \sin x \sin h}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x (\cos h - 1) - \sin x (\sin h)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x (\cos h - 1) - \sin x (\sin h)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x (\cos h - 1) - \sin x (\sin h)}{h}$$

Karena $h \rightarrow 0$ maka $\cos h = \cos 0 = 1$, diperoleh

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x (1 - 1) - \sin x (\sin h)}{h}$$

Ingat!!!

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

Ingat!!!

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \sin x}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} - \sin x$$

$$f'(x) = 0 - \sin x$$

$$\text{Jadi, } f'(x) = -\sin x$$

3. Tentukan turunan dari fungsi $f(x) = \tan x$, dengan $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$!

Penyelesaian:



Ingat!!!

Turunan fungsi $f(x) = \frac{u}{v}$ dinyatakan $f'(x) = \frac{u'v - uv'}{(v)^2}$

Misal $u = \sin x$ maka $u' = \cos x$

$v = \cos x$ maka $v' = -\sin x$ (jawaban nomor 2)

maka substitusikan ke $f'(x) = \frac{u'v - uv'}{(v)^2}$, diperoleh

$$f'(x) = \frac{\cos x \cos x - \sin x (-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x}$$



Ingat!!!

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$f'(x) = \sec^2 x$$



Ingat!!!

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

4. Tentukan turunan dari fungsi $f(x) = \cot x$, dengan $\cot x = \frac{1}{\tan x}$!

Penyelesaian:

Misal $u = 1$ maka $u' = 0$

$v = \tan x$ maka $v' = \sec^2 x$ (jawaban nomor 3)

maka substitusikan ke $f'(x) = \frac{u'v - uv'}{(v)^2}$, diperoleh

$$f'(x) = \frac{0 \cdot \tan x - 1 \cdot \sec^2 x}{\tan^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{0 - \sec^2 x}{\dots\dots\dots}$$

$$f'(x) = -\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}$$

$$f'(x) = -\frac{\cancel{\cos^2 x}}{\cancel{\cos^2 x}} \cdot \frac{\cancel{\cos^2 x}}{\dots\dots\dots}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{\dots\dots\dots}$$

$$f'(x) = -\dots\dots\dots x$$

Ingat!!!

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Ingat!!!

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$$

5. Tentukan turunan dari fungsi $f(x) = \sec x$, dengan $\sec x = \frac{1}{\cos x}$!

Penyelesaian:

Misal $u = 1$ maka $u' = 0$

$v = \cos x$ maka $v' = -\sin x$ (jawaban nomor 2)

maka substitusikan ke $f'(x) = \frac{u'v - uv'}{(v)^2}$, diperoleh

$$f'(x) = \frac{0 \cdot \cos x - 1(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{0 + 1 \cdot \sin x}{\cos^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot \sin x}{\cos^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$f'(x) = \sec x \cdot \tan x$$



Ingat!!!

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

6. Tentukan turunan dari fungsi $f(x) = \operatorname{cosec} x$, dengan $\sec x = \frac{1}{\sin x}$!

Penyelesaian:

Misal $u = 1$ maka $u' = 0$

$v = \sin x$ maka $v' = \cos x$ (jawaban nomor 1)

maka substitusikan ke $f'(x) = \frac{u'v - uv'}{(v)^2}$, diperoleh

$$f'(x) = \frac{0 \cdot \sin x - 1(\cos x)}{\sin^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{0 - 1 \cdot \cos x}{\sin^2 x}$$

$$f'(x) = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

$$f'(x) = -\frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\sin x}$$

$$f'(x) = -\cot x \cdot \csc x$$



Ingat!!!

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

FASE DISKUSI KELAS

Waktu: 20 Menit

1. Sekarang tuliskanlah kesimpulan yang kamu dapat dari fase orientasi sampai fase praktikum dalam tabel berikut ini!

No	Fungsi	Turunan
1.	$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
2.	$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
3.	$f(x) = \tan x$	$f'(x) = \sec^2 x$
4.	$f(x) = \cot x$	$f'(x) = -\operatorname{cosec}^2 x$
5.	$f(x) = \sec x$	$f'(x) = \sec x \tan x$
6.	$f(x) = \operatorname{cosec} x$	$f'(x) = -\operatorname{cosec} x \cot x$

2. Berdasarkan langkah-langkah yang telah kalian lakukan untuk menyelesaikan permasalahan pada LKPD, bersama kelompokmu presentasikan dan jelaskan di depan kelas.

FASE LATIHAN

Waktu: 20 Menit

Petunjuk

Kerjakan latihan berikut secara mandiri!

1. Tentukan turunan dari $f(x) = 4 \sin x + 5 \cos x$

Penyelesaian:

$$f'(x) = 4 \cos x - 5 \sin x$$

$$f'(x) = 4 \cos x - 5 \sin x$$

2. Tentukan turunan dari $f(x) = \sec x - \operatorname{cosec} x$

Penyelesaian:

$$f'(x) = (\sec x \tan x) - (-\operatorname{cosec} x \cot x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$f'(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{\sin x (\dots) + \cos x (\dots)}{(\dots)(\dots)}$$

“samakan penyebut”

$$f'(x) = \frac{\dots + \dots}{(\dots)^2}$$

3. Tentukan turunan dari $f(x) = \tan (2x - 3)$

Penyelesaian:

$$f'(x) = 2 \sec^2 (2x - 3)$$

KALIAN HEBAT!!!

selamat kalian sudah menyelesaikan permasalahan turunan fungsi trigonometri, kalian sekarang tentu sangat mahir 😊

RENCANA PELAKSANAAN PEMBELAJARAN (RPP)

Sekolah : SMA/MA
Mata Pelajaran : Matematika
Kelas/Semester : XI/Genap
Materi Pokok : Limit Fungsi Aljabar
Tahun Pelajaran : 2021/2022
Alokasi Waktu : 120 menit (1 pertemuan)

A. Kompetensi Inti

- KI 1 Menghargai dan menghayati ajaran agama yang dianutnya
- KI 2 Menunjukkan perilaku jujur, disiplin, tanggung jawab, peduli (toleransi, gotong royong), santun, percaya diri dalam berinteraksi secara efektif dengan lingkungan social dan alam dalam jangkauan pergaulan dan keberadaannya
- KI 3 Memahami pengetahuan (faktual, konseptual, dan prosedural) berdasarkan rasa ingin tahunya tentang ilmu pengetahuan, teknologi, seni, budaya terkait fenomena dan kejadian tampak mata
- KI 4 Mencoba, mengolah, dan menyaji dalam ranah konkret (menggunakan, mengurai, merangkai, memodifikasi, dan membuat) dan ranah abstrak (menulis, membaca, menghitung, menggambar, dan mengarang) sesuai dengan yang dipelajari di sekolah dan sumber lain yang sama dalam sudut pandang/teori

B. Kompetensi Dasar dan Indikator Pencapaian Kompetensi (IPK)

Kompetensi Dasar (KD)	Indikator Pencapaian Kompetensi (IPK)
6.2 Menggunakan sifat limit fungsi untuk menghitung bentuk tak tentu fungsi aljabar dan trigonometri	6.2.1 Menjelaskan sifat-sifat yang digunakan dalam perhitungan limit.

C. Tujuan Pembelajaran

Setelah mengikuti proses pembelajaran ini diharapkan:

- Peserta didik mampu menentukan sifat-sifat yang digunakan dalam perhitungan limit.
- Peserta didik mampu menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan sifat-sifat yang digunakan dalam perhitungan limit.

