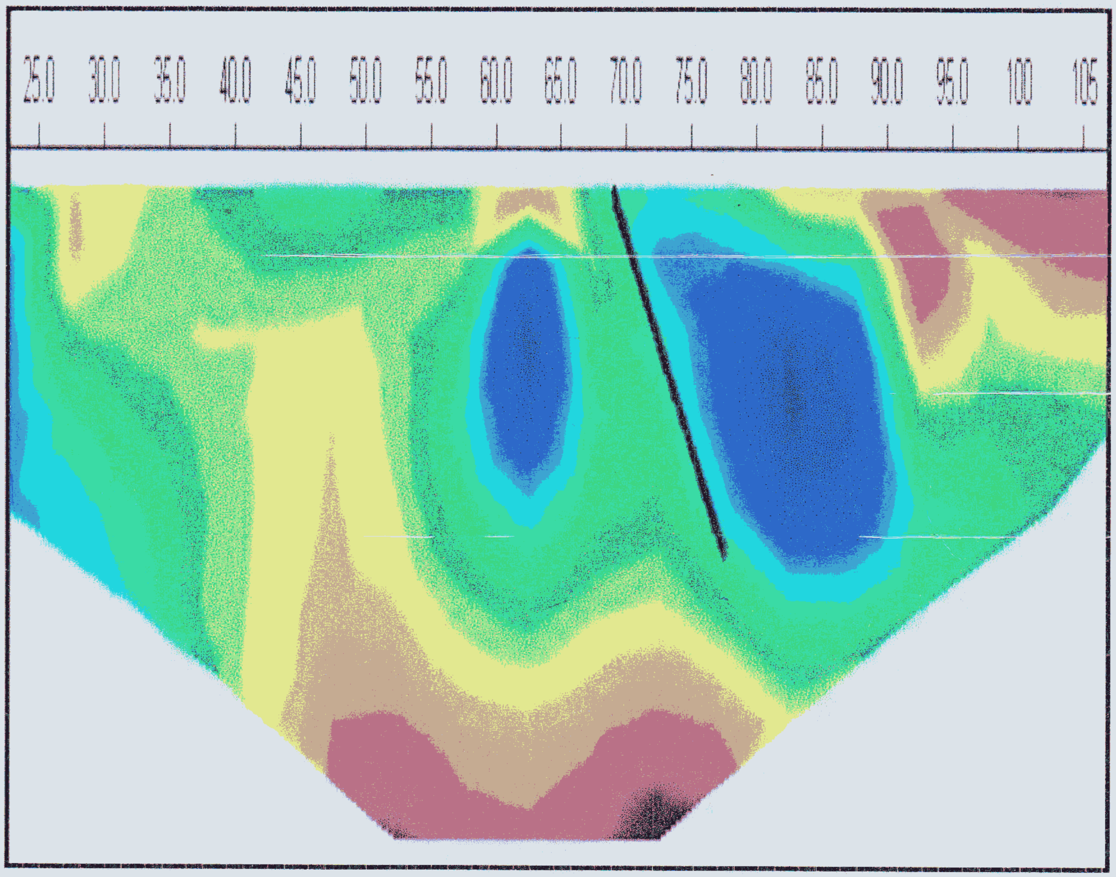
ISSN 0216-2393

# GRADIEN

Vol. 7 No. 2 Juli 2011

JURNAL MIPA




FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS BENGKULU



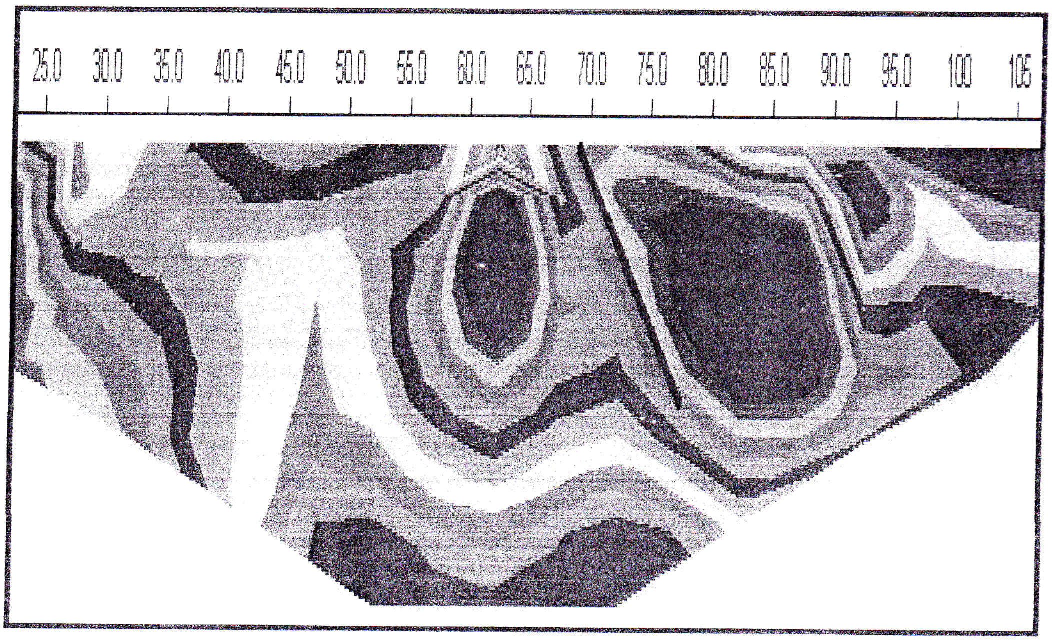
| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Gradien | Vol. 7 | No. 2 | Hal. 669-715 | Bengkulu, Juli 2011 | ISSN 0216-2393 |

ISSN 0216-2393

# GRADIEN

Vol. 7 No. 2 Juli 2011

JURNAL MIPA




FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS BENGKULU



| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Gradien | Vol. 7 | No. 2 | Hal. 669-715 | Bengkulu, Juli 2011 | ISSN 0216-2393 |

ISSN 0216-2393

# GRADIEN

Vol. 7 No. 2 Juli 2011

JURNAL MIPA

Cakupan Jurnal Ilmiah Gradien meliputi artikel ilmiah hasil penelitian dalam bidang Matematika, Fisika, Kimia dan Biologi. Jurnal ini terbit pertama kali pada tahun 2005 dengan frekuensi penerbitan dua kali setahun yaitu pada bulan januari dan juli.



**Alamat Redaksi :**
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Bengkulu
Gedung T, Jl. W.R. Supratman 38371 Bengkulu Telp/Fax. (0736) 20919
www.gradienfmipaunib.wordpress.com

ISSN 0216-2393

# GRADIEN

Vol. 7 No. 2 Juli 2011

JURNAL MIPA

## DAFTAR ISI

# PENGANTAR REDAKSI

Memasuki tahun penerbitan ke-7 (Tujuh), alhamdulillah penerbitan jurnal Gradien ini masih konsisten meskipun untuk Vol. 7 No. 2, Juli 2011 sedikit agak tersendat karena tulisan yang diharapkan masuk ke redaksi di