D. Materi Pembelajaran

1. Materi reguler
 - a. Fakta : Aljabar
 - b. Konsep : Limit Fungsi Aljabar
 - c. Prinsip : Aplikasi limit fungsi aljabar
 - d. Skill : Menyelesaikan masalah terkait limit fungsi aljabar dengan menggunakan GeoGebra

E. Metode Pembelajaran

Pendekatan : Saintifik (mengamati, menanya, mengumpulkan informasi/eksperimen, mengasosiasi/mengolah informasi, mengomunikasikan)

TPACK

Model Pembelajaran : APOS

Metode : Diskusi, tanya jawab dan Penugasan

F. Media dan Alat

1. Media : LKPD, aplikasi GeoGebra, Buku cetak.
2. Alat : LCD projector, laptop.

G. Sumber Belajar

1. Sudianto, dkk. 2017. *Matematika untuk SMA/MA Kelas XI*. Jakarta: Kemendikbud.
2. Bahan Ajar

H. Langkah-langkah Pembelajaran

Pertemuan ke-1	Waktu
Kegiatan Pendahuluan	10 mnt
Guru	
Orientasi	
1. Melakukan pembukaan dengan salam pembuka.	
2. Memulai pembelajaran dengan berdoa bersama dipimpin salah satu peserta didik (<i>religious</i>).	
3. Guru memberikan penguatan tentang pentingnya menanamkan semangat <i>nasionalisme</i> .	
4. Guru menyampaikan tujuan pembelajaran.	
5. Guru membagi kelas menjadi beberapa kelompok yang heterogen (laki-laki, perempuan, introver, ekstrover, pandai, kurang pandai)	
Apersepsi	
Mengingatnkan materi pada kegiatan sebelumnya.	
Motivasi	

Menunjukkan serta menjelaskan cara menggunakan aplikasi GeoGebra untuk menemukan limit fungsi aljabar. (TPACK)		
Pemberian Acuan		
1. Memberitahukan materi pelajaran yang akan dibahas. 2. Memberitahukan tentang KI, KD, IPK, dan KKM. 3. Menjelaskan mekanisme pelaksanaan pengalaman belajar dan penilaian		
Kegiatan Inti		105 menit
Langkah Pembelajaran APOS	Kegiatan Pembelajaran	
Fase <i>Orientasi</i>	1. Peserta didik dibentuk dalam berbagai kelompok 4-5 orang dan diberikan LKPD setiap kelompoknya. Apabila daring maka Setiap kelompok dibagikan bahan literasi digital, LKPD, video Pembelajaran. (TPACK) 2. Guru meminta setiap kelompok untuk mempersiapkan semua alat dan bahan belajar. (mengamati) 3. Peserta didik dalam kelompok membuka aplikasi GeoGebra yang sebelumnya telah di-download pada HP maupun laptop. (mencoba) (TPACK)	10 menit
Fase <i>Praktikum</i>	1. Peserta didik membaca langkah-langkah pengerjaan praktikum (mengumpulkan informasi) (mengamati) 2. Peserta didik melaksanakan praktikum dengan aplikasi GeoGebra untuk menyelesaikan masalah diberikan (mencoba) 3. Peserta didik mengajukan pertanyaan kepada guru jika menemukan kesulitan terhadap permasalahan yang diberikan. (Menanya) 4. Peserta didik diminta untuk menyelesaikan aktivitas yang diberikan menggunakan GeoGebra. (Mengumpulkan informasi) (TPACK)	30 menit
Fase <i>Diskusi kelompok</i>	1. Peserta didik diminta berdiskusi dalam kelompok untuk menyelesaikan permasalahan. (Mengumpulkan informasi, Mengasosiasi) (Kerja sama, Tanggung jawab) 2. Peserta didik diarahkan dalam memecahkan masalah pada LKPD dengan bantuan GeoGebra dan mencoba menjawab manual dengan membaca dan memahami materi limit fungsi aljabar (Mencoba dan menalar) .	25 menit

	(TPACK) 3. Peserta didik diberi arahan sehingga mempermudah dalam menyelesaikan permasalahan pada LKPD. (<i>mengamati dan mengumpulkan informasi</i>) 4. Guru mempersilahkan peserta didik untuk menanyakan hal-hal yang belum dipahami (<i>Menanya</i>)	
Fase 4 <i>Diskusi Kelas</i>	1. Peserta didik bersama kelompoknya membuat kesimpulan hasil diskusi. (<i>mengomunikasikan</i>) (<i>Berpikir Kreatif</i>) 2. Peserta didik menyajikan hasil diskusi kelompoknya. (<i>Mengomunikasikan</i>) (<i>Percaya diri</i>) 3. Bagi kelompok yang tidak presentasi dapat memperhatikan dan memberikan tanggapan terhadap hasil yang dipresentasikan. (<i>Toleransi</i>) (<i>Keberanian</i>)	20 menit
Fase 5 <i>Latihan</i>	1. Peserta didik mengerjakan latihan sebanyak 3 soal latihan secara individu (<i>mencoba, menalar</i>) 2. Guru memantau peserta didik dalam mengerjakan latihan (<i>mengamati</i>) 3. Peserta didik mengumpulkan hasil diskusi dan latihan secara tertib.	20 menit
Kegiatan Penutup		5 menit
1. Melakukan refleksi terhadap kegiatan pembelajaran a. Bagaimana menurut kalian tentang kegiatan pembelajaran kali ini? b. Apa yang perlu kita perbaiki untuk pertemuan selanjutnya? 2. Memberi tugas <i>mandiri</i> (soal HOTS). 3. Menyampaikan kegiatan pembelajaran pada pertemuan 4. Menutup dengan salam dan doa		

I. Penilaian

	Sikap Spiritual	Sikap sosial	Pengetahuan	Keterampilan
Teknik	Nontes	Nontes	Tes tertulis, tugas	Tes tertulis
Bentuk	Jurnal	Jurnal	Uraian	Uraian
Instrumen	Terlampir	Terlampir	Terlampir	Terlampir

J. Pembelajaran Remedial dan Pengayaan

a. Remedial

1. Diberikan kepada Peserta didik yang belum mencapai KKM atau belum mencapai KD.

2. Dilakukan dengan memberikan lembar kerja terkait KD yang belum dikuasai.

b. Pengayaan

1. Diberikan untuk menambah wawasan dan pengembangan materi.

Mengetahui,
Kepala Sekolah

Bengkulu, Juli 2022

Guru Mata Pelajaran,

.....

Gyzka Veliesa, S.Pd.

NIP.

LKPD LIMIT FUNGSI ALJABAR

Kompetensi
Dasar

6.2 Menggunakan sifat limit fungsi untuk menghitung bentuk tak tentu fungsi aljabar dan trigonometri

Indikator

6.2. 1 Menjelaskan sifat-sifat yang digunakan dalam perhitungan limit.

Tujuan
pembelajaran

1. Menentukan sifat-sifat yang digunakan dalam perhitungan limit.
2. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan sifat-sifat yang digunakan dalam perhitungan limit.

Waktu 105 menit



Kelompok :
Kelas :
Anggota Kelompok:

1. -----
2. -----
3. -----
4. -----
5. -----

Petunjuk Penggunaan LKPD Berbasis Model APOS Berbantuan GeoGebra

1. Selesaikanlah LKPD ini dengan berdiskusi dengan teman kelompok
2. Kerjakan sesuai dengan perintah pengerjaan yang ada di dalam LKPD
3. Setiap langkah pengerjaan LKPD memiliki waktu yang berbeda-beda
4. Tanyakan kepada guru jika ada informasi LKPD yang kurang jelas

Fase Orientasi

Guru memberikan materi Limit Fungsi Aljabar

Fase Praktikum

Siswa menentukan gambar limit fungsi aljabar dengan menggunakan aplikasi GeoGebra dan memahami definisi limit fungsi aljabar

Fase Diskusi Kelompok Kecil

Siswa menyelesaikan permasalahan tentang sifat-sifat limit fungsi aljabar dengan mendiskusikan bersama teman kelompok

Fase Diskusi Kelas

Secara bergiliran setiap kelompok menjelaskan hasil diskusi kelompok di depan kelas dilanjutkan dengan diskusi kelas

Fase latihan

Siswa menyelesaikan soal-soal latihan Limit Fungsi Aljabar

FASE ORIENTASI

Waktu: 10 Menit

Duduklah bersama kelompok yang telah dibagikan oleh guru secara tertib.

Selesaikan permasalahan di bawah ini dengan menyelesaikan setiap tahapan pada LKPD.

Misalkan (x) , (x) adalah fungsi yang mempunyai limit pada x mendekati c , dengan k dan c adalah bilangan real serta n adalah bilangan bulat positif, maka tentukanlah sifat-sifat limit aljabar berikut ini:

1. $\lim_{x \rightarrow c} k = \dots\dots\dots$
2. $\lim_{x \rightarrow c} x = \dots\dots\dots$
3. $\lim_{x \rightarrow c} [k \cdot f(x)] = \dots\dots\dots$
4. $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) \pm g(x)] = \dots\dots\dots$
5. $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) \cdot g(x)] = \dots\dots\dots$
6. $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \dots\dots\dots$ dengan $\dots\dots\dots \neq 0$
7. $\lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^n = \dots\dots\dots$
8. $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{f(x)} = \dots\dots\dots$

FASE PRATIKUM

Waktu: 30 Menit

Alat dan Bahan:

- | | |
|-----------------------------|----------------|
| 1. Komputer/Laptop | 3. Alat tulis |
| 2. Perangkat Lunak GeoGebra | 4. Alat gambar |

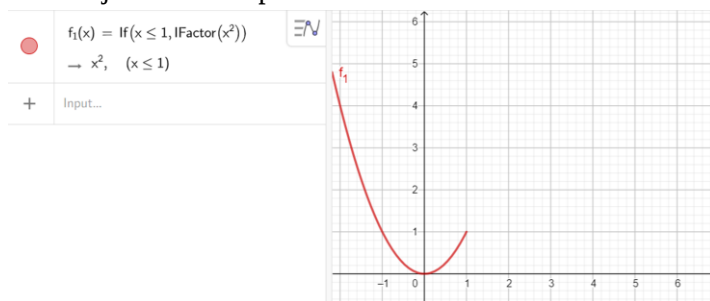
Materi Limit Fungsi Aljabar

Tentukan apakah fungsi $f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x \leq 1 \\ x + 2 & ; x > 1 \end{cases}$ mempunyai limit atau tidak!

Penyelesaian:

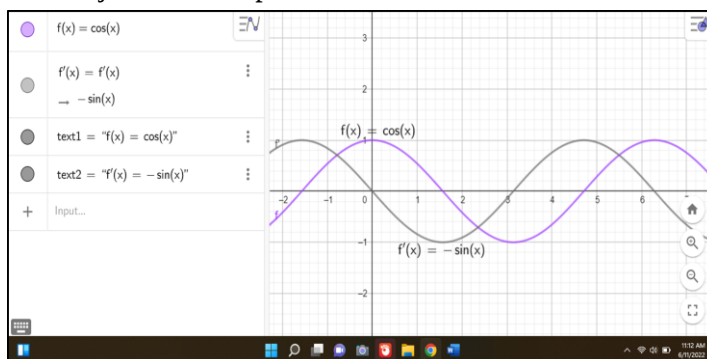
1. Siapkan area kerja GeoGebra
2. Kita akan menggambarkan grafik fungsi dengan nilai pendekatan $(x) = x^2$ untuk setiap nilai x mendekati atau sama dengan 1 dari kiri ($x \leq 1$) caranya ketik $f_1(x) = \text{IFactor}(x^2), x \leq 1$ pada kotak input seperti berikut ini.

$$F_1 = \text{IFactor}(x^2), x \leq 1$$
3. Tekan Enter maka kemudian salinlah tampilan grafik pada area kerja GeoGebra pada kotak di bawah ini.



4. Kita akan menggambarkan grafik fungsi dengan nilai pendekatan $(x) = x+2$ untuk setiap nilai x mendekati 1 dari kanan ($x > 1$) caranya pada kotak input ketik $f_2(x) = \text{IFactor}(x+2), x > 1$, seperti berikut ini.

$$f_2 = \text{IFactor}(x+2), x > 1.$$
5. Tekan Enter maka kemudian salinlah tampilan grafik pada area kerja GeoGebra pada kotak di bawah ini.



6. Tabel $f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x \leq 1 \\ x + 2 & ; x > 1 \end{cases}$

x	0,8	0,9	0,99		1		1,01	1,1	1,11
f(x)		0,81	0,98		?				3,11

*ket:

titik-titik pada tabel tidak perlu diisi

isilah bagian kosong pada tabel

7. Dari grafik dan tabel yang telah kalian kerjakan sebelumnya terlihat jika kalian menyubtitusikan nilai mendekati 1 dari kiri (nilai $x \leq 1$) akan menghasilkan nilai $f(x)$ mendekati 1 dan jika menyubtitusikan nilai x mendekati 1 dari kanan (nilai $x > 1$) maka akan menghasilkan nilai $f(x)$ mendekati 3. Sehingga diperoleh bahwa limit kiri dan kanan tidak sama, maka fungsi $f(x)$ untuk x mendekati 1 tidak mempunyai limit.

Jika kata mendekati disimbolkan dengan sebuah panah ($\rightarrow$) maka pernyataan di atas dapat kita tulis:

Limit kiri: x mendekati 1 dari kiri, maka nilai limitnya mendekati 1 atau dapat ditulis $\lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1$.

Limit kanan: x mendekati 1 dari kanan, maka nilai limitnya mendekati 3 atau dapat ditulis $\lim_{x \rightarrow 1^+} x + 2 = \dots$. *Isilah titik-titik di samping.*

- B. Sekarang supaya kalian lebih paham selidiki fungsi f rasional ditentukan oleh $f(x) = 3x - 1$ dengan domain $D_f = \{x|x \in \mathbb{R}\}$. Tentukan apakah fungsi $f(x) = 3x - 1$ untuk x mendekati 2 mempunyai limit atau tidak!

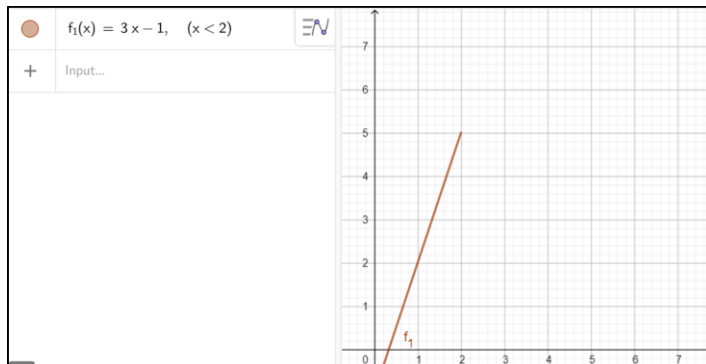
Penyelesaian

Ikuti Prosedur berikut:

8. Siapkan area kerja GeoGebra
9. Kita akan menggambarkan grafik fungsi dengan nilai pendekatan (x) untuk setiap nilai x mendekati 2 dari kiri ($x < 2$) caranya ketik $f_1(x) = 3x - 1, x < 2$ pada kotak input seperti berikut ini.

$f_1(x) = (3x - 1, x < 2)$

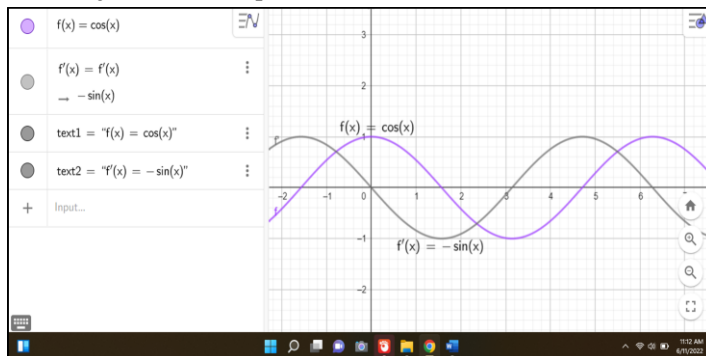
10. Tekan Enter maka kemudian salinlah tampilan grafik pada area kerja GeoGebra pada kotak di bawah ini.



11. Kita akan menggambarkan grafik fungsi dengan nilai pendekatan (x) untuk setiap nilai x mendekati 2 dari kanan ($x > 2$) caranya pada kotak input ketik $f_2(x) = 3x - 1, x > 2$, seperti berikut ini.

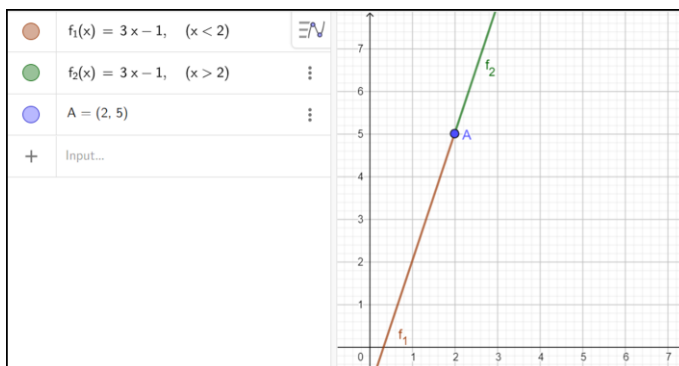
$$f_2(x) = 3x - 1, x > 2$$

12. Tekan Enter maka kemudian salinlah tampilan grafik pada area kerja GeoGebra pada kotak di bawah ini!

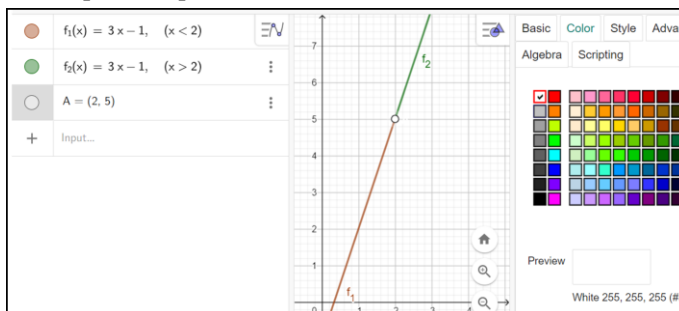


13. Dari grafik yang kalian peroleh tampak seperti kedua garis menyatu padahal mereka terpisah karena tidak memuat nilai $x = 2$ dan apabila $x = 2$ disubstitusikan pada persamaan $f(x) = 3x - 1$ diperoleh $f(x) = 5$ yang artinya kedua garis hanya mendekati angka 5 namun tidak pernah mencapai angka 5.