luar jadwal yang ditentukan. Diharapkan kepada calon-calon penulis untuk edisi yang akan datang dapat memasukkan jurnalnya jauh lebih awal. Redaksi mengucapkan terima kasih, dan terus berharap semoga untuk volume berikutnya lebih banyak lagi penulis yang berasal dari luar Universitas Bengkulu.

Redaksi menyadari jurnal ini masih jauh dari kesempurnaan, oleh karena itu kritik dan saran masih tetap diperlukan guna perbaikan penerbitan jurnal ini di masa yang akan datang. Akhir kata redaksi berharap semoga pembaca dapat memanfaatkan tulisan ilmiah yang telah dimuat dalam edisi ini

Bengkulu, Juli 2011

**Dewan Redaksi**

ISSN 0216-2393

Jurnal Gradien Vol.7 No.2 Juli 2011 : 702-705

# Morfologi Matematik Dalam Pengolahan Citra *Grayscale*

Yulian Fauzi dan Zulfia Memi Mayasari

*Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Bengkulu, Indonesia*

Diterima 08 Juni 2011; Disetujui 25 Juni 2011

**Abstrak** - Morfologi Matematik dapat diformulasikan menggunakan aljabar Minkowski, sehingga penurunan fomula morfologi matematik dapat dilakukan melalui pendekatan aljabar, yaitu operasi penambahan dan pengurangan Minkowski. Implementasi Morfologi Matematik pda pengolahan citra *grayscale* akan mencari nilai maksimum dan minimum dalam lingkungan tetangga. Dalam format citra digital operator Morfologi Matematik akan mengubah nilai piksel pada lokasi $(i, j)$ dengan memperhitungkan bobot piksel disekitarnya pada citra asli.