19. Selanjutnya pada area kerja GeoGebra yang sama input $A = (2,5)$ lalu Enter, sehingga diperoleh tampilan sebagai berikut.



11. Ubah warna titik A dengan cara klik kanan titik A, pilih Settings, pada color klik warna putih. Salinlah hasil yang kalian peroleh pada kotak di bawah ini.



Warna putih pada titik menunjukkan bulat kosong pada grafik dengan nilai $x = 2$ dan nilai $f(x)$ tidak ada.

Akan tetapi kita dapat mencari nilai $f(x)$ untuk x mendekati 2 atau ditulis dengan $\lim_{x \rightarrow 2} 3x - 1$ dengan cara mendekati 2 dari kiri atau dari kanan.

Artinya semakin dekat x ke angka 2 dari kiri maupun dari kanan maka semakin dekat $f(x)$ ke 5 baik dari atas maupun dari bawah. Nilai $f(x)$ untuk limit kiri yang nilai x -nya kurang dari 2 sama dengan nilai $f(x)$ untuk limit kanan yang nilai x -nya lebih dari 2 yaitu 5.

Maka dikatakan limit $f(x)$ mendekati 2 adalah 5.

12. Agar kalian lebih paham sekarang isilah tabel berikut ini.

Tabel $f(x) = 3x - 1$ untuk setiap nilai x mendekati nilai 2
dari kiri atau dari kanan

x	1,9	1,99	1,999		2		2,01	2,1	2,11
f(x)		4,97	4,997		5		5,03		

*ket:

titik-titik pada tabel tidak perlu diisi

isilah bagian kosong pada tabel

13. Dari grafik dan tabel yang telah kalian kerjakan sebelumnya terlihat jika kalian menyubtitusikan nilai mendekati 2 dari kiri (nilai $x < 2$) akan menghasilkan nilai $f(x)$ mendekati 5 dan jika masukkan nilai x mendekati 2 dari kanan (nilai $x > 2$) maka akan menghasilkan nilai $f(x)$ mendekati 5. Sehingga diperoleh bahwa jika x mendekati 2 dari kiri maupun kanan, maka fungsi $f(x)$ mendekati 5.

Jika kata mendekati disimbolkan dengan sebuah panah ($\rightarrow$) maka pernyataan di atas dapat kita tulis:

$$\lim_{x \rightarrow 2} 3x - 1 = 5$$

14. Analisis hasil limit kiri dan kanan dari grafik maupun tabel.
Limit kiri: x mendekati 2 dari kiri, maka nilai limitnya mendekati 5 atau dapat ditulis $\lim_{x \rightarrow 2^-} 3x - 1 = 5$.
Limit kanan: x mendekati 2 dari kanan, maka nilai limitnya mendekati 5 atau dapat ditulis $\lim_{x \rightarrow 2^+} 3x - 1 = \dots$. **isilah titik-titik di samping*

15. Dari langkah 1 sampai 11 kita mendapatkan informasi bahwa $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; L dan $a \in \mathbb{R}$. Maka: $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ jika dan hanya jika nilai dari limit fungsi $f(x)$ untuk x mendekati c sama dengan L .
Sehingga suatu fungsi $f(x)$ untuk mendekati c dikatakan mempunyai limit jika nilai limit kiri dan limit kanan fungsi $f(x)$ sama dengan L .

FASE DISKUSI KELOMPOK KECIL

Waktu: 25 Menit

Sekarang berdiskusilah bersama kelompok kalian untuk menentukan sifat-sifat limit fungsi aljabar!
Selamat bekerja!

SIFAT 1

(Limit fungsi konstan)

Diketahui fungsi konstan f , g , dan h ditentukan oleh $(x) = 3$, $(x) = -5$.

- Isilah nilai fungsi untuk setiap x yang diberikan.

Nilai $(x) = 2$ untuk sebaran x sekitar 3!

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)=3$	3	3	3	3	3	3	3

Nilai $(x) = -3$ untuk sebaran x sekitar 4

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1
$g(x) = -5$	-5	-5	-5	-5	-5	...	...	...

- Coba perhatikan barisan nilai $f(x)$ di atas, apakah ada nilai fungsi yang muncul dan dekat dengan nilai tertentu selain nilai konstan?

Ya tidak (*lingkari jawaban yang menurut Anda benar).

Nilai fungsi selalu **sama/berbeda** (*lingkari jawaban yang menurut Anda benar) dengan nilai konstan.

- Jadi, jika $(x) = k$ konstan, serta x mendekati c , k dan $c \in \mathbb{R}$, maka notasi limit f konstan dituliskan $\lim_{x \rightarrow c} k = k$ (Sifat 1).

SIFAT 2

1. Diketahui fungsi $f(x) = x$ dan x mendekati 1. Lengkapilah tabel berikut!

Nilai limit untuk $f(x)$ untuk sebarang nilai x di sekitar 1

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-3	-2	-1	0	1	...	..	...

2. Coba perhatikan barisan nilai $f(x)$ di atas, untuk setiap nilai yang mendekati x atau x mendekati a , apakah ada nilai $f(x)$ mendekati suatu bilangan selain a ?

Ya/tidak (*lingkari jawaban yang menurut Anda benar).

Nilai $f(x)$ selalu **sama/berbeda** (*lingkari jawaban yang menurut Anda benar) nilai a .

3. Secara induktif, untuk setiap nilai x mendekati bilangan c , maka nilai $f(x)$ mendekati $f(c) = c$, ditulis dituliskan

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = c \text{ (Sifat 2).}$$

(*Isilah titik-titik di atas!)

SIFAT 3

1. Lengkapi perhitungan $f(x)$, $2f(x)$, $3f(x)$, dan $-f(x)$ untuk nilai x di sekitar 3.

x	1	2	3	4	5
$f(x) = x$	1	2	...	...	...
$2f(x) = 2x$	2	4	...	...	...
$3f(x) = 3x$	3	12	...	...	...
$-f(x) = -x$	-1	-2	...	...	...

2. Coba perhatikan baris satu s.d. empat yang menunjukkan nilai pendekatan $f(x)$ untuk $x \rightarrow 3$.

Nampak nilai pendekatan $2f(x)$ adalah ... kali lipat nilai pendekatan $f(x)$,

Nampak nilai pendekatan $3f(x)$ adalah ... kali lipat nilai pendekatan $f(x)$,

Nampak nilai pendekatan $-f(x)$ adalah ... kali lipat nilai pendekatan $f(x)$,

(*Isilah semua titik-titik di atas!)

3. Sehingga, secara induktif dapat dikatakan $\lim_{x \rightarrow c} [kf(x)] = \dots$

$$\left[\lim_{x \rightarrow c} f(x) \right], k \in \mathbb{R} \text{ (Sifat 3)}$$

(*Isilah titik-titik di atas!)

SIFAT 4

1. Diketahui fungsi $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x$, lengkapilah nilai fungsi berdasarkan sebaran nilai x di sekitar 1 di tabel berikut.

x	-1	0	1	2	3
$f(x) = x^2$	1	0	...	...	...
$g(x) = 2x$	-2	0	...	...	...
$f(x) + g(x)$	-1	0	...	...	...

2. Coba perhatikan nilai limit dari masing-masing fungsi $f(x)$, $g(x)$, dan $f(x)+g(x)$.
Apakah limit $f(x)+g(x)$ menyatakan penjumlahan dari limit $f(x)$ dan limit $g(x)$?
Ya/tidak (coret yang tidak sesuai). Nilai $f(x)+g(x)$ merupakan
hasil..... dari limit ... dan limit (*isilah semua titik-titik).

3. Secara induktif dapat dituliskan $\lim_{x \rightarrow c} [f(x)+g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} \dots + \lim_{x \rightarrow c} \dots$ (sifat 4.1)

4. Bagaimana sifat limit penjumlahan dengan $g(x)$ negatif atau $-g(x)$. Ayo kerjakan aktivitas berikut!

5. $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) + (-g(x))]$ = $\lim_{x \rightarrow c} \dots + \lim_{x \rightarrow c} \dots$ (gunakan sifat 4.1)

$$\lim_{x \rightarrow c} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} \dots - \lim_{x \rightarrow c} \dots \text{ (gunakan sifat 3)}$$

$$\text{Jadi, } \lim_{x \rightarrow c} [f(x) - g(x)] = \dots \text{ (sifat 4.2)}$$

SIFAT 5

1. Diketahui fungsi $f(x) = x$ dan $g(x) = 2x + 1$, serta sebarang nilai x di sekitar 2 yang ditampilkan melalui tabel berikut. Lengkapilah nilai fungsi $f(x)$, $g(x)$, dan $f(x).g(x)$!

x	0	1	2	3	4
$f(x) = x$	0	1	...	...	...
$g(x) = 2x + 1$	1	3	...	...	...
$f(x).g(x)$	0	3	...	...	...