*Kata Kunci* : **Morfologi Matematik, Aljabar Minkowski, dan Citra *Grayscale*,**

## 1. Pendahuluan

Teori morfologi matematika dan aplikasinya dikembangkan secara sistematis oleh Serra dan Matheron [2]. Prinsip dasar analisis morfologi matematik adalah membandingkan bentuk obyek yang biasanya sangat kompleks dengan suatu bentuk yang sangat sederhana, misalnya bentuk segiempat atau lingkaran yang selanjutnya disebut struktur elemen. Menurut Schalkoff (1989) secara umum morfologi matematik dapat didefenisikan atas dua operator dasar yaitu erosi dan dilasi. Operator erosi merupakan operasi pengecilan sedangkan operator dilasi merupakan operasi ekspansi. Operator erosi dan dilasi bukan merupakan pasangan inversi, maka operasi erosi yang diikuti operasi dilasi atau sebaliknya tidak akan mengembalikan citra semula. Hal ini membuat suatu transformasi morfologi matematik baru yang disebut operator pembukaan (*opening*) dan operator penutupan (*closing*). Operator pembukaan didefinisikan sebagai operasi erosi yang diikuti oleh operasi dilasi, sedangkan operator penutupan didefinisikan sebagai operasi dilasi yang diikuti oleh operasi erosi.

Operasi erosi dihasilkan dari perbedaan dan interseksi, sedangkan operasi dilasi dihasilkan dari perbedaan dan gabungan. Transformasi yang melalui dilasi tergantung pada erosi. Erosi merupakan titik awal untuk kebanyakan pemrosesan morfologis. Morfologi matematik dapat diformulasikan menggunakan aljabar Minkowski, khususnya operasi penambahan dan pengurangan Minkowski [7]. Aljabar Minkowski sangat tergantung pada konsep teoritis himpunan, yang meliputi himpunan penggabungan union ($\cup$), irisan ($\cap$) dan komplemen ($A^C$). Disamping itu, dalam rangka merepresentasikan operasi-operasi Minkowski konsep himpunan dua titik $A$ dan $B$ yang diberinotasi dalam $Z^2$ yang dikenal sebagai ruang *Euclidian* dua dimensi dengan komponen $a = (a_1,a_2)$. Translasi dua titik tersebut didefenisikan menggunakan penambahan vektor sederhana sebagai berikut:

$$(A)_x = \{c \mid c = a + x :\ a \in A\} \quad (1)$$

di mana $x \in R^2$.

Untuk himpunan $A$ dan $B$ dalam $Z^2$, erosi citra $A$ oleh struktur elemen $B$ dinotasikan $A\Theta B$, didefenisikan sebagai [4]:

$$A\Theta B = \{x \mid (B)_x \subseteq A\} \quad (2)$$

Dilasi dinotasikan dengan $A \oplus B$, dengan $\varnothing$ adalah himpunan kosong didefenisikan sebagai [4]

$$A \oplus B = \{x \mid (B)_x \cap A \neq \varnothing\} \quad (3)$$

*Opening* himpunan $A$ oleh struktur elemen $B$, dinotasikan $A \circ B$ didefenisikan sebagai:

$$A \circ B = (A\Theta B) \oplus B \quad (4)$$

*Closing* himpunan $A$ oleh struktur elemen $B$, dinotasikan $A \bullet B$ didefenisikan sebagai:

$$A \bullet B = (A \oplus B)\Theta B \quad (5)$$

Tulisan ini bertujuan untuk mengkaji teori morfologi matematik ditinjau dari teori aljabar sehingga dapat untuk diaplikasikan pada citra *grayscale*.

## 2. Penurunan Filter Morfologi Matematik Pada Citra Gray Scale

Pengolahan citra menggunakan morfologi matematik berarti meletakkan citra sebagai suatu himpunan. Terdapat dua pendekatan yang dapat digunakan dalam menganalisis citra berdasarkan morfologi matematik yaitu Geometri dan Aljabar.