2. Coba perhatikan pendekatan setiap nilai fungsi f , g , dan $(f.g)$ untuk $x \rightarrow 2$!
3. Apakah limit $f(x).g(x)$ menyatakan perkalian dari limit $f(x)$ dan limit $g(x)$?
Ya/tidak (coret yang tidak sesuai). Nilai $f(x).g(x)$ merupakan hasil..... dari limit ... dan limit (isilah semua titik-titik).
4. Secara induktif dapat dituliskan $\lim_{x \rightarrow a} (f(x).g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ (sifat 5)

SIFAT 6

1. Diketahui fungsi $f(x) = 4x + 2$, $g(x) = 2x + 1$, serta sebaran nilai x di sekitar 1 yang ditampilkan melalui tabel berikut. Lengkapilah nilai fungsi $f(x)$, $g(x)$, dan $f(x)/g(x)$!

x	-1	0	1	2	3
$f(x) = 4x + 2$	-2	2	...	...	...
$g(x) = 2x + 1$	-1	1	...	...	...
$f(x)/g(x)$	2	2	...	...	...

2. Apakah limit $f(x)/g(x)$ menyatakan perkalian dari limit $f(x)$ dan limit $g(x)$?
Ya/tidak (coret yang tidak sesuai). Nilai $f(x)/g(x)$ merupakan hasil..... dari limit ... dan limit (isilah semua titik-titik).
3. Secara induktif dapat dituliskan $\lim_{x \rightarrow c} (f(x)/g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) / \lim_{x \rightarrow c} g(x)$ (sifat 6)

SIFAT 7

$\lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^n = \lim_{x \rightarrow c} [\dots\dots\dots]$ gunakan konsep eksponen

$$= [\dots\dots\dots]^n$$

Jadi, $\lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^n = [\lim_{x \rightarrow c} f(x)]^n$ (sifat 7)

SIFAT 8

$$\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow c} f(x)} \text{ (sifat 8)}$$

Dengan $f(x) > 0$ dan n genap.

FASE LATIHAN

Waktu: 20 Menit

3. Sekarang tuliskanlah kesimpulan yang kamu dapat dari fase orientasi sampai fase praktikum untuk menjawab soal-soal berikut!

Misalkan (x) , (x) adalah fungsi yang mempunyai limit pada x mendekati c , dengan k dan c adalah bilangan real serta n adalah bilangan bulat positif, maka tentukanlah sifat-sifat limit aljabar berikut ini:

1. $\lim_{x \rightarrow c} k = \dots\dots\dots$
 2. $\lim_{x \rightarrow c} x = \dots\dots\dots$
 3. $\lim_{x \rightarrow c} [k \cdot f(x)] = \dots\dots\dots$
 4. $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) \pm g(x)] = \dots\dots\dots$
 5. $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) \cdot g(x)] = \dots\dots\dots$
 6. $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \dots\dots\dots$ dengan $\dots\dots\dots \neq 0$
 7. $\lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^n = \dots\dots\dots$
 8. $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{f(x)} = \dots\dots\dots$
4. Berdasarkan langkah-langkah yang telah kalian lakukan untuk menyelesaikan permasalahan pada LKPD, bersama kelompokmu presentasikan dan jelaskan di depan kelas.

FASE DISKUSI KELAS

Waktu: 20 Menit

(i) $\lim_{x \rightarrow 1} 2 = \dots$

(ii) $\lim_{x \rightarrow 3} x = \dots$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} (f(x) + g(x)) &= \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2x) \\ &= \dots\dots\dots + \dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots + \dots\dots\dots \end{aligned}$$

(iii)

Kunci Jawaban LKPD LIMIT FUNGSI ALJABAR

Kompetensi Dasar

6.2 Menggunakan sifat limit fungsi untuk menghitung bentuk tak tentu fungsi aljabar dan trigonometri

Indikator

6.2.1. Menjelaskan sifat-sifat yang digunakan dalam perhitungan limit.

Tujuan pembelajaran

1. Menentukan sifat-sifat yang digunakan dalam perhitungan limit.
2. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan sifat-sifat yang digunakan dalam perhitungan limit.

Waktu 105 menit



Kunci Jawaban LKPD

Petunjuk Penggunaan LKPD Berbasis Model APOS Berbantuan GeoGebra

1. Selesaikanlah LKPD ini dengan berdiskusi dengan teman kelompok
2. Kerjakan sesuai dengan perintah pengerjaan yang ada di dalam LKPD
3. Setiap langkah pengerjaan LKPD memiliki waktu yang berbeda-beda
4. Tanyakan kepada guru jika ada informasi LKPD yang kurang jelas

Fase Orientasi

Guru memberikan materi Limit Fungsi Aljabar

Fase Praktikum

Siswa menentukan gambar limit fungsi aljabar dengan menggunakan aplikasi GeoGebra dan memahami definisi limit fungsi aljabar

Fase Diskusi Kelompok Kecil

Siswa menyelesaikan permasalahan tentang sifat-sifat limit fungsi aljabar dengan mendiskusikan bersama teman kelompok

Fase Diskusi Kelas

Secara bergiliran setiap kelompok menjelaskan hasil diskusi kelompok di depan kelas dilanjutkan dengan diskusi kelas

Fase Latihan

Siswa menyelesaikan soal-soal latihan Limit Fungsi Aljabar

LEMBAR KERJA PESERTA DIDIK BERBASIS MODEL APOS

FASE ORIENTASI

Waktu: 10 Menit

Duduklah bersama kelompok yang telah dibagikan oleh guru secara tertib.

Selesaikan permasalahan di bawah ini dengan menyelesaikan setiap tahapan pada LKPD.

Misalkan (x) , (x) adalah fungsi yang mempunyai limit pada x mendekati c , dengan k dan c adalah bilangan real serta n adalah bilangan bulat positif, maka tentukanlah sifat-sifat limit aljabar berikut ini:

1. $\lim_{x \rightarrow c} k = \dots\dots\dots$
2. $\lim_{x \rightarrow c} x = \dots\dots\dots$
3. $\lim_{x \rightarrow c} [k \cdot f(x)] = \dots\dots\dots$
4. $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) \pm g(x)] = \dots\dots\dots$
5. $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) \cdot g(x)] = \dots\dots\dots$
6. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \dots\dots\dots$ dengan $\dots\dots\dots \neq 0$
7. $\lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^n = \dots\dots\dots$
8. $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{f(x)} = \dots\dots\dots$

FASE ORIENTASI

Waktu: 10 Menit

Duduklah bersama kelompok yang telah dibagikan oleh guru secara tertib.

Selesaikan permasalahan di bawah ini dengan menyelesaikan setiap tahapan pada LKPD.

Misalkan (x) , (x) adalah fungsi yang mempunyai limit pada x mendekati c , dengan k dan c adalah bilangan real serta n adalah bilangan bulat positif, maka tentukanlah sifat-sifat limit aljabar berikut ini:

1. $\lim_{x \rightarrow c} k = \dots\dots\dots$
2. $\lim_{x \rightarrow c} x = \dots\dots\dots$
3. $\lim_{x \rightarrow c} [k \cdot f(x)] = \dots\dots\dots$
4. $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) \pm g(x)] = \dots\dots\dots$
5. $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) \cdot g(x)] = \dots\dots\dots$
6. $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \dots\dots\dots$ dengan $\dots\dots\dots \neq 0$
7. $\lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^n = \dots\dots\dots$
8. $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{f(x)} = \dots\dots\dots$

FASE PRATIUM

Waktu: 30 Menit

Alat dan Bahan:

- | | |
|-----------------------------|----------------|
| 1. Komputer/Laptop | 3. Alat tulis |
| 2. Perangkat Lunak GeoGebra | 4. Alat gambar |

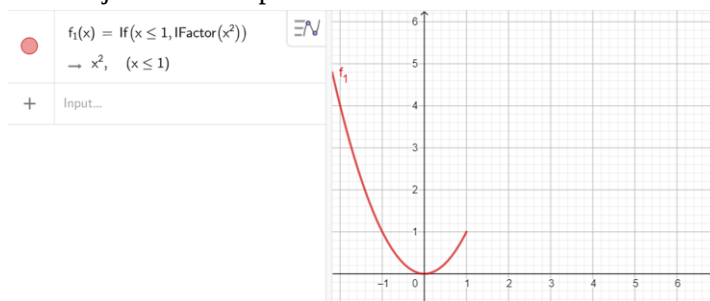
Materi Limit Fungsi Aljabar

Tentukan apakah fungsi $f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x \leq 1 \\ x + 2 & ; x > 1 \end{cases}$ mempunyai limit atau tidak!

Penyelesaian:

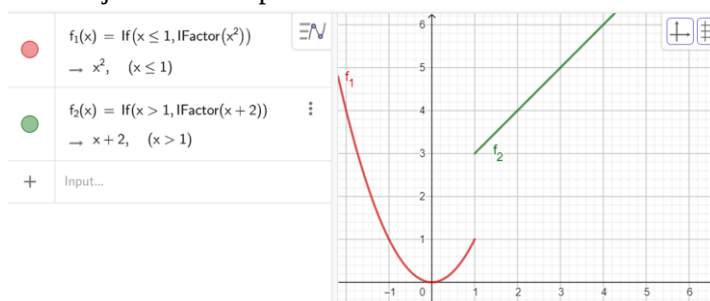
1. Siapkan area kerja GeoGebra
2. Kita akan menggambarkan grafik fungsi dengan nilai pendekatan $(x) = x^2$ untuk setiap nilai x mendekati atau sama dengan 1 dari kiri ($x \leq 1$) caranya ketik $f_1(x) = \text{IFactor}(x^2), x \leq 1$ pada kotak input seperti berikut ini.

$$f_1 = \text{IFactor}(x^2), x \leq 1$$
3. Tekan Enter maka kemudian salinlah tampilan grafik pada area kerja GeoGebra pada kotak di bawah ini.



4. Kita akan menggambarkan grafik fungsi dengan nilai pendekatan $(x) = x+2$ untuk setiap nilai x mendekati 1 dari kanan ($x > 1$) caranya pada kotak input ketik $f_2(x) = \text{IFactor}(x+2), x > 1$, seperti berikut ini.

$$f_2 = \text{IFactor}(x+2), x > 1$$
5. Tekan Enter maka kemudian salinlah tampilan grafik pada area kerja GeoGebra pada kotak di bawah ini.



6. Tabel $f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x \leq 1 \\ x + 2 & ; x > 1 \end{cases}$

x	0,8	0,9	0,99		1		1,01	1,1	1,11
f(x)	0,64	0,81	0,98		?		3,01	3,1	3,11

*ket: titik-titik pada tabel tidak perlu diisi

7. Dari grafik dan tabel yang telah kalian kerjakan sebelumnya terlihat jika kalian menyubtitusikan nilai mendekati 1 dari kiri (nilai $x \leq 1$) akan menghasilkan nilai $f(x)$ mendekati 1 dan jika menyubtitusikan nilai x mendekati 1 dari kanan (nilai $x > 1$) maka akan menghasilkan nilai $f(x)$ mendekati 3. Sehingga diperoleh bahwa limit kiri dan kanan tidak sama, maka fungsi $f(x)$ untuk x mendekati 1 tidak mempunyai limit.

Jika kata mendekati disimbolkan dengan sebuah panah ($\rightarrow$) maka pernyataan di atas dapat kita tulis:

Limit kiri: x mendekati 1 dari kiri, maka nilai limitnya mendekati 1 atau dapat ditulis $\lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1$.

Limit kanan: x mendekati 1 dari kanan, maka nilai limitnya mendekati 3 atau dapat ditulis $\lim_{x \rightarrow 1^+} x + 2 = 3$.

- B. Sekarang supaya kalian lebih paham selidiki fungsi f rasional ditentukan oleh $f(x) = 3x - 1$ dengan domain $D_f = \{x | x \in \mathbb{R}\}$. Tentukan apakah fungsi $f(x) = 3x - 1$ untuk x mendekati 2 mempunyai limit atau tidak!

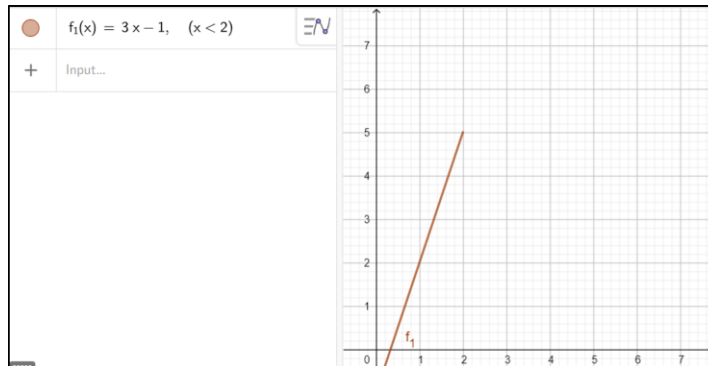
Penyelesaian

Ikuti Prosedur berikut:

8. Siapkan area kerja GeoGebra
9. Kita akan menggambarkan grafik fungsi dengan nilai pendekatan (x) untuk setiap nilai x mendekati 2 dari kiri ($x < 2$) caranya ketik $f_1(x) = 3x - 1, x < 2$ pada kotak input seperti berikut ini.

$$f_1(x) = (3x - 1, x < 2)$$

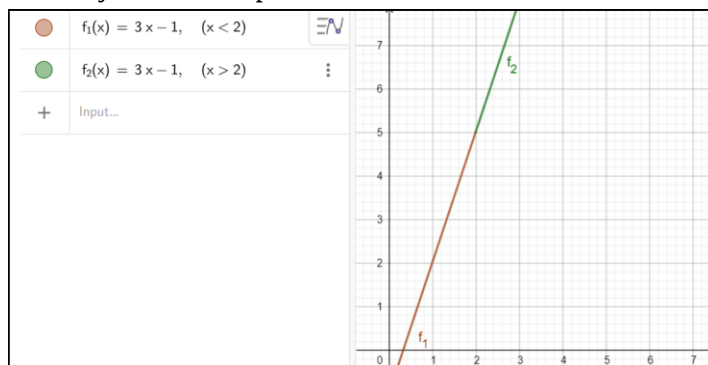
10. Tekan Enter maka kemudian salinlah tampilan grafik pada area kerja GeoGebra pada kotak di bawah ini.



11. Kita akan menggambarkan grafik fungsi dengan nilai pendekatan (x) untuk setiap nilai x mendekati 2 dari kanan ($x > 2$) caranya pada kotak input ketik $f_2(x) = 3x - 1, x > 2$, seperti berikut ini.

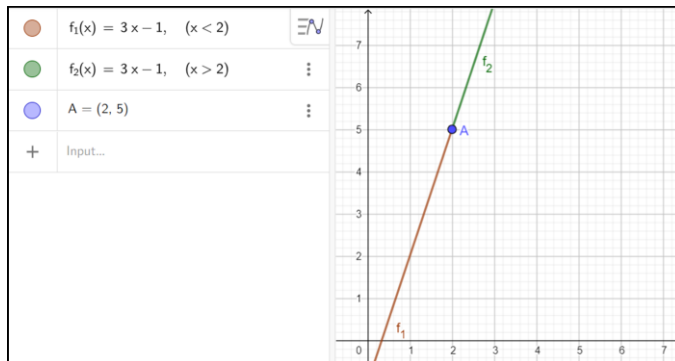
$$f_2(x) = 3x - 1, x > 2$$

12. Tekan Enter maka kemudian salinlah tampilan grafik pada area kerja GeoGebra pada kotak di bawah ini!

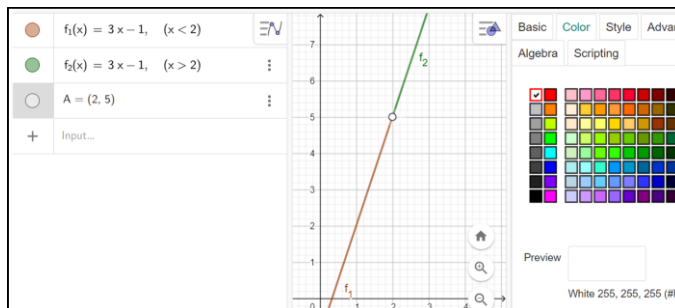


13. Dari grafik yang kalian peroleh tampak seperti kedua garis menyatu padahal mereka terpisah karena tidak memuat nilai $x = 2$ dan apabila $x = 2$ disubstitusikan pada persamaan $f(x) = 3x - 1$ diperoleh $f(x) = 5$ yang artinya kedua garis hanya mendekati angka 5 namun tidak pernah mencapai angka 5.