Operator erosi pada citra digital akan mencari titik-titik yang bernilai minimum di dalam lingkungan tetangga, sedangkan operator dilasi akan mencari titik-titik yang bernilai maksimum. Secara matematis bentuk persamaan matematis morfologi matematik pada citra *gray scale* dapat dilihat dibawah ini:

**Proposisi 1:** [1]

Jika $f: F \rightarrow E$ dan $k: K \rightarrow E$ maka

$f \oplus k: F \oplus K \rightarrow E$ dapat dihitung dengan:

$$(f \oplus k)(x) = \max\{f(x-u)+k(u) \mid (x-u) \in F; u \in K\} \quad (6)$$

**Proposisi 2:** [1]

Jika $f: F \rightarrow E$ dan $k: K \rightarrow E$ maka,

$f\Theta k: F\Theta K \rightarrow E$ dapat dihitung dengan:

$$(f\Theta k)(x) = \min\{f(x+v)-k(v) \mid (x-v) \in F; v \in K\} \quad (7)$$

Kombinasi dari dilasi dan erosi pada citra *grayscale* akan menghasilkan jenis operator baru yaitu *opening* dan *closing*. Defenisi *opening* dan *closing* pada citra *grayscale* ekivalen dengan defenisi kedua operator tersebut pada citra binair. Persamaan matematis dari kedua operator ini ekivalen dengan persamaan (6) dan (7), tetapi karena penerapannya pada citra *grayscale* maka operator *opening* akan mencari nilai maksimum sedangkan operator *closing* akan mencari nilai minimum dari struktur elemen (jendela filter). Penurunan kedua operator ini pada citra *grayscale* dapat dilihat pada kajian matematis berikut:

**Proposisi 3:** [1]

Jika, $F, K \subseteq E^N$ dan $f: F \rightarrow E$ dan $k: K \rightarrow E$ maka

$f \circ k: F \circ K \rightarrow E$ dan dapat dihitung dengan:

$$(f \circ k)(x) = \max\{\min[f(x+v-u)-k(v) \mid v \in K]+k(u) \mid u \in K; (x-u) \in F\Theta K\}$$

Proposisi ini dapat dibuktikan dengan pendekatan aljabar sebagai berikut:

**Bukti:** [3]

Misalkan $R \subseteq E^N$ dan $r: R \rightarrow E$ sehingga $r = f\Theta k$

Dari proposisi 2

$f\Theta k: F\Theta K \rightarrow E$

Jadi $r: F\Theta K \rightarrow E$ dan $r: R \rightarrow E$ maka $R: F\Theta K$

Dari proposisi 2

$(f\Theta k)(x) = \min\{f(x+v)-k(v) \mid (x+v) \in F; v \in K\}$

Maka $r(x) = \min\{f(x+v)-k(v) \mid (x+v) \in F; v \in K\}$

Karena $f \circ k = (f\Theta k) \oplus k$, Maka $f \circ k = r \oplus k$

$$(f \circ k)(x) = (r \oplus k)(x)$$

Dari proposisi 1

$(r \oplus k)(x) = \max\{r(x-u)+k(u) \mid (x-u) \in R; u \in K\}$

dan $r \oplus k = f \circ k$

$(f \circ k)(x) = \max\{r(x-u)+k(u) \mid (x-u) \in R; u \in K\}$

Karena $R = F\Theta K$ dan

$$r(x) = \min\{f(x+v)-k(v) \mid v \in K\}$$

maka $r(x-u) = \min\{f(x+v-u)-k(v) \mid v \in K\}$

Subsitusikan persamaan ini ke

$(f \circ k)(x) = \max\{r(x-u)+k(u) \mid (x-u) \in R; u \in K\}$

sehingga didapat

$$\therefore (f \circ k)(x) = \max\{\min[f(x+v-u)-k(v) \mid v \in K]+k(u) \mid u \in K; (x-u) \in F\Theta K\}$$

**Proposisi 4:**

Jika, $F, K \subseteq E^N$ dan $f: F \rightarrow E$ dan $k: K \rightarrow E$ maka