14. Selanjutnya pada area kerja GeoGebra yang sama input $A = (2,5)$ lalu Enter, sehingga diperoleh tampilan sebagai berikut.



15. Ubah warna titik A dengan cara klik kanan titik A, pilih Settings, pada color klik warna putih. Salinlah hasil yang kalian peroleh pada kotak di bawah ini.



Warna putih pada titik menunjukkan bulat kosong pada grafik dengan nilai $x = 2$ dan nilai $f(x)$ tidak ada.

Akan tetapi kita dapat mencari nilai $f(x)$ untuk x mendekati 2 atau ditulis dengan $\lim_{x \rightarrow 2} 3x - 1$ dengan cara mendekati 2 dari kiri atau dari kanan.

Artinya semakin dekat x ke angka 2 dari kiri maupun dari kanan maka semakin dekat $f(x)$ ke 5 baik dari atas maupun dari bawah. Nilai $f(x)$ untuk limit kiri yang nilai x -nya kurang dari 2 sama dengan nilai $f(x)$ untuk limit kanan yang nilai x -nya lebih dari 2 yaitu 5.

Maka dikatakan limit $f(x)$ mendekati 2 adalah 5.

17. Agar kalian lebih paham sekarang isilah tabel berikut ini.

Tabel $f(x) = 3x - 1$ untuk setiap nilai x mendekati nilai 2 dari kiri atau dari kanan

x	1,9	1,99	1,999		2		2,01	2,1	2,11
f(x)	4,7	4,97	4,997		5		5,03	5,3	5,33

*ket: titik-titik pada tabel tidak perlu diisi

18. Dari grafik dan tabel yang telah kalian kerjakan sebelumnya terlihat jika kalian menyubtitusikan nilai mendekati 2 dari kiri (nilai $x < 2$) akan menghasilkan nilai $f(x)$ mendekati 5 dan jika masukkan nilai x mendekati 2 dari kanan (nilai $x > 2$) maka akan menghasilkan nilai $f(x)$ mendekati 5. Sehingga diperoleh bahwa jika x mendekati 2 dari kiri maupun kanan, maka fungsi $f(x)$ mendekati 5.

Jika kata mendekati disimbolkan dengan sebuah panah ($\rightarrow$) maka pernyataan di atas dapat kita tulis:

$$\lim_{x \rightarrow 2} 3x - 1 = 5$$

19. Analisis hasil limit kiri dan kanan dari grafik maupun tabel.
Limit kiri: x mendekati 2 dari kiri, maka nilai limitnya mendekati 5 atau dapat ditulis $\lim_{x \rightarrow 2^-} 3x - 1 = 5$.
Limit kanan: x mendekati 2 dari kanan, maka nilai limitnya mendekati 5 atau dapat ditulis $\lim_{x \rightarrow 2^+} 3x - 1 = 5$.

20. Dari langkah 1 sampai 11 kita mendapatkan informasi bahwa $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; L dan $a \in \mathbb{R}$. Maka: $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ jika dan hanya jika nilai dari limit fungsi $f(x)$ untuk x mendekati c sama dengan L .

Sehingga suatu fungsi $f(x)$ untuk mendekati c dikatakan mempunyai limit jika nilai limit kiri dan limit kanan fungsi $f(x)$ sama dengan L .

FASE DISKUSI KELOMPOK KECIL

Waktu: 25 Menit

Sekarang berdiskusilah bersama kelompok kalian untuk menentukan sifat-sifat limit fungsi aljabar!

Selamat bekerja!

SIFAT 1

(Limit fungsi konstan)

Diketahui fungsi konstan f , g , dan h ditentukan oleh $f(x) = 3$, $g(x) = -5$.

1. Isilah nilai fungsi untuk setiap x yang diberikan.

Nilai $f(x) = 3$ untuk sebaran x sekitar 3!

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)=3$	3	3	3	3	3	3	3

Nilai $g(x) = -5$ untuk sebaran x sekitar 4

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1
$g(x)=-5$	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5

2. Coba perhatikan barisan nilai $f(x)$ di atas, apakah ada nilai fungsi yang muncul dan dekat dengan nilai tertentu selain nilai konstan?

Ya tidak (*lingkari jawaban yang menurut Anda benar).

Nilai fungsi selalu **sama** berbeda (*lingkari jawaban yang menurut Anda benar) dengan nilai konstan.

3. Jadi, jika $f(x) = k$ konstan, serta x mendekati c , k dan $c \in \mathbb{R}$, maka notasi limit f

konstan dituliskan $\lim_{x \rightarrow c} k = k$ (Sifat 1).

SIFAT 2

1. Diketahui fungsi $f(x) = x$ dan x mendekati 1. Lengkapilah tabel berikut!

Nilai limit untuk $f(x)$ untuk sebarang nilai x di sekitar 1

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4

2. Coba perhatikan barisan nilai $f(x)$ di atas, untuk setiap nilai yang mendekati x atau x mendekati c , apakah ada nilai $f(x)$ mendekati suatu bilangan selain a ?

Ya/tidak (*lingkari jawaban yang menurut Anda benar).

Nilai $f(x)$ selalu **sama/berbeda** (*lingkari jawaban yang menurut Anda benar) nilai c .

3. Secara induktif, untuk setiap nilai x mendekati bilangan c , maka nilai $f(x)$

mendekati $f(c) = c$, ditulis dituliskan $\lim_{x \rightarrow c} x = c$ (Sifat 2).

(*Isilah titik-titik di atas!)

SIFAT 3

1. Lengkapi perhitungan $f(x)$, $2f(x)$, $3f(x)$, dan $-f(x)$ untuk nilai x di sekitar 3.

x	1	2	3	4	5
$f(x) = x$	1	2	3	4	5
$2f(x) = 2x$	2	4	6	8	10
$3f(x) = 3x$	3	6	9	12	15
$-f(x) = -x$	-1	-2	-3	-4	-5

2. Coba perhatikan baris satu s.d. empat yang menunjukkan nilai pendekatan $f(x)$ untuk $x \rightarrow 3$.

Nampak nilai pendekatan $2f(x)$ adalah 2 kali lipat nilai pendekatan $f(x)$,

Nampak nilai pendekatan $3f(x)$ adalah 3 kali lipat nilai pendekatan $f(x)$,
 Nampak nilai pendekatan $-f(x)$ adalah -1 kali lipat nilai pendekatan $f(x)$,
 (*Isilah semua titik-titik di atas!)

3. Sehingga, secara induktif dapat dikatakan $\lim_{x \rightarrow c} [kf(x)] = k \left[\lim_{x \rightarrow c} f(x) \right], k \in \mathbb{R}$ (Sifat 3)

(*Isilah titik-titik di atas!)

SIFAT 4

1. Diketahui fungsi $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x$, lengkapilah nilai fungsi berdasarkan sebaran nilai x di sekitar 1 di tabel berikut.

x	-1	0	1	2	3
$f(x) = x^2$	1	0	1	4	9
$g(x) = 2x$	-2	0	2	4	6
$f(x) + g(x)$	-1	0	3	8	15

2. Coba perhatikan nilai limit dari masing-masing fungsi $f(x)$, $g(x)$, dan $f(x)+g(x)$.
 Apakah limit $f(x)+g(x)$ menyatakan penjumlahan dari limit $f(x)$ dan limit $g(x)$?

Ya/tidak (*lingkari jawaban yang menurut Anda benar).

Nilai $f(x)+g(x)$ merupakan hasil penjumlahan dari limit $f(x)$ dan limit $g(x)$
 (*isilah semua titik-titik).

3. Secara induktif dapat dituliskan $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x)+g(x)] = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) + \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$ (sifat 4.1)

4. Bagaimana sifat limit penjumlahan dengan (x) negatif atau $-g(x)$. Ayo kerjakan aktivitas berikut!

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) + (-g(x))] = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) + \lim_{x \rightarrow \infty} [-g(x)] \text{ (gunakan sifat 4.1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow c} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) - \lim_{x \rightarrow c} g(x) \text{ (gunakan sifat 3)}$$

$$\text{Jadi, } \lim_{x \rightarrow c} [(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) - \lim_{x \rightarrow c} g(x) \text{ (sifat 4.2)}$$

6. Apabila digabung sifat 4.1 dan 4.2 maka diperoleh:

$$\lim_{x \rightarrow c} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow c} g(x) \text{ (sifat 4.2)}$$

SIFAT 5

1. Diketahui fungsi $f(x) = x$ dan $g(x) = 2x + 1$, serta sebarang nilai x di sekitar 2 yang ditampilkan melalui tabel berikut. Lengkapilah nilai fungsi $f(x)$, $g(x)$, dan $f(x) \cdot g(x)$!

x	0	1	2	3	4
$f(x) = x$	0	1	2	3	4
$g(x) = 2x + 1$	1	3	5	7	9
$f(x) \cdot g(x)$	0	3	10	21	36

2. Coba perhatikan pendekatan setiap nilai fungsi f , g , dan $(f \cdot g)$ untuk $x \rightarrow 2$!
3. Apakah limit $f(x) \cdot g(x)$ menyatakan perkalian dari limit $f(x)$ dan limit $g(x)$?
Ya/tidak (coret yang tidak sesuai). Nilai $f(x) \cdot g(x)$ merupakan hasil perkalian dari limit $f(x)$ dan limit $g(x)$ (*isilah semua titik-titik).
4. Secara induktif dapat dituliskan $\lim_{x \rightarrow c} ((x) \cdot (x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow c} g(x)$ (sifat 5)

SIFAT 6

1. Diketahui fungsi $f(x) = 4x + 2$, $g(x) = 2x + 1$, serta sebaran nilai x di sekitar 1 yang ditampilkan melalui tabel berikut. Lengkapilah nilai fungsi $f(x)$, $g(x)$, dan $f(x)/g(x)$!

x	-1	0	1	2	3
$f(x) = 4x + 2$	-2	2	6	10	14
$g(x) = 2x + 1$	-1	1	3	5	7
$f(x)/g(x)$	2	2	2	2	2

2. Apakah limit $f(x)/g(x)$ menyatakan pembagian dari limit $f(x)$ dan limit $g(x)$?
Ya/tidak (coret yang tidak sesuai). Nilai $f(x)/g(x)$ merupakan hasil pembagian dari limit $f(x)$ dan limit $g(x)$ (*isilah semua titik-titik*).

3. Secara induktif dapat dituliskan $\lim_{x \rightarrow c} (f(x)/g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) / \lim_{x \rightarrow c} g(x)$ (sifat 6)

SIFAT 7

$\lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^n = \lim_{x \rightarrow c} [\dots\dots\dots]$ gunakan konsep eksponen

$$= [\dots\dots\dots]^n$$

Jadi, $\lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^n = [\lim_{x \rightarrow c} f(x)]^n$ (sifat 7)

SIFAT 8

$$\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow c} f(x)} \text{ (sifat 8)}$$

$$x \rightarrow c \quad x \rightarrow c$$

Dengan $f(x) > 0$ dan n genap.

FASE DISKUSI KELAS

Waktu: 20 Menit

- a. Sekarang tuliskanlah kesimpulan yang kamu dapat dari fase orientasi sampai fase praktikum untuk menjawab soal-soal berikut!

Misalkan $f(x)$, $g(x)$ adalah fungsi yang mempunyai limit pada x mendekati c , dengan k dan c adalah bilangan real serta n adalah bilangan bulat positif, maka tentukanlah sifat-sifat limit aljabar berikut ini:

- $\lim_{x \rightarrow c} k = k$
- $\lim_{x \rightarrow c} x = c$
- $\lim_{x \rightarrow c} [kf(x)] = k \left[\lim_{x \rightarrow c} f(x) \right]$
- $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow c} g(x)$
- $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow c} g(x)$ (sifat 5)
- $\lim_{x \rightarrow c} (f(x)/g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) / \lim_{x \rightarrow c} g(x)$ (sifat 6)
- $\lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^n = [\lim_{x \rightarrow c} f(x)]^n$
- $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}$

- b. Berdasarkan langkah-langkah yang telah kalian lakukan untuk menyelesaikan permasalahan pada LKPD, bersama kelompokmu presentasikan dan jelaskan di depan kelas.

FASE LATIHAN

Waktu: 20 Menit

(i) $\lim_{x \rightarrow 1} 2 = 2$

(ii) $\lim_{x \rightarrow 3} x = 3$

(iii)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) + g(x)) &= \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (1^2 + 2 \cdot 1) \\ &= 1 + 2 \\ &= 3\end{aligned}$$

DAFTAR PUSTAKA

- Agung, S. (2017). Pemanfaatan Aplikasi GeoGebra dalam Pembelajaran Matematika SMP. *Prosiding Seminar Nasional*, 3(1). 312-322. <https://journal.uncp.ac.id/index.php/proceeding/article/view/801/687>
- Hanifah. (2019). *Buku Model Apos Pembelajaran Berbantuan Komputer*. Bengkulu: CV. Zigie Utama.
- Khairani, N. (2016). Pembelajaran Matematika Menggunakan teori APOS di Perguruan Tinggi. *Paradikma: Jurnal Pendidikan Matematika*, 1(2). DOI: <https://doi.org/10.24114/paradikma.v1i2.23444>
- Lubis, A.N, dkk. (2021). Analisis Kesalahan Siswa dalam Menyelesaikan Soal Matematika pada Materi Turunan. *Karismatika*, 7(2). 1-8. DOI: <https://doi.org/10.24114/jmk.v7i2.28389>
- Mahmudi, A. 2010. “Membelajarkan Geometri dengan Program GeoGebra”. Makalah dipresentasikan dalam Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY.
- Purba, D.T. (2017). Kerucut Pengalaman Edgar Dale. <http://deboratresiapurba091.blogspot.com/2017/10/kerucut-pengalaman-edgar-dale.html> (diakses tanggal 21 September 2021)
- Rahmah, S. (2017). “Desain Didaktis Konsep Fungsi Trigonometri pada Pembelajaran Matematika SMA”. Tesis. Bandung: Universitas Pendidikan Indonesia.
- Rahmawati, L., Augie, K.T., Priatna, N. (2021). Epistemological Obstacle Peserta Didik SMA dalam Materi Turunan Trigonometri. *Jurnal Pembelajaran Matematika Inovatif*, 4(5). 1055-1063. DOI: <http://dx.doi.org/10.22460/jpmi.v4i5.p1055-1064>
- Sari, Pusvyta. (2019). Analisis terhadap Kerucut Pengalaman Edgar dan Keragaman Belajar untuk Memiliki Media yang Tepat dalam

Pembelajaran. *Jurnal Manajemen Pendidikan*, 1(1), 58-78. DOI: <https://doi.org/10.55352/mudir.v1i1.27>

Suriana, Margiati. K.Y., Halidjah, S. (2015). Peningkatan Hasil Belajar Siswa dalam Pembelajaran Matematika Menggunakan Media Kerucut Bilangan di Sekolah Dasar. *Khatulistiwa: Jurnal Pendidikan dan Pembelajaran*, 4(12), 1-11. DOI: <http://dx.doi.org/10.26418/jppk.v4i12.12972>

Ulfayana. (2018). “Efektivitas Penggunaan Media Berdasarkan Teori Belajar Edgar Dale terhadap Peningkatan Hasil Belajar Fikih di MTs Negeri 2 Bulukumba”. Skripsi UIN Allauddin Makassar.

Undang-Undang Republik Indonesia Nomor 20 Tahun 2003 tentang Sistem Pendidikan Nasional

Buku yang berjudul Penuntun ***Pengembangan Bahan Ajar Materi Diferensial Berbasis Model APOS Berbantuan Geogebra*** berfungsi sebagai penuntun dalam menunjang kegiatan pengabdian kepada masyarakat dengan tema “Pelatihan Pengembangan RPP dan LKPD Materi Diferensial Berbasis Model APOS Berbantuan Geogebra pada Guru Matematika SMA/MA Kota Bengkulu Tahun 2022”. Buku ini memuat permasalahan yang dihadapi oleh peserta didik dalam mempelajari materi diferensial. Selain itu buku ini dilengkapi dengan materi diferensial yang dipelajari pada tingkat SMA, model pembelajaran APOS, penjelasan mengenai software Geogebra, serta contoh RPP dan LKPD yang dikembangkan dari indikator pada materi diferensial dengan menggunakan model APOS dan software Geogebra. Buku penuntun ini dapat dimanfaatkan khususnya oleh guru Matematika SMA/MA dalam mengembangkan bahan ajar pada materi diferensial.

PENUNTUN
PENGEMBANGAN
BAHAN AJAR MATERI
DIFERENSIAL
BERBASIS MODEL APOS BERBANTUAN GEOGEBRA

Penerbit Deepublish (CV BUDI UTAMA)
Jl. Kaliurang Km 9,3 Yogyakarta 55581
Telp/Fax : (0274) 4533427
Anggota IKAPI (076/DIY/2012)
✉ cs@deepublish.co.id
🌐 Penerbit Deepublish
📧 @penerbitbuku_deepublish
🌐 www.penerbitdeepublish.com