$f \bullet k: F \bullet K \rightarrow E$ dan dapat dihitung dengan:

$$(f \bullet k)(x) = \min\{\max[f(x+v-u)-k(v) \mid v \in K] + k(u) \mid u \in K; (x+v) \in F \oplus K\}$$

**Bukti:**

Misalkan $R \subseteq E^N$ dan $r: R \rightarrow E$ sehingga $r = f \oplus k$

Dari proposisi 1

$f \oplus k: F \oplus K \rightarrow E$

Jadi $r: F \oplus K \rightarrow E$ dan $r: R \rightarrow E$ maka $R: F \oplus K$

Dari proposisi 1

$(f \oplus k)(x) = \max\{f(x-u)+k(u) \mid (x-u) \in F; z \in K\}$

Maka

$$r(x) = \max\{f(x-u) + k(u) \mid (x-u) \in F; z \in K\}$$

Karena $f \bullet k = (f \oplus k)\Theta k$, Maka $f \bullet k = r\Theta k$

$$(f \bullet k)(x) = (r\Theta k)(x)$$

Dari proposisi 2

$$(r\Theta k)(x) = \min\{f(x+v) - k(v) \mid (x+v) \in F; v \in K\}$$

dan $r\Theta k = f \bullet k$

$$(f \bullet k)(x) = \min\{f(x+v) - k(v) \mid (x+v) \in F; u \in K\}$$

Karena $R = F \oplus K$ dan

$$r(x) = \max\{f(x-u) + k(u) \mid u \in K\}$$

maka $r(x+v) = \max\{f(x+v-u) + k(u) \mid u \in K\}$

Subsitusikan persamaan ini ke

$$(f \bullet k)(x) = \min\{r(x+v) - k(v) \mid (x+v) \in R; u \in K\}$$

sehingga didapat

$$\therefore (f \bullet k)(x) = \min\{\max[f(x+v-u) - k(v) \mid v \in K] + k(u) \mid u \in K; (x+v) \in F \oplus K\}$$

## 3. Implementasi Morfologi Matematik dalam Sistem Citra Digital

Dalam sistem digital, teknik pemfilteran morfologi matematik pada citra menggunakan struktur elemen sebagai jendela filter. Menurut [5], cara kerja struktur elemen dalam operasi morfologi matematik ekivalen dengan cara kerja *kernel* dalam operasi konvolusi citra. Struktur elemen sebagai pembatas wilayah atau penentu lingkungan tetangga *(neighborhood)*. Perumusan erosi dan dilasi, digambarkan dalam struktur elemen dalam matriks 3 x 3 sebagai piksel-piksel tetangga dengan koefisien-koefisien matriks yang dinotasikan dalam bentuk:

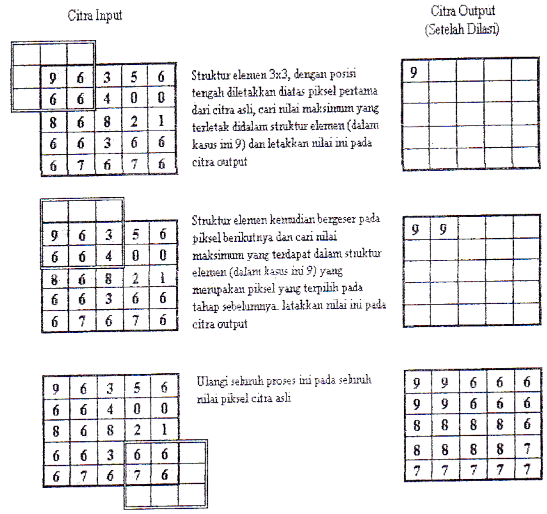
$$\begin{bmatrix} (i-1,j-1) & (i-1,j) & (i-1,j+1) \\ (i,j-1) & (i,j) & (i,j+1) \\ (i+1,j-1) & (i+1,j) & (i+1,j+1) \end{bmatrix}$$

Aplikasi operator erosi dan dilasi pada sistem citra digital berarti menempatkan kedua operator tersebut sebagai filter digital. Perumusan kedua filter dapat ditulis dalam bentuk persamaan berikut [6]:

$$F(i,j) = \text{Maks}\{f(i-1,j-1), f(i-1,j), \ldots, f(i+1,j+1)\}$$

$$F(i,j) = \text{Min}\{f(i-1,j-1), f(i-1,j), \ldots, f(i+1,j+1)\}$$

Cara kerja kedua filter ini adalah mengubah nilai piksel pada lokasi *(i,j)* dengan memperhitungkan bobot piksel di sekitarnya pada citra masukan. Penjabaran prinsip ini dalam pemfilteran dilasi dapat dijelaskan sebagai berikut, koefisien pada struktur elemen (jendela filter) diletakkan pada nilai kecerahan masing-masing piksel kemudian masing-masing koefisien struktur elemen (jendela filter) tersebut dikalikan dengan nilai kecerahan piksel, pada titik yang sama. Hasilnya nilai kecerahan yang paling besar (maksimum) akan menggantikan posisi nilai kecerahan piksel citra asli pada lokasi *(i,j)* dan terhimpun dalam citra output (gambar 1). Prosedur yang sama dapat diterapkan pada pemfilteran Erosi tetapi prosesnya adalah mencari nilai minimum.




Gambar 1. Ilustrasi kerja operator dilasi pada sebuah citra digital [8]

Bentuk filter yang lain adalah filter *Opening* dan *Closing*. *Opening* merupakan kombinasi antara filter dilasi dengan filter erosi (dalam citra aras keabuan) sehingga bentuk diskret filter ini pada citra digital dalam jendela filter 3 x 3, dapat dibuat dalam persamaan berikut:

$$(f \circ b)(i,j) = Mak\{Min\ [f(i-1,j-1), f(i-1,j), \cdots, f(i+1,j+1)]\}$$

Filter *closing* merupakan kombinasi filter erosi dengan filter dilasi, maka kombinasi kedua filter ini dapat dibuat dalam persamaan berikut:

$$(f \bullet b)(i,j) = Min\{Mak\ [f(i-1,j-1), f(i-1,j), \cdots, f(i+1,j+1)]\}$$

## 4. Kesimpulan

1. Operator erosi pada citra digital akan mencari titik-titik yang bernilai minimum di dalam lingkungan tetangga, sedangkan operator dilasi akan mencari titik-titik yang bernilai maksimum.
2. Implementasi operator morfologi matematik pada citra digital berarti menempatkan kedua operator tersebut sebagai filter digital dengan menggunakan

struktur elemen sebagai jendela filter. Cara kerja operator morfologi matematik pada sistem citra digital (*grayscale*) ini adalah mengubah nilai piksel pada lokasi *(i,j)* dengan memperhitungkan bobot piksel di sekitarnya pada citra input.

**Daftar Pustaka**


[1] Champs, O.I., Kanungo.T., dan Haralik, R.M., 1996. Gray-Scale Structuring Element Decomposition. *IEEE Transc. On Image Processing*. Vol. 5. No. 1. hal. 111-120.

[2] Fauzi. Y., Dulbahri dan Sri Wahyuni., 2004, Peran Penapisan Morfologi Matematik Terhadap Kenampakan Linier Pada Citra Landsat TM, Jurnal *Sains dan Sibernatika*, UGM. Vol. 17, N0. 3, hal: 455-465.

[3] Fauzi.Y., Mayasari. *Z.M, 2007. Penggunaan Teknik Filtering Morfologi Matematik dalam Mengekstraksi Jaringan Jalan dari Citra Satelit" Jurnal TEKNOSIA*, Vol. 1, No.1, hal: 7-14.

[4] Gonzalez. R.C. and Woods. R.E., 1993. *Digital Image Processing*. Addison Wesley. USA.

[5] Li,W., Benie. B.G., He. D.C., Wang.S., Ziou.D., and Gwyn. Q.H.J., 1998. Classification of SAR Images Using Morphological Texture Features. *IJRS*. Vo. 19. No. 17. hal: 3399- 3410

[6] Pratt, K.William., 1991. *Digital Image Processing*, Second Edition, John Wiley and Sons. USA.

[7] Schalkoff, R., 1989. *Digital Image Processing and Computer Vision*, John Wiley & Sons. Inc. USA.

[8] Young, N., 2002. Mathematical Morphology. http://www.dmsun4.bath.ac.uk/